

数値解法から計算力学へ

- 計算機の発展とともに

白畑 洋

数值解法 数值计算 数值解析

岩波数学辞典 初版(1954)

数値計算法 数値計算はいたって技術的であるのと、個別的 성격が強いので一般性をもった数学の一部門たりえるかという疑問も...

岩波数学辞典 第2版(1968)

数学の発達は、とくに初期においては数値計算がその直接の目的であったと思われる。数値計算はかなり技術的なものであるが、それぞれの時代に応じて方法も変遷がある。

例 関数値計算、対数表、
19世紀中頃から卓上計算機、
近年の電子計算機時代、高速性、大量処理
数百次元の連立1次方程式

数値解法 微分方程式の近似解を各種近似解法に基づき数値的に求める方法

岩波数学辞典 第3版(1985)

一万個以上の未知数の連立1次方程式

数値解析

丸めの誤差

基本演算(加減乗除算)を用いて、複雑な問題を解く方法の
一般的研究

- ・数理モデルを数値的に解く方法
- ・数値アルゴリズム
- ・これらの方法の解析

宇野利雄、計算機のための数値計算(初版1963)

序論 誤差

連立1次方程式(消去法、反復法、共役勾配法)

行列の固有値

代数方程式

差分公式および補間法

常微分方程式(ルンゲ・クッタ法)

定積分の計算

関数近似

計算の制御

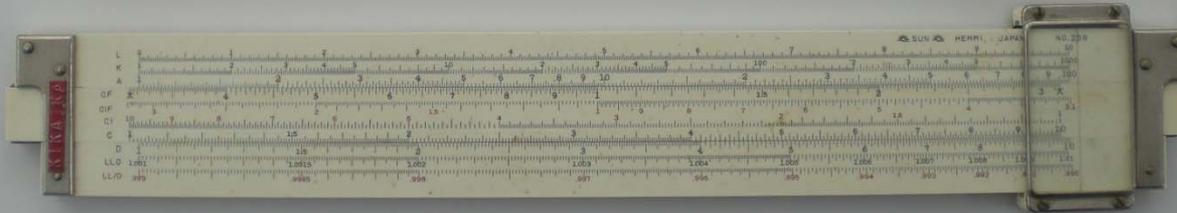
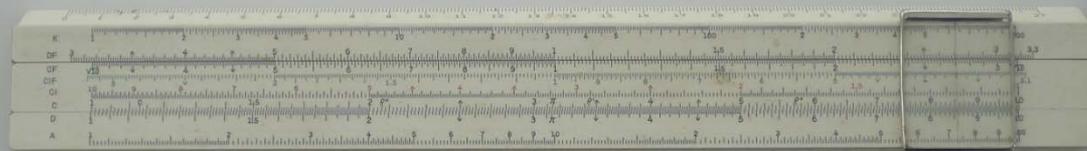
流れ図(代数方程式、固有値など)

計算機

算盤



計算尺





Tiger Calculator

TIGER MACHINE CO.LTD



Friden

FRIDEN, INC.

Made in U.S.A.



1692	Pascal	歯車を用いた加減算機
1694	Leipniz	乗除算
	Babbage(1792 ~ 1871)	計算手順の自動化の着想
1890	Hollerith	カードパンチ
1944	Harvard Mark I	継電器 (リレー), 穿孔テープ
1945	J. von Neumann	プログラム記憶方式
1946	ENIAC	真空管, プログラム毎に配線変更, 消費電力 150kW 40 台の配線盤, 18000 本の真空管, 1500 個のリレー 30 個の装置 (同期装置, 主プログラム装置, 定数転送装置, 乗算装置など)
1964	IBM 360	

東北大学大型計算機センターの汎用計算機

1958.11(S33)	SENAC-1 (Sendai Automatic Computer) NEAC-1102, パラメトロン
1961.12(S36)	計算センター
1963(S38)	NEAC-2230, 1024 語, トランジスター
1969.1(S44)	大型計算機センター NEAC2200 モデル 500 4 台
1971(S46.4)	NEAC2200-700/500
1976(S51)	ACOS700
1979(S54)	ACOS900 II (6.5MIPS)
1982(S57)	ACOS1000 (3CPU, 15MIPS/CPU)
1987(S62)	ACOS2020
1993(H5)	ACOS3900/20
1997(H9)	NX7000/460 (4CPU)
2002(H14)	TX7/AzusA (16CPU×7 ノード)

東北大学大型計算機センターのスーパーコンピュータ

1986(S61)	SX-1 (1CPU, 0.57GFLOPS, メモリ 64MB)
1989(H1)	SX-2N (1CPU, 1.1GFLOPS, 256MB)
1994(H6)	SX-3/44R (4CPU, 25.6GFLOPS, 4GB)
1998(H10)	SX-4/128H4 (128CPU, 256GFLOPS, 32GB)
2003(H15)	SX-7 (32CPU×8 セット)
2006(H18)	SX-7C (40CPU, 8CPU/ノード, 640GFLOPS, 128GFLOPS/ノード, 640GB)
2008(H20)	SX-9 (256CPU, 16CPU/ノード, 26.2TFLOPS, 102.4GFLOPS/CPU, 16TB)

航技研 (JAXA)	1977	FACOM230-75AP
	1985	VP400(1.14GFLOPS)
	1993	VPP500(1.7GFLOPS/CPU, 166CPU, 280GFLOPS)
	2002	PRIMEPOWER HPC2500(9.3TFLOPS, 128CPU×14 台)
	2009	Fujitsu(FX1 を 3392 台接続, 135TFLOPS CPU SPARC64VI を採用)
気象庁	2006	HITACHI SR11000K1(21.5TFLOPS, 16CPU/ノード, 512 ノード)
地球シミュレータ	2002	NEC(SX-5 ベース, 40.1TFLOPS, 5120CPU, 640 ノード)

Intel CPUの変遷

1971	Intel	4004 (4bit)	0.5MHz ~ 0.714MHz	1985	80386 (32bit)	12/16/20/33MHz
1972		8008 (8bit)	0.2MHz		(i386DX)	
1974		8080	2MHz	1989	i486DX	25/33/50MHz
1978		8086 (16bit)	5MHz	1993	Pentium	60/66MHz
	1981	IBM PC		1994	i486DX4	75/100MHz
	1981	Mitsubishi MUL II		1997	Pentium II	233/300/450MHz
	1981	NEC PC-8800			Pentium III	450 ~ 600MHz
	1982	NEC PC-9801		2000	Pentium IV	1.3 ~ 2.0GHz
1982		80286	6MHz	2002		2.2GHz
	1982	IBM PC/AT				

表1 現在(1994年)のハイエンド・パソコンと、約10年前(1985年)のメインフレームの比較

	1994年のハイエンド・パソコン	1985年のメインフレーム
CPU (単一CPU当たりの性能)	Pentium (100MIPS前後)	独自モジュール (15~35MIPS)
CPU数	最大4プロセサ程度	最大4プロセサ
キャッシュ容量 (アクセス時間)	128K~512Kバイト程度 (10~20ns)	64K~512Kバイト程度 (15~25ns)
主記憶容量 (アクセス時間)	最大512Mバイト程度 (60~80ns)	最大512Mバイト程度 (60~150ns)
ディスク容量	数10Gバイト程度まで可能	数10Gバイト程度を装備
入出力バス(総転送能力)	PCIバス(133Mバイト/秒)	チャンネル(500Mバイト/秒前後)

i486DX : 100MHz

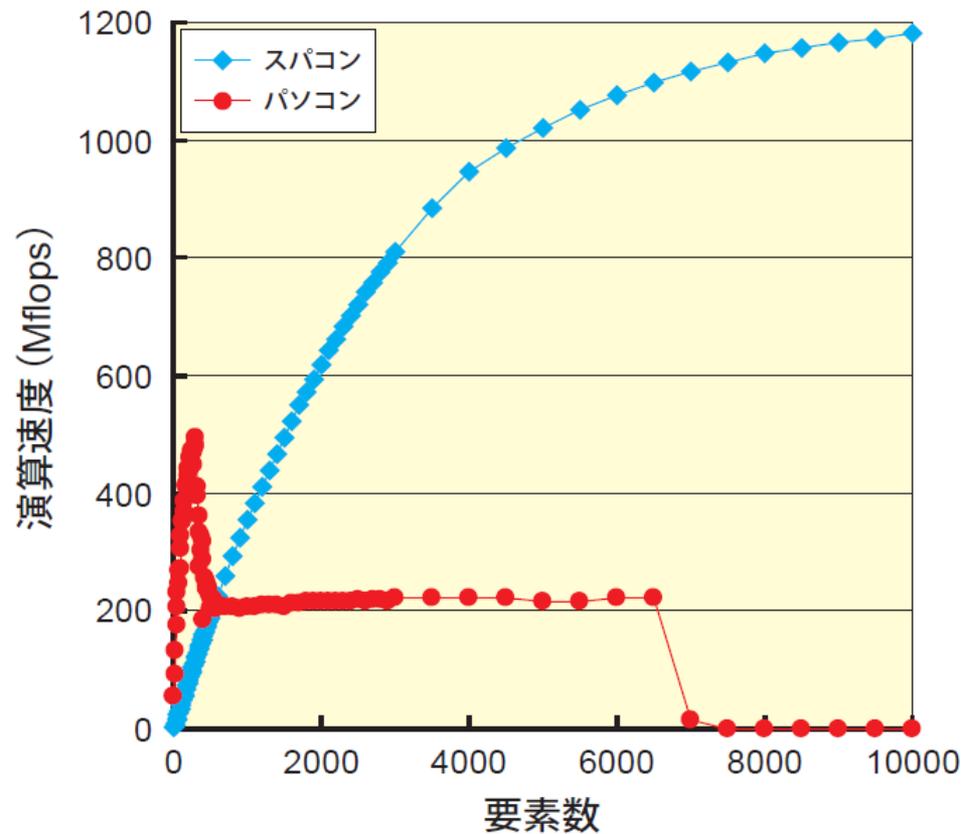
ACOS1000

東北大学大型計算機センター ジョブ制限値

			CPU	プログラムサイズ
1976(S51)	普通ジョブ		30 分以内	100KW(~800KB) 以内
1982(S57)			2 時間以内	64MB 以内
1988(S63)	ACOS2000	TSS	15 分以内	16MB
	ACOS2000	バッチ	2 時間以内	64MB 以内
	SX-1	TSS	15 分以内	64MB
	SX-1	バッチ	2 時間以内	64MB 以内

