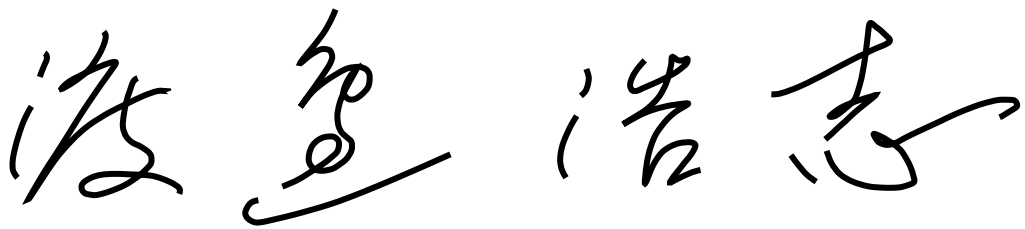
NEDO特別講座
先進複合材料の製造における
高度デジタル人材育成に関する特別講座
第４回　有限変形理論の枠組みと超弾性体の基礎

HUMAN 3S & TECHNOLOGY
TECHSPIRE



渡邉 浩志（株式会社テクスパイア）

 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

内容

０．はじめに

１．ひずみ

２．応力

３．コーシーの第１運動法則

４．仮想仕事の原理

５．非線形方程式の解法

６．超弾性体の基礎

 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN 3S & TECHNOLOGY
TECHSPIRE

（参考）基底ベクトルは $\boldsymbol{e_i}(i = 1,2,3)$ と表記するか、$\boldsymbol{i, j, k}$ と表記するか

- 流儀によって基底ベクトルを$\boldsymbol{e_i}(i = 1,2,3)$ あるいは$\boldsymbol{i, j, k}$ と表記する
- ベクトル解析という学問体系が整備される以前、ハミルトンは四元数を発見した。(1843)
- 虚数単位 $\boldsymbol{i}$ を導入すると、複素平面を用いて2次元のベクトルを表すことができる。これを3次元に拡張する
- 虚数単位を拡張して以下の演算則を満たす$\boldsymbol{i, j, k}$ を導入する。

$$\boldsymbol{i^2 = j^2 = k^2 = -1}$$
$$\boldsymbol{ij = -ji = k}$$
$$\boldsymbol{jk = -kj = i}$$
$$\boldsymbol{ki = -ik = j}$$

- 四元数 $\alpha = w + x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$
  - wをスカラー、 $x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$をベクトルと呼ぶ
- ベクトル α, α' の積を計算する

$$\alpha = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, \alpha' = x'\boldsymbol{i} + y'\boldsymbol{j} + z'\boldsymbol{k}$$

- スカラーの部分は現代の内積（ただし逆符号）、ベクトルの部分は外積になっている。

$$\alpha\alpha' = -(xx' + yy' + zz')$$
$$+(yz' - zy')\boldsymbol{i} + (zx' - xz')\boldsymbol{j} + (xy' - yx)\boldsymbol{k}$$

- ベクトルの基底を$\boldsymbol{i, j, k}$ と表記するのは、この流れ
- 四元数をギブスが整理してベクトル解析を作り出す
- ギブスの講義録を後にウィルソンがまとめたものが、最初の書籍Vector Analysis (1901) で、その後の物理・工学教育に大きな影響を与える。3次元空間を扱うのが特徴
- これとは別に、19世紀後半に行列、線形写像、線形空間が体系化され、任意の次元を扱うため$\boldsymbol{e_i}$が一般化した。
- この表記法の起源はグラスマンと考えられている。成分表示や基底変換についても言及している。(1877)
- テンソル解析はこの流れ。
- 力学では事実上3次元空間しか扱わないので、基底は3個あればよく、 $\boldsymbol{e_i}(i = 1,2,3)$と表記するようになった。