VPP5000 9.6GFOPS
PC Pentium4 1.5GHz

linpack による演算速度比較



数值解法

数值解析

差分法

Richardsonの方法

L. F. Richardson(1922)

鉛直方向 5層

水平方向 南北200km、東西経度3°

格子点 3200点

1日予報 12時間以内 6万4000人

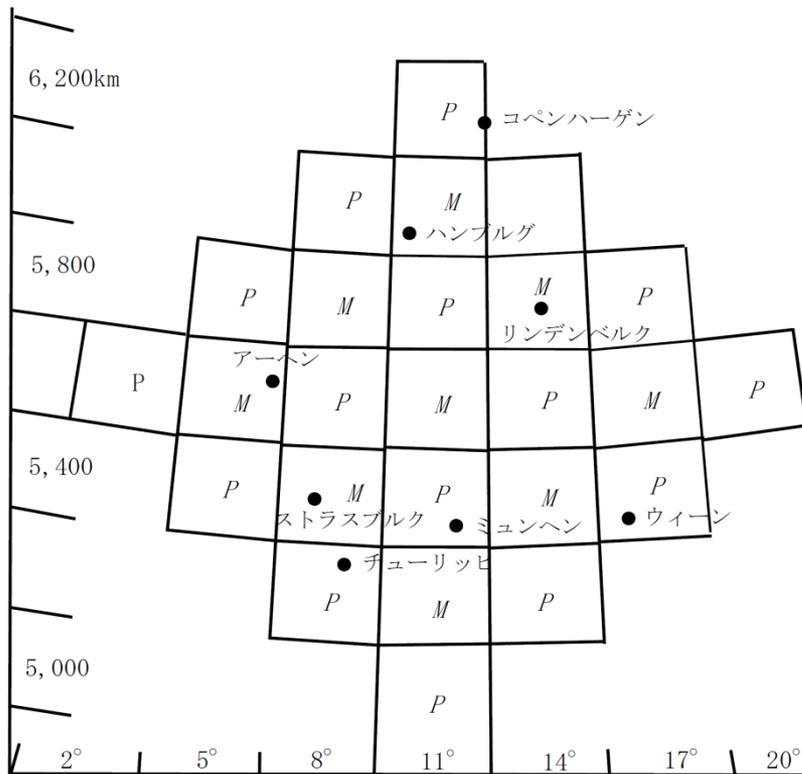
円形劇場のような建物

円形丸屋根 北半球

平土間 南半球

各格子点 4人ずつ 5段の席→計算機の素子

1910年5月20日 上層の風 バルーンの観測で補外・補間 温度 山岳の観測値



ミュンヘン近傍の数値モデルの格子点

M : 風速 *P* : 気圧

1910年5月20日

6時間の気圧変化 145hPa 10倍

手回し計算機 6週間

Richardsonの夢

1日に10hPaの気圧変化 $= 10^{-4}$ hPa/s

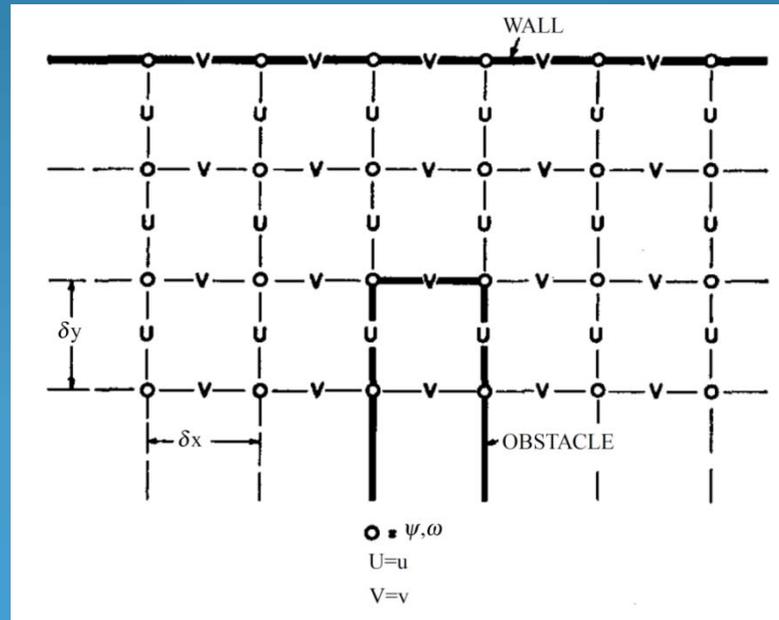
1分に0.1hPaの気圧変化 $= 10^{-3}$ hPa/s

J. E. Fromm and F. H. Harlow, Phys. Fluids, 6(1963), 975

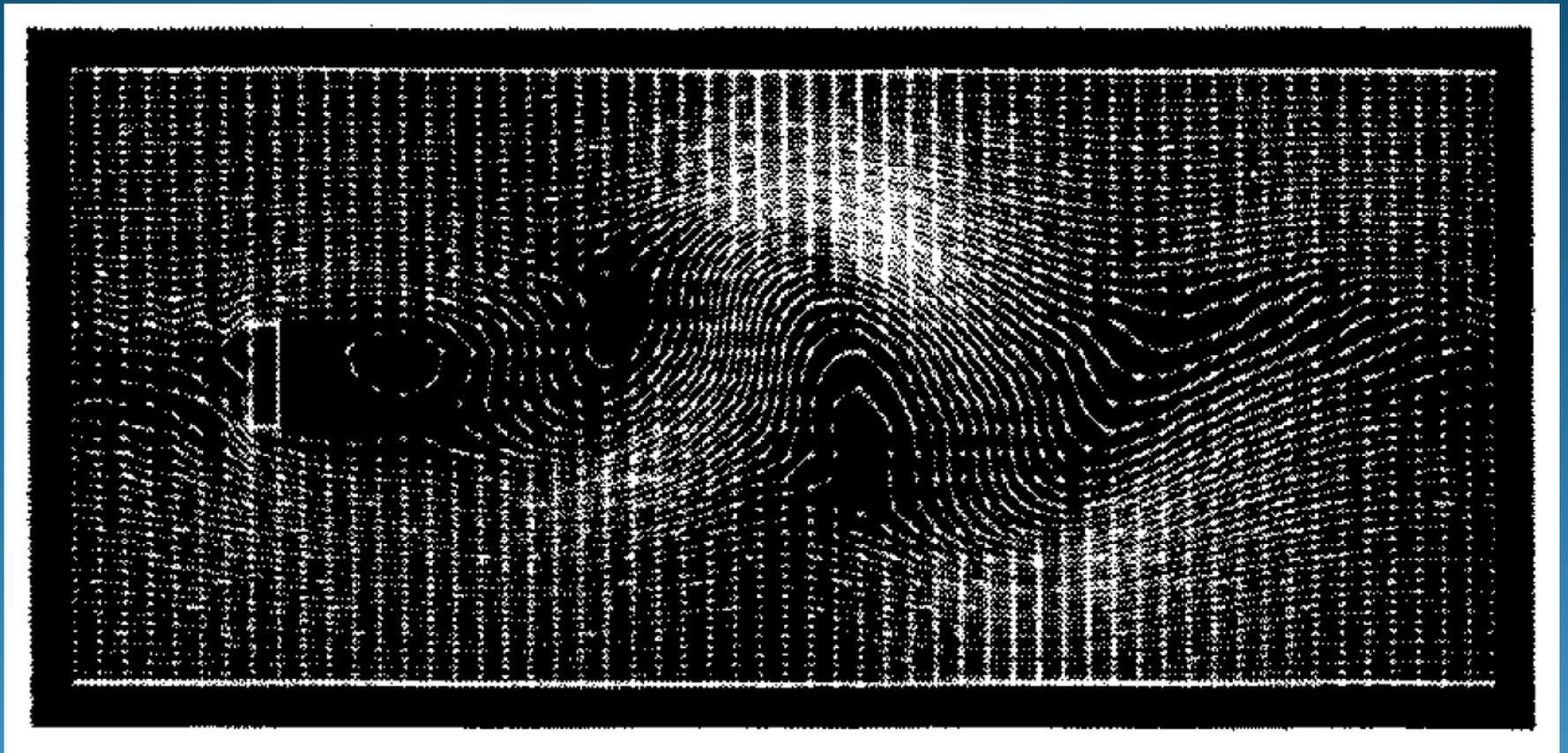
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial(p/\rho)}{\partial x} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial(p/\rho)}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$



MAC法 (Marker and Cell 法)



$Re = 300$

$$D_{i,j} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{D_{i,j}^{n+1} - D_{i,j}}{\delta t} = & -Q_{i,j} - \frac{\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i-1,j} - 2\varphi_{i,j}}{\delta x^2} \\ & - \frac{\varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j-1} - 2\varphi_{i,j}}{\delta y^2} \\ & + v \left(\frac{D_{i+1,j} + D_{i-1,j} - 2D_{i,j}}{\delta x^2} \right. \\ & \left. + \frac{D_{i,j+1} + D_{i,j-1} - 2D_{i,j}}{\delta y^2} \right) \end{aligned}$$

差分法

$$d\omega/dt = v\Delta\omega$$

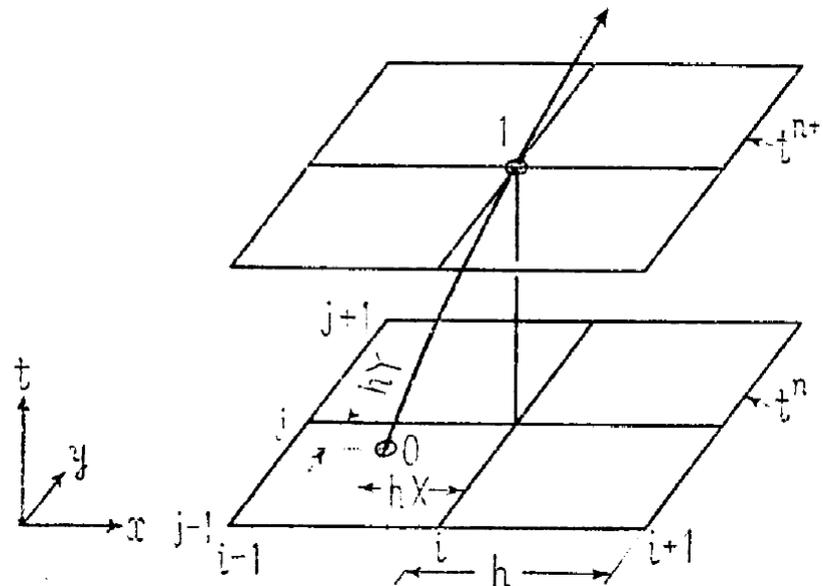
$$\Delta\phi = -\omega$$

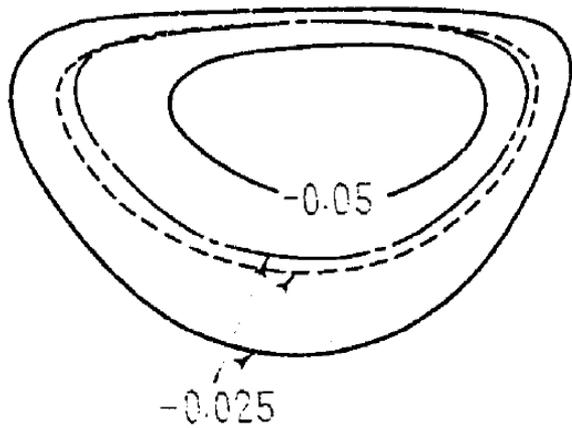
$$\omega = v_x - u_y$$

$$\phi_x = -v, \quad \phi_y = u$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{h}(x_0 - x_1) &\equiv X = -\frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_1} u(x, y, t) dt, \\ \frac{1}{h}(y_0 - y_1) &\equiv Y = -\frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_1} v(x, y, t) dt \end{aligned} \right\}$$

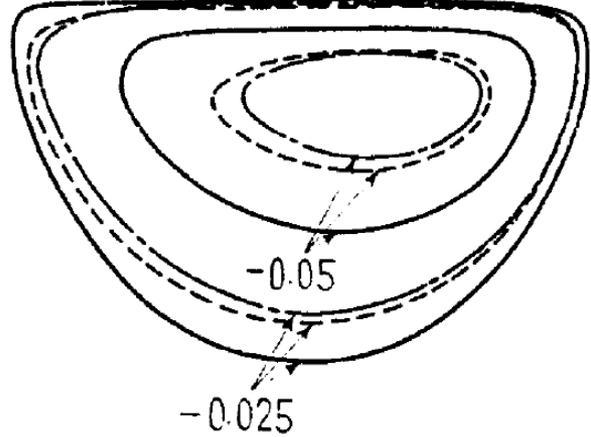
$$\omega_1 = \omega_0 + \nu \int_{t_0}^{t_1} \Delta \omega dt$$





$Re = 100$
 $\delta t = 0.10$
 $h = 1/8$
 $t = 1$

- - - - 第一近似
 ———— 第二近似
 - · - · Fromm



$Re = 100$
 $\delta t = 0.05$
 $h = 1/18$
 $t = 1$

- - - - 第一近似
 ———— 第二近似
 - · - · Fromm

有限要素法

1943 Courant, R., Bull. Amer. Math., 49.

1956 Turner, M. J., Clough, R. W., Martin, H. C. and Topp, L. J.,
Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures,
J. Aeronautical Sciences, 23.

Boeing 航空機翼の剛性解析

有限要素法

変分法

汎関数

Euler方程式

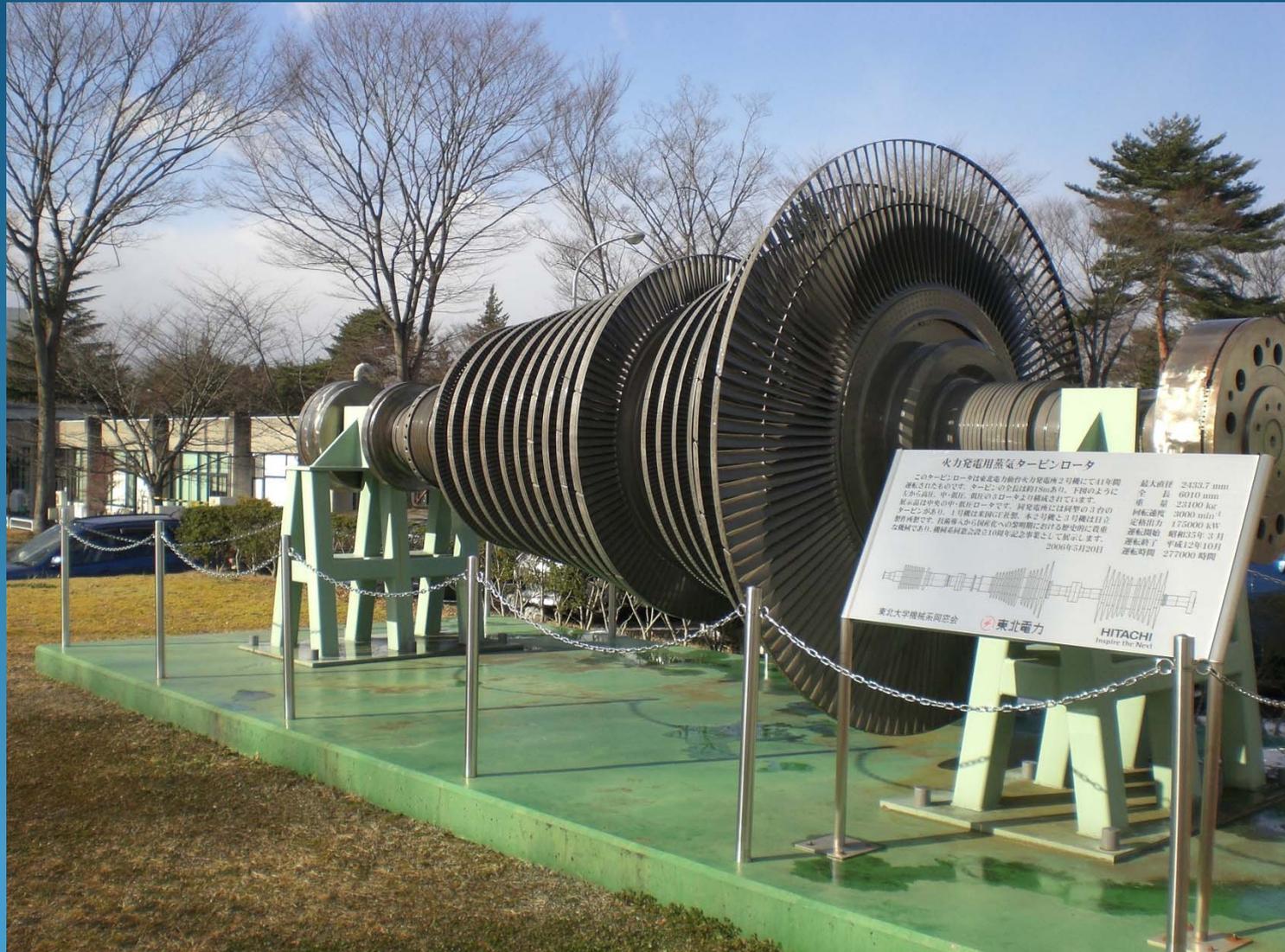
差分法

Ritz法

Galerkin法

重み付き残差法

有限要素法と差分法



水力発電用蒸気タービンロータ

このタービンロータは東北電力仙台火力発電所2号機にて41年間運転されたものです。タービンの全長は約18mあり、下部のように左から右に、中・高圧、低圧の3ロータより構成されています。展示品は中央の中・高圧ロータです。調整室では同型の立体的タービンもあり、1号機は東洋の巨製、本2号機と3号機は日立製作所製です。自衛隊からの提供品へ学習期間における歴史的に貴重な機材であり、国威発揚会設立10周年記念事業として展示します。2006年5月20日

最大直径	2433.7 mm
全長	6010 mm
重量	23100 kg
回転速度	3000 r/min
定格出力	175000 kW
運転開始	昭和35年3月
運転終了	平成12年10月
運転時間	277000 時間





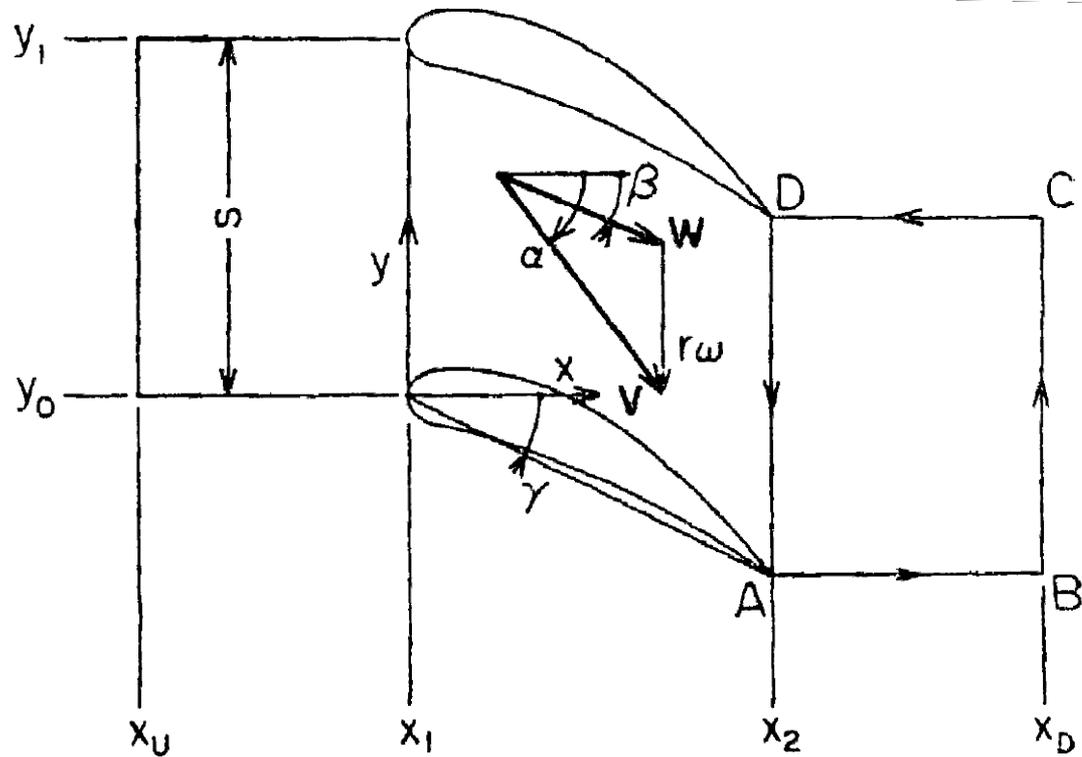


図 1 写像面上の翼列と速度線図

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = F \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \rho \right)$$

$$F \equiv \left[\frac{\partial}{\partial x} (\ln b\rho) \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (\ln \rho) \frac{\partial \psi}{\partial y} \right] \\ + \frac{2}{K^2} \omega r^2 b \rho \sin \delta$$

$$J = \int_G \left[\frac{1}{2} (\partial\phi/\partial x)^2 + \frac{1}{2} (\partial\phi/\partial y)^2 - F\phi \right] dA$$
$$- \int_{y_0}^{y_1} [(\partial\phi/\partial x)\phi]_{x=x_U} dy$$
$$+ \int_{y_0}^{y_1} [(\partial\phi/\partial x)\phi]_{x=x_D} dy$$