 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN 3S & TECHNOLOGY TECHSPIRE

（参考）ベクトルをボールド（太文字）フォントで表記するのは？

- ギブスの講義録を後にウィルソンがまとめたものが、最初の書籍Vector Analysis (1901)
  - ベクトルをボールド体で表記
  - 物理学分野に影響力が高く、定着した。
  - 純粋な数学だと通常のフォントが一般的
- ベクトル・テンソルを成分（指標）で表す方法は座標系を指定する必要がある。
- 連続体解析学をまとめたトゥルーズデルは、物理現象は座標系によらない、つまり座標系を導入して成分で表示する必要はない、ということを強調する意味で、絶対表記という用語を使用している。

memo

ベクトルのさまざまな表記法を以下に示す．$\boldsymbol{a}$ は絶対表記（ベクトル表記），$a_i\boldsymbol{e}_i$ は指標表記とよばれる．基底が標準的な x, y, z 軸で，かつ変化しない場合，基底の表記を省略して成分のみを書いたり，計算が簡単になることから数ベクトル表記を使ったりする場合もある．

絶対表記（ベクトル表記）	指標表記	数ベクトル表記
$\boldsymbol{a}$	$a_i\boldsymbol{e}_i$	$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$

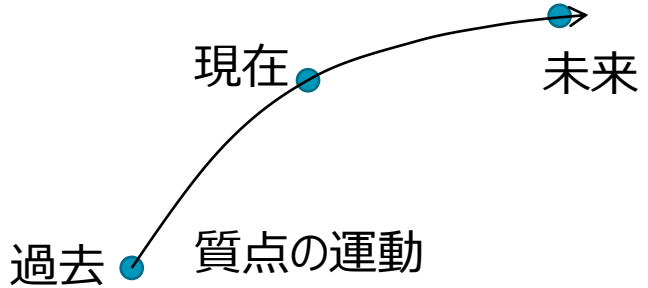
| Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

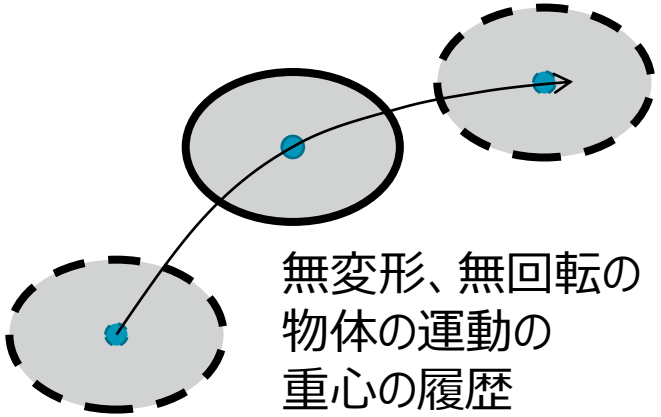
高校で習った物理と、現実世界の違い
「場」とは？

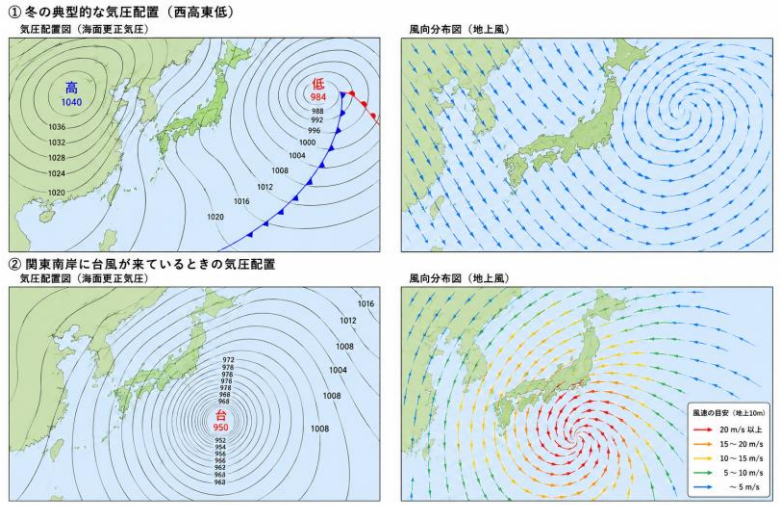
- 高校で習った物理は、質点の力学。物理法則は　　$F = ma$
- 質点とは、大きさ 0、質量だけある。つまり、密度は無限大？
- では、なぜこれでよいのか？　→　適用範囲を間違わなければ、極めて良い「近似」になっている。
- 空間的に物理量が分布していることを考えるとき、「場」と表現することが多い。
- 気圧配置図は、気圧というスカラー量が空間的に分布している様子を等高線で表したもの。質点は空間分布しない
- 等高線ということは、値そのものに加えて、傾き（空間的な勾配）も重要になる。
- 圧力Pはスカラーだが、勾配はベクトル量（風向きのようなもの）