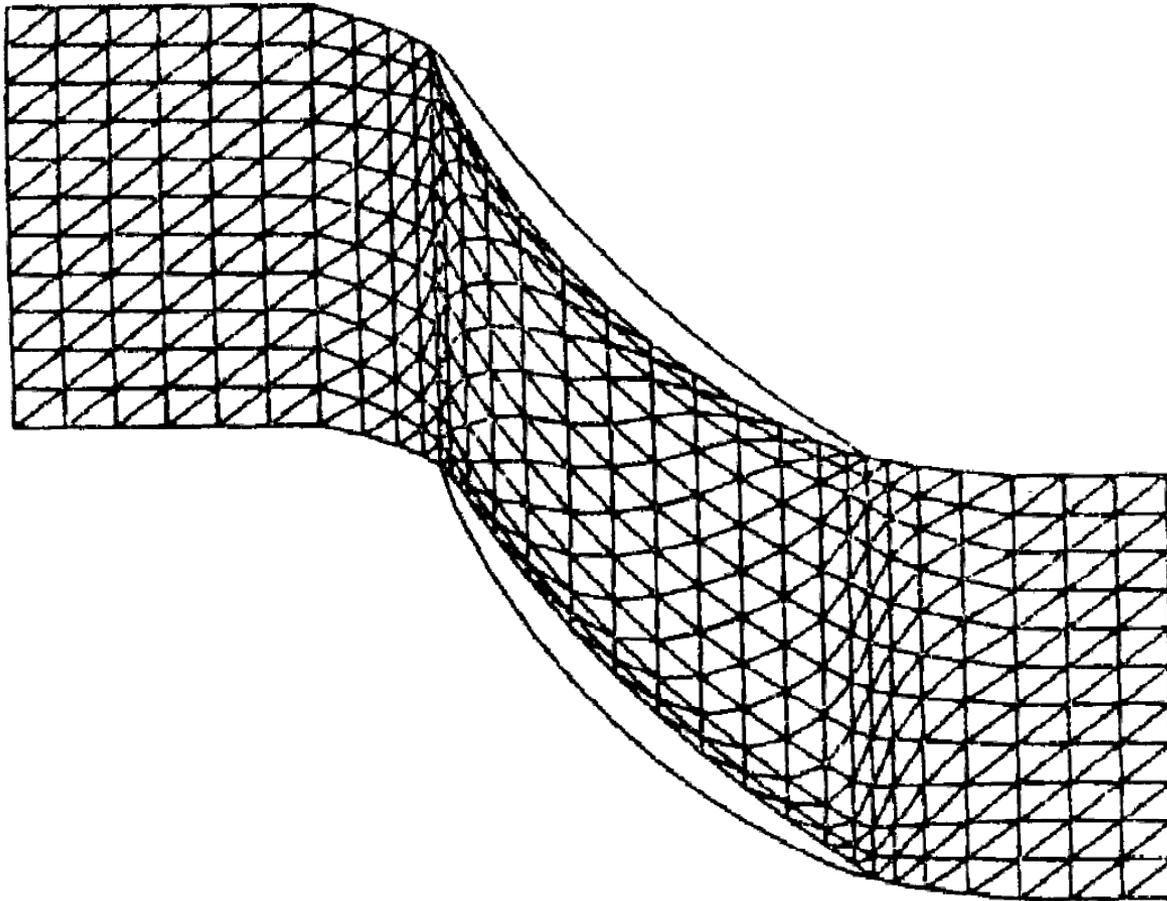
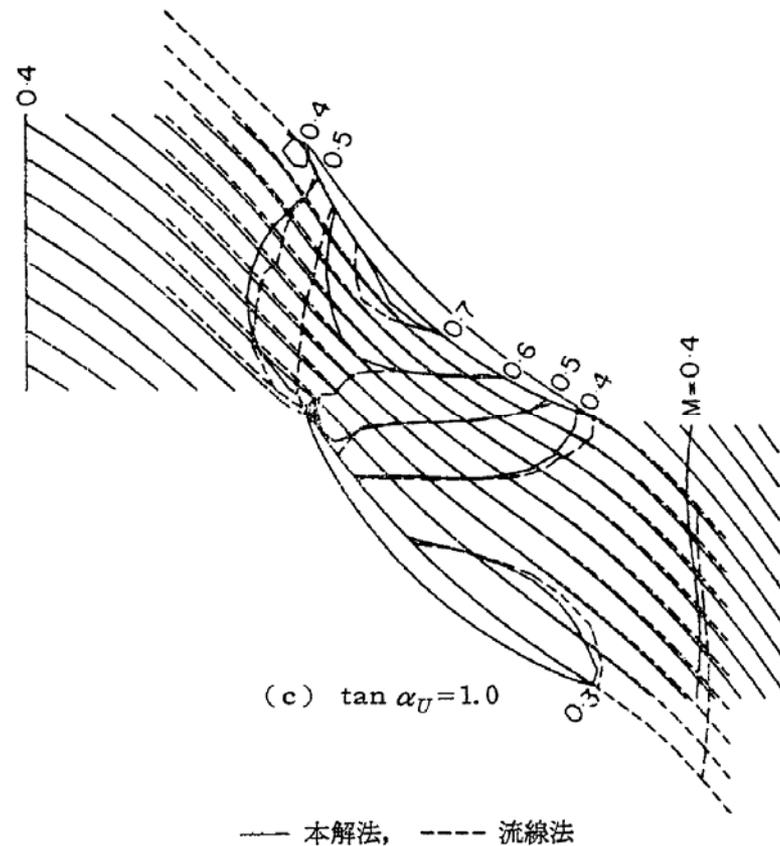
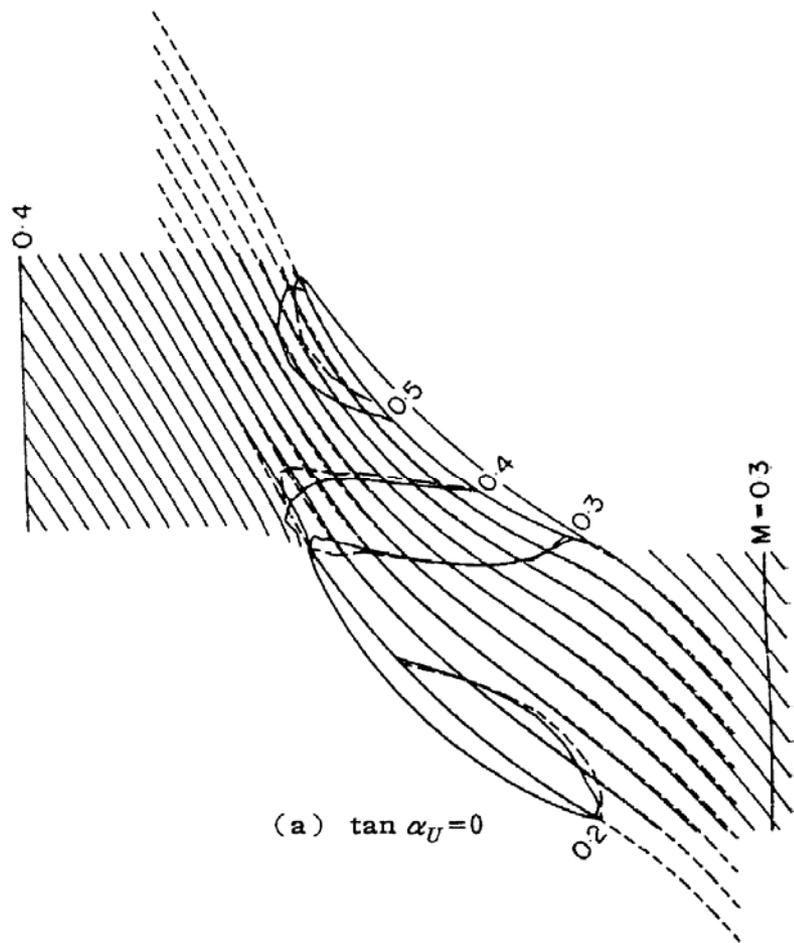


図 5 圧縮機翼列の計算に用いた要素



節点:31×12、660要素、メモリ:42キロワード
 計算時間:25~27sec (NEC ACOS700)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{b} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{b} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) = -F$$

$$F = -\frac{r^2}{K^2} 2\omega \sin \delta + \frac{r^2}{K^2} \zeta + \frac{r}{K} \gamma \delta(y - \bar{y})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\zeta}{b} \right) = 0$$

白畑、大宮司、斜流形翼列の非定常流れの離散うず法を用いる解析、
機論、47(S56)、1161

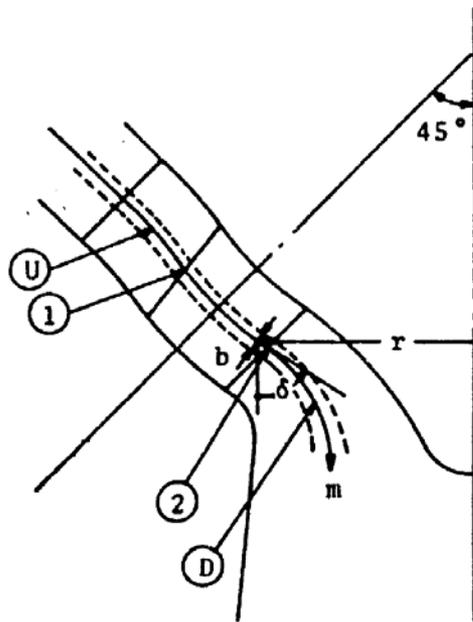


図 4 回轉流面

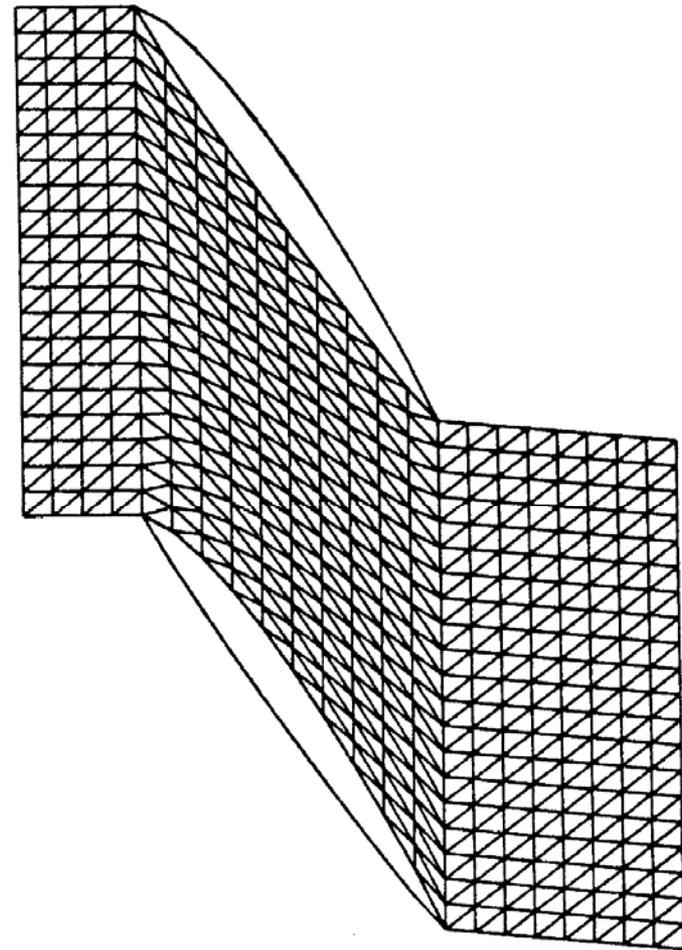
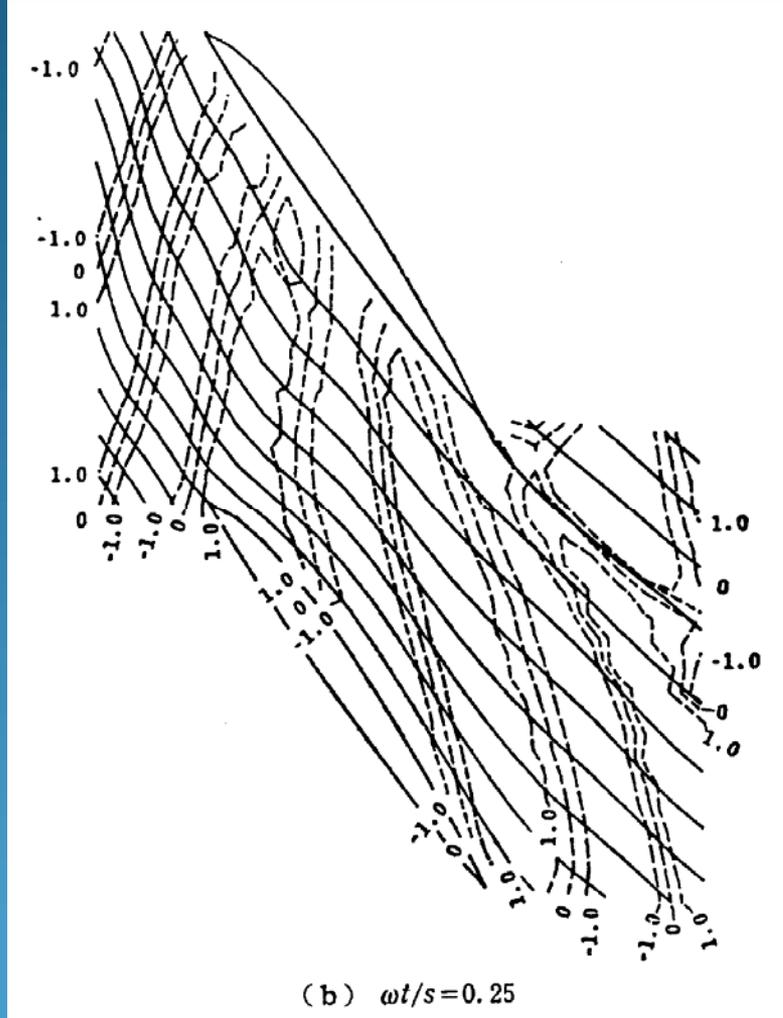


図 5 有限要素に分割された計算領域



節点:24×21、 960要素
(NEC ACOS900 II)

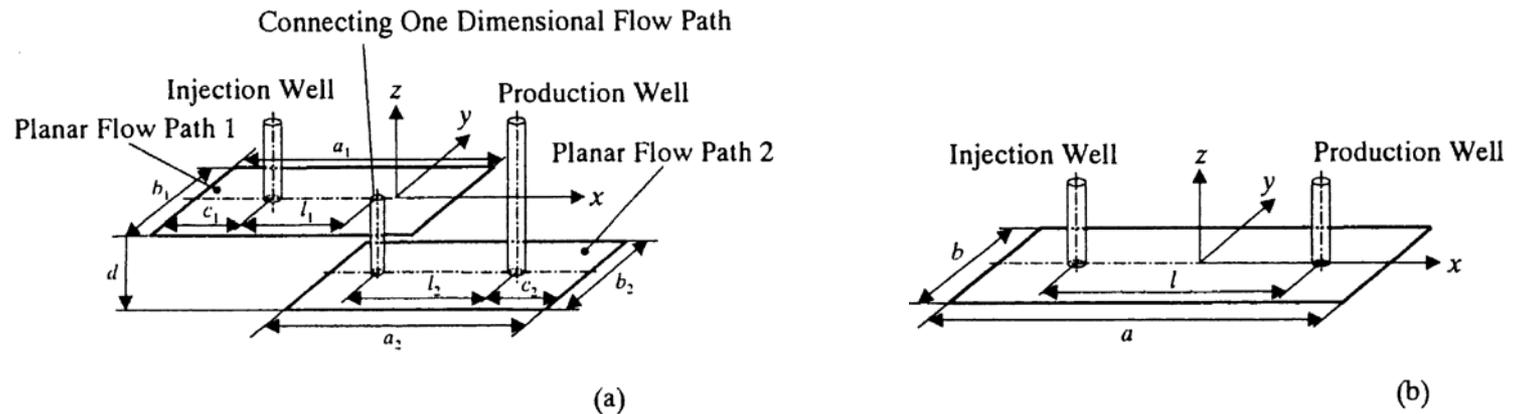
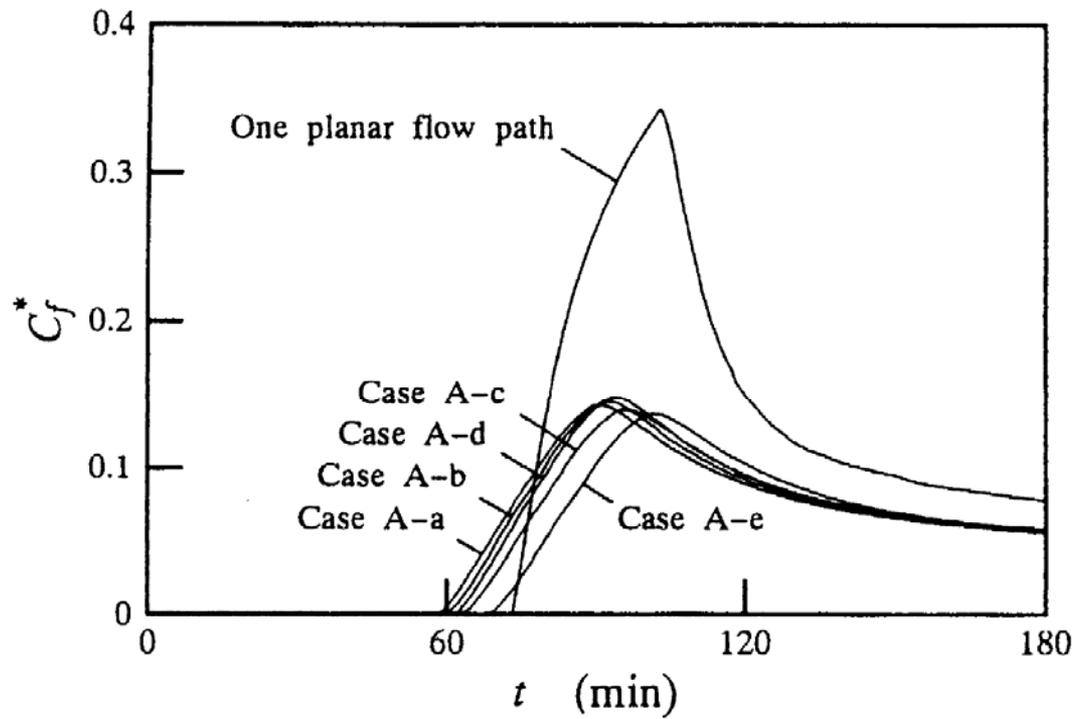


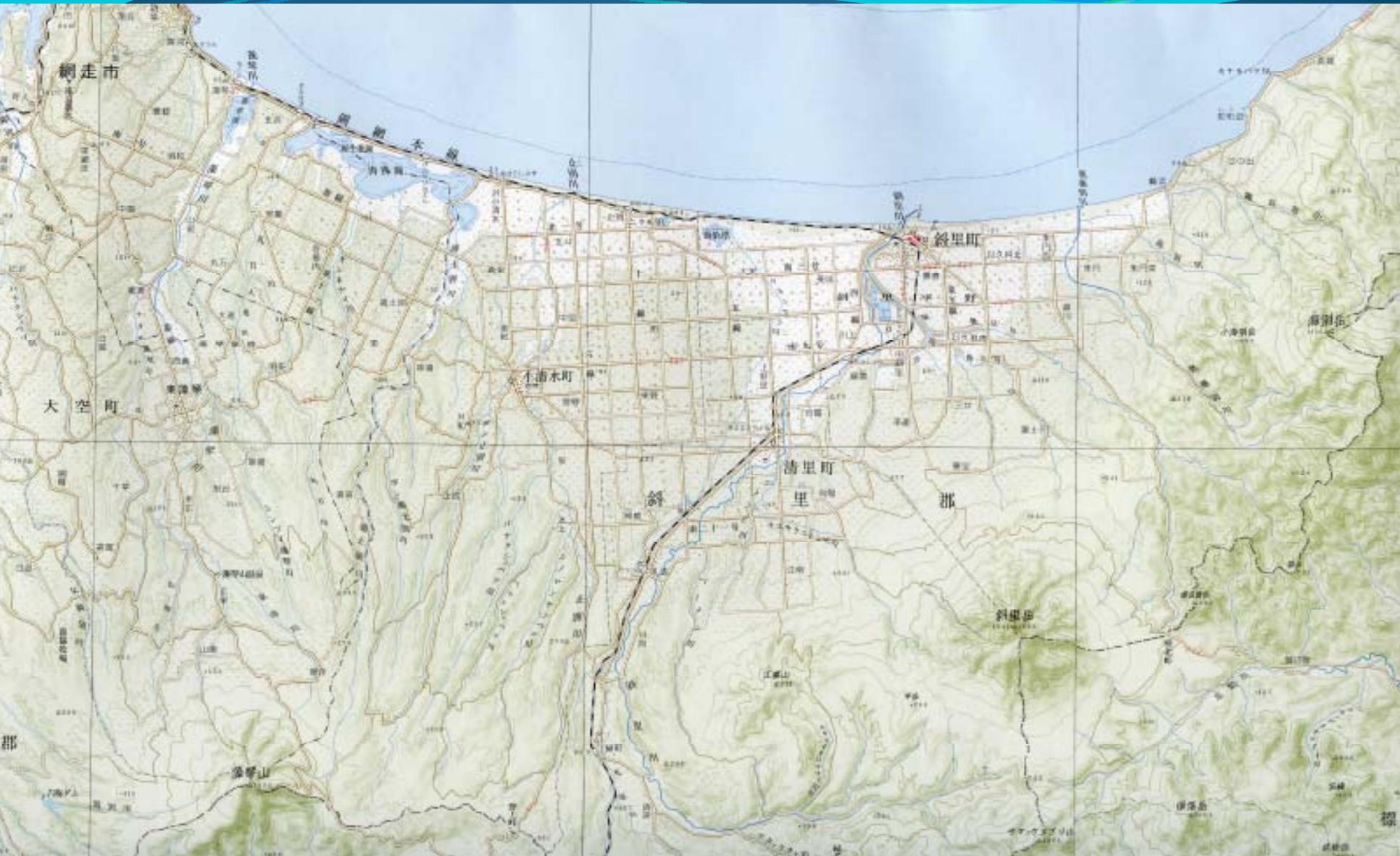
Fig. 1 Injection and production wells and dominant planar flow paths.
 (a) Two dominant planar flow paths
 (b) One dominant planar flow path