$$\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}$$

- 勾配をさらに微分すると基礎式が得られる。つまり2階の微分方程式が基礎式
- 固体の場合は、変位の1階微分がひずみ、ひずみにヤング率をかけると応力、応力を微分するとコーシーの第1運動法則が得られる。
- このコーシーの第1運動法則を計算機で解く方法の一つが有限要素法







| Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

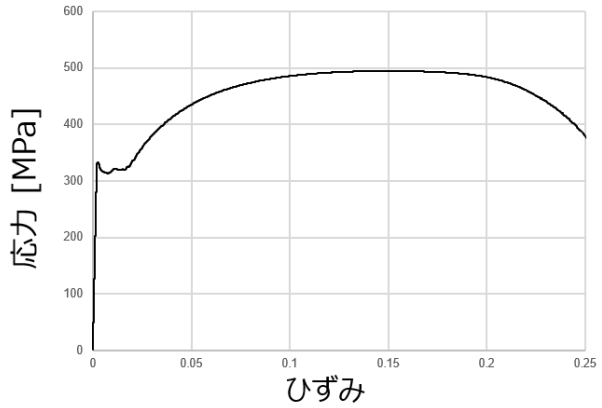
非線形有限要素法とは何か？

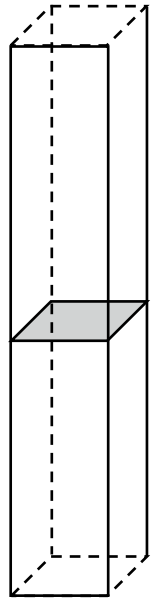
- 線形有限要素法などの線形解析は、外力や強制変位などの荷重が2倍になると評価点に作用する応力も2倍になる。

$$[K]\{u\} = \{f\}$$

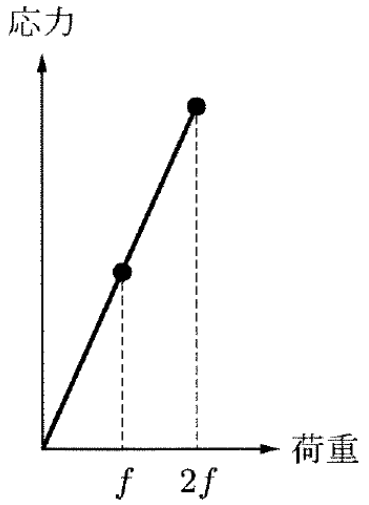
  - $[K]$：剛性マトリックス
  - $\{u\}$：節点変位ベクトル
  - $\{f\}$：節点力ベクトル
- 非線形有限要素法では、荷重が2倍になっても、評価点の応力は必ずしも2倍にはならない。このような場合には与える荷重を少しずつ増やしながら段階的に解いていく必要がある。