関根、白畑、複数の流れの卓越した流路面が接続した流路系を有する地熱貯留層のトレーサー応答シミュレーション、
 日本地熱学会誌、22(2000)、131.



(a)

航空・宇宙と私





走市

オシノ湖

小清水

止別川

浦士別川

大豊

音根内

浦士別

斜

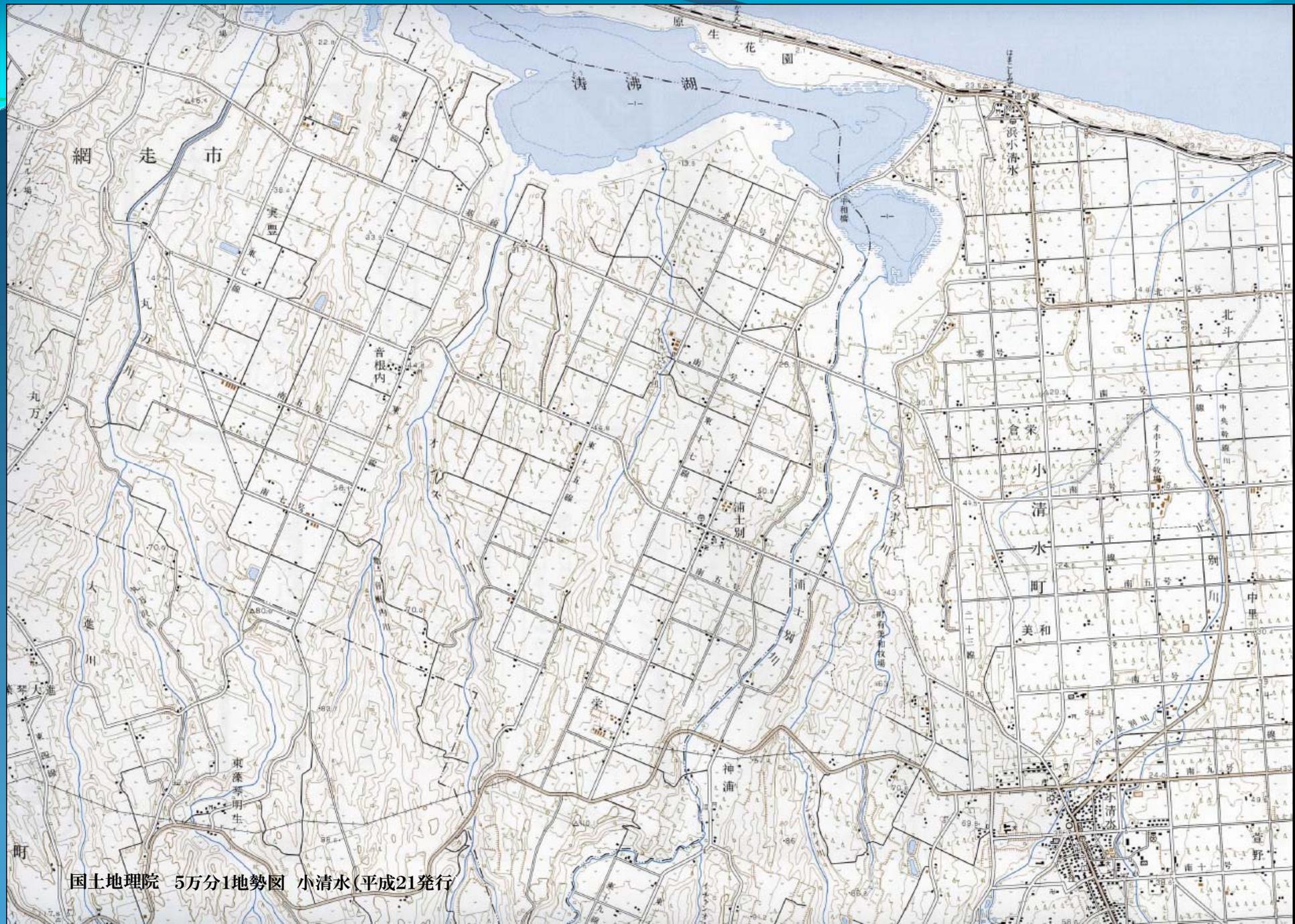
里

美和

川

九

小清水



国土地理院 5万分1地勢図 小清水(平成21発行)

昭和39年 東北大学理学部入学

昭和41年 東北大学理学部天文及び地球物理学科第二(地球物理学)進学

昭和43年 東北大学大学院理学研究科地球物理学専攻修士課程入学

地球物理学教室

地震学講座

鈴木次郎教授 弾性力学

地球電磁気学講座

加藤愛雄教授(昭和44年3月定年)

(昭和39年4月発足)

東京大学宇宙航空研究所併任教授)

上山弘助教授(昭和44年4月教授)

気象学講座

山本義一教授 流体力学、熱力学

青葉山地震観測所

女川地磁気観測所

遠刈田夜光観測所

国際地球観測年 (IGY) 1957. 7. 1~1958. 12. 31

オーロラ、大気光(夜光)、宇宙線、地磁気、氷河、
重力、電離層、経度・緯度決定、気象学、海洋学、
地震学、太陽観測

南極観測 1956年出発 第1次南極観測隊

1957年1月29日 東オングル島 昭和基地

1958年2月24日 越冬不成立

1956年1月 濤沸湖で観測隊員総合訓練(耐寒訓練)

人工衛星

	質量	近地点	遠地点
1957 Oct. 4, Sputnik 1:	83kg	226km	946km
密度、温度、宇宙線などを測定、3ヶ月で消滅			
1957 Nov. 3, Sputnik 2:	508kg	225km	1,670km
太陽、X線、紫外線、宇宙線測定、ライカ犬同乗			
1958 Jan. 31, Explorer 1:	14kg	360km	2,549km
鉛筆型で宇宙線などを12日測定、放射線帯発見			
1958 March. 26, Explorer 3:	14kg	188km	2,798km
放射線帯、流星塵測定			
1958 May. 15, Sputnik 3:	1,327kg	225km	1,789km
初期衛星の最大のもの、地場測定、外放射線帯発見			
1958 Oct. 11, Pioneer 1:	38kg	—	113,8084km
月面到達に失敗したが、43時間放射、磁場測定			

日本の超高層探索ロケット（1958～1959、1962～1963年、東大生産技術研、宇宙航空研）

番号	ロケット機種	年月日	時間	高度 (km)	
S-1	K-6-3	1958/6/24	10:50	20	失敗
S-2	K-6-4	1958/6/30	16:52	40	失敗
S-3	K-6-7	1958/9/25	11:58	44	
S-4	K-6-8	1958/9/25	14:50	-	失敗
S-5	K-6-9	1958/9/26	12:50	53	
S-6	K-6-10	1958/11/28	12:05	36	
S-7	K-6-11	1958/11/29	12:05	41	失敗
S-8	K-6-12	1958/11/30	13:00	48	
S-9	K-6-13	1958/12/58	12:03	59	
S-10	K-6-14	1959/3/17	10:53	54	失敗
S-28	K-8-11	1962/12/18	14:03	202	
S-29	K-9M-2	1963/5/20	11:09	341	
T'	L-2-1	1963/8/24	11:00	53	

オーロラおよび気象現象の高さ

オーロラ 高度100~400km

電離層

昼間:F2層(200~500km)

夜間:F層(300~500km)

昼間:F1層(170~230km)

E層(100~120km)

D層(80km)

成層圏(11~50km)

対流圏界面(11km)

対流圏(0~11km)

ジェット機

積乱雲:地上~対流圏界面

エベレスト(チョモランマ):8848m

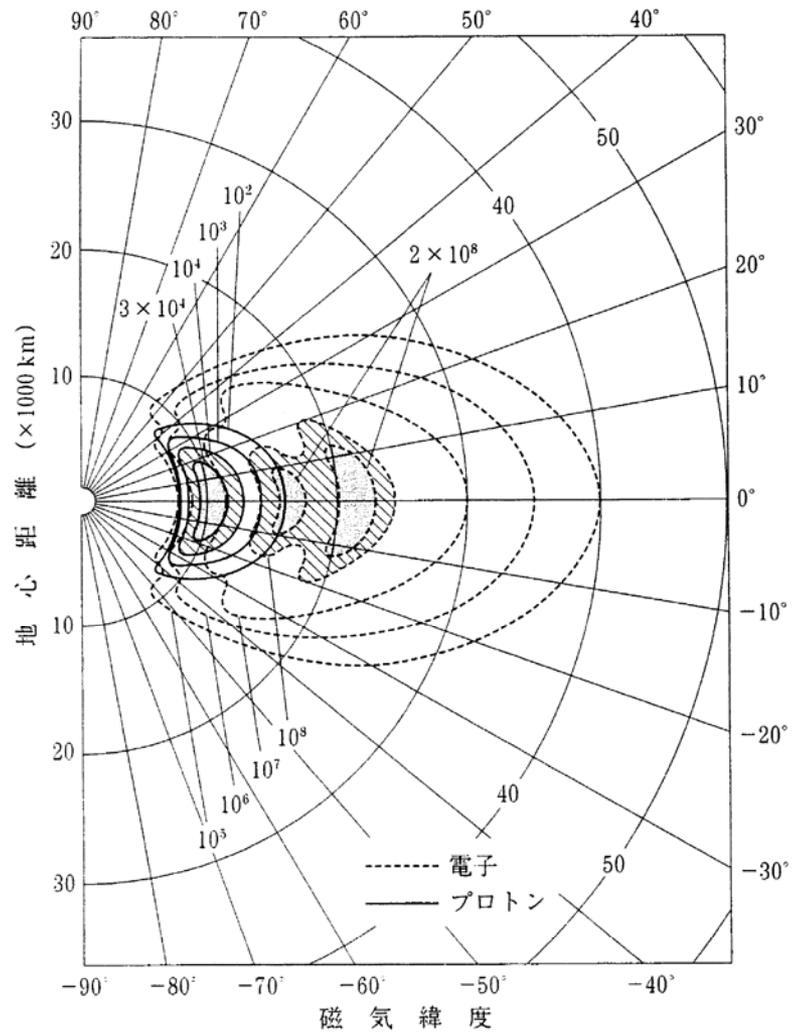
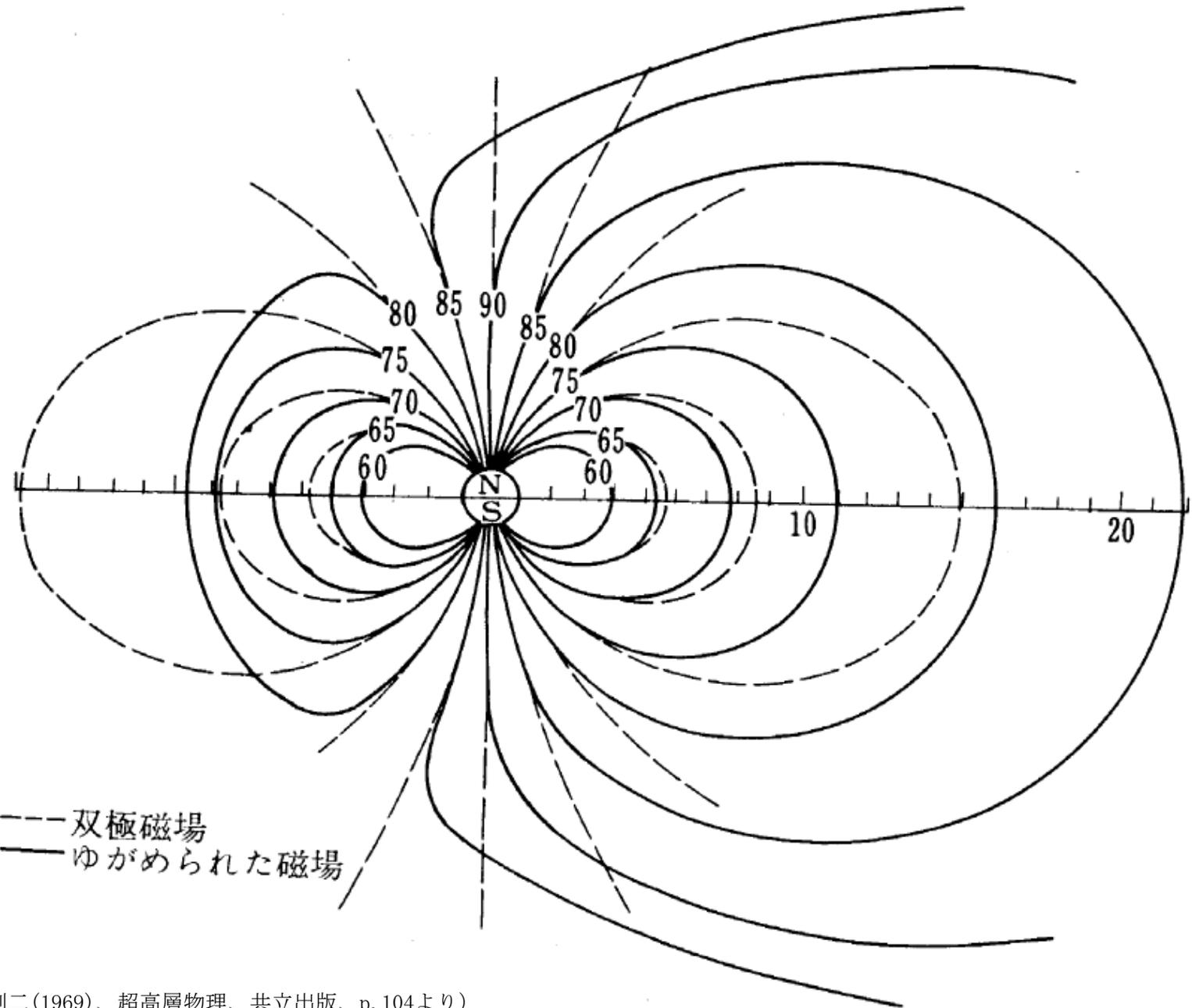


図5.30 放射線帯の構造。エネルギー $E > 45$ keV の電子，および $E > 40$ MeV プロトンの全方向通過数（任意点で全ての方向から 1 cm^2 を 1 秒に通過する粒子数）の空間分布を示す。実際の放射線帯の形は太陽風の影響で変形しているが，地球磁場が太陽風の影響のない理想的な状態に置き直して作図している。

(上山弘(1995)、地球(裳華房)、p. 210より)



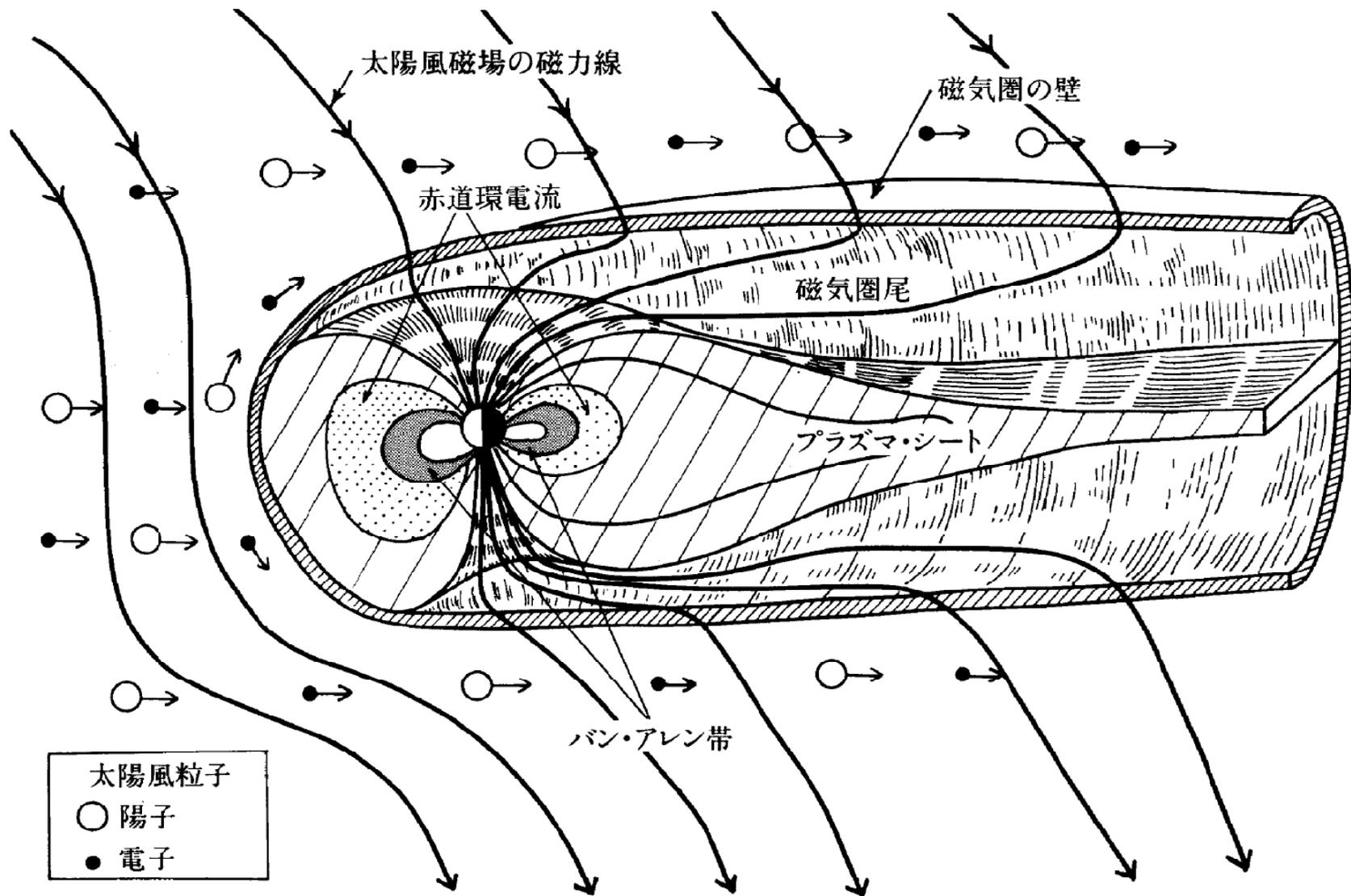


図 5・3 地球磁気圏の内部構造と太陽風粒子の流れ。太陽風の磁力線と地球の磁力線が、磁気圏の壁を通してつながっている。バン・アレン帯、赤道環電流、プラズマ・シートも示してある。

バン・アレン帯電子の大気損失および分布関数の研究

Van Allen : 1958.1 Explorer I, II, III

計算力学

日本機械学会誌 機械工学年鑑特集号

第91卷849号(1988-8) 7. 計算力学

計算力学講演会

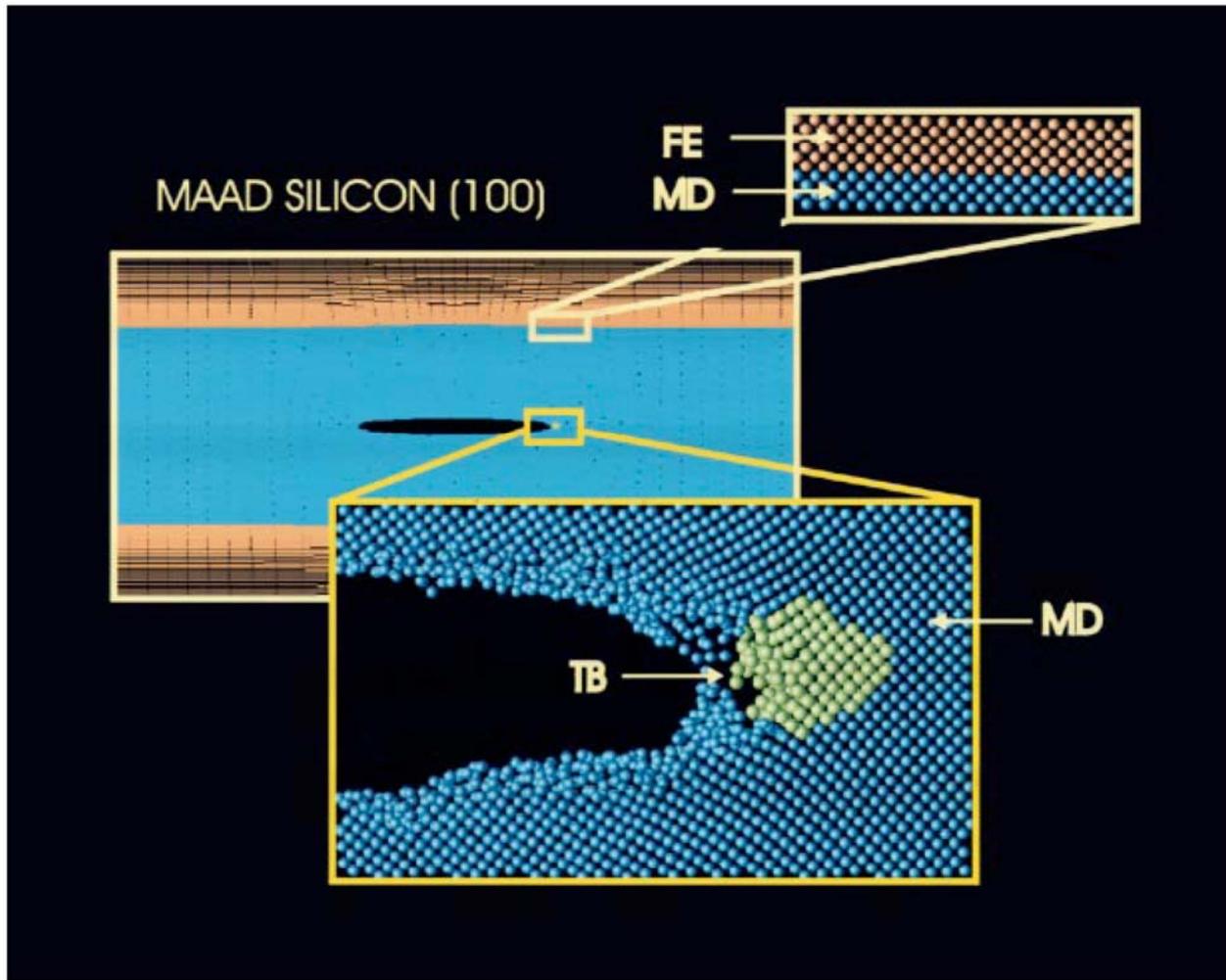


FIG. 6. (Color) The geometrical decomposition of the silicon slab into the five different dynamic regions of the simulation: the continuum finite-element region (FE); the atomistic molecular-dynamics region (MD); the quantum tight-binding region (TB); the FE-MD “handshaking” region; and the MD-TB “handshaking” region. The image is the simulated silicon slab, with expanded views of the FE-MD (orange nodes-blue atoms) interface and the TB (yellow atoms) region surrounded by MD (blue) atoms. Note that the TB region surrounds the crack tip with broken-bond MD atoms trailing behind this region. The acronym, MAAD, implies “macroatomistic *ab initio* dynamics.”

Broughton, J. et al., Phys. Rev. B, 60(1999), 2391.

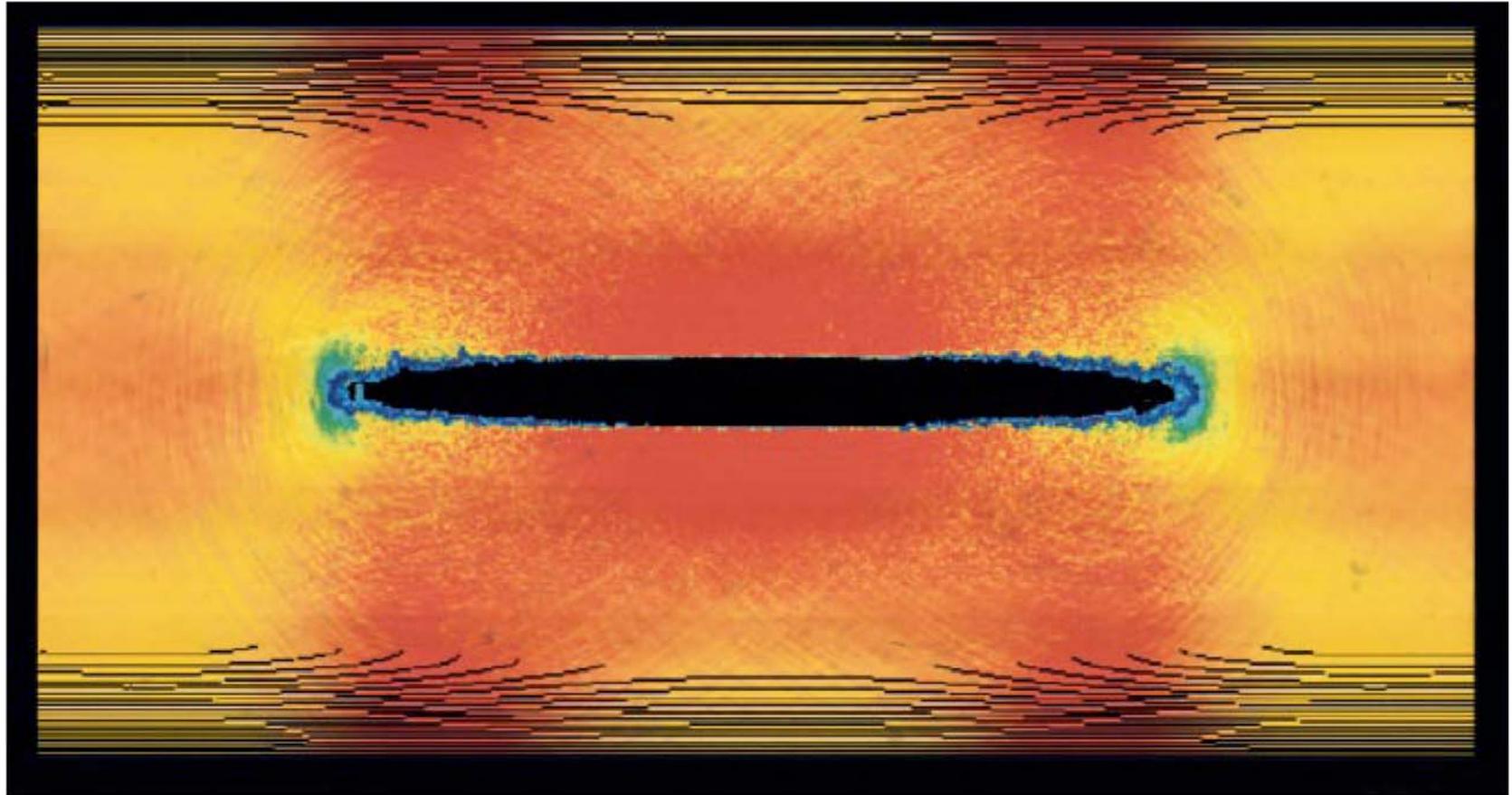


FIG. 8. (Color) Stress waves propagating through the slab using a finely tuned potential energy color scale at a point in time after the asymptotic crack speed has been achieved. Blue represents high stress; red represents low stress. Yellow is intermediate.

Broughton, J. et al., Phys. Rev. B, 60(1999), 2391.

非圧縮粘性流体

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\nabla P + \nu \Delta \mathbf{U}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0$$

レイノルズ数

$$R \equiv \frac{T_V}{T_A} = \frac{(L^2/\nu)}{(L/V)} = \frac{VL}{\nu}$$

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = \int \mathbf{U}(\mathbf{k}, t) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{k}$$

$$\nu \Delta \mathbf{U} = - \int \nu k^2 \mathbf{U}(\mathbf{k}, t) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{k}$$

平均と揺らぎ

$$F = \bar{F} + f \quad F = \bar{F} + f$$

$$\frac{D\bar{U}}{Dt} = -\nabla\bar{P} + \nabla \cdot \bar{R} + \nu\Delta\bar{U}$$

$$\nabla \cdot \bar{U} = 0$$

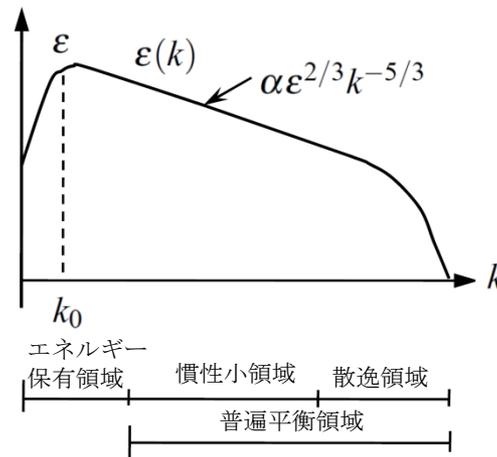
$$R_{ij} = -\overline{u_i u_j}$$

$$\begin{aligned} \frac{DR_{ij}}{Dt} = & -R_{ik} \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_k} - R_{jk} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} \\ & - \phi_{ij} + \epsilon_{ij} - \frac{\partial T_{ijk}}{\partial x_k} + \nu\Delta R_{ij} \end{aligned}$$

$$K = \frac{\overline{u^2}}{2} \left(= -\frac{1}{2} R_{ii} \right)$$

$$K = \int E(k) dk$$

$$E(k) = K_0 \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$$



乱流エネルギーのパワースペクトル

スケール

連続体

固体

流体

気体

液体

Eulerian equations

Lagrangian equations

情報・文献

国立国会図書館

航空宇宙文献

NASA レポート

AIAA Paper

ASME Paper

昭和55年(1980)10月～昭和58年(1983)9月

日本機械学会

流体工学における電算機利用に
関する調査研究分科会

航空宇宙技術研究所

Web of Science

電子ジャーナル

まとめ

謝辭