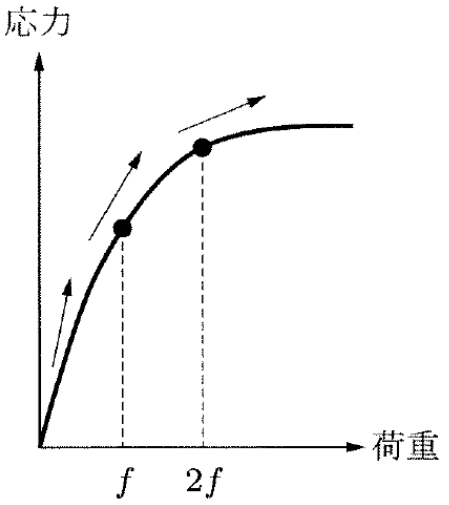




1[ton]
≒10000 [N]



（a）線形有限要素法



（b）非線形有限要素法

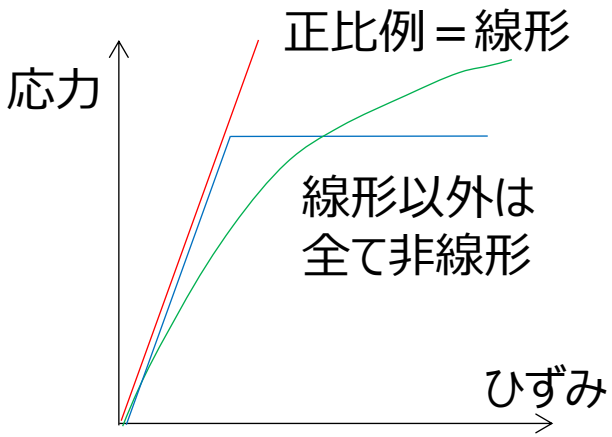
図 0.1　線形有限要素法と非線形有限要素法

1cm角の鉄の棒に車1台 (1ton)
ヤング率 200GPa
$1cm^2 = 10^{-4}\ m^2$
$100\ MPa = 100\ N/mm^2$
棒ののびは 100MPa/200GPa*1000mm
=0.5mm（かなり丈夫に感じる）
その一方で100度温度を上げると、1mm伸びる

応力：単位面積当たりの荷重
ひずみ：単位長さ当たりののび
左：横軸がひずみ（変位）→よく見かける
上：横軸が荷重→不自然に感じる？

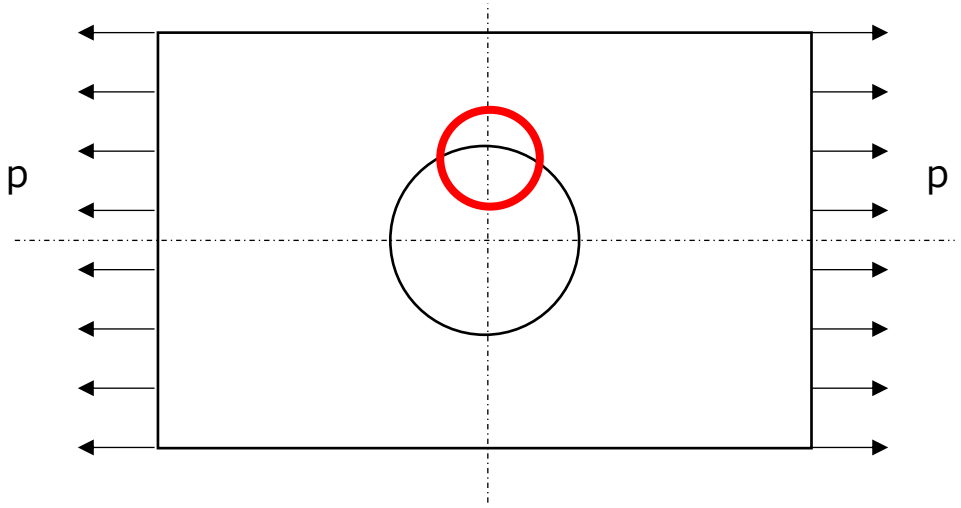
Techspire All Rights Reserved.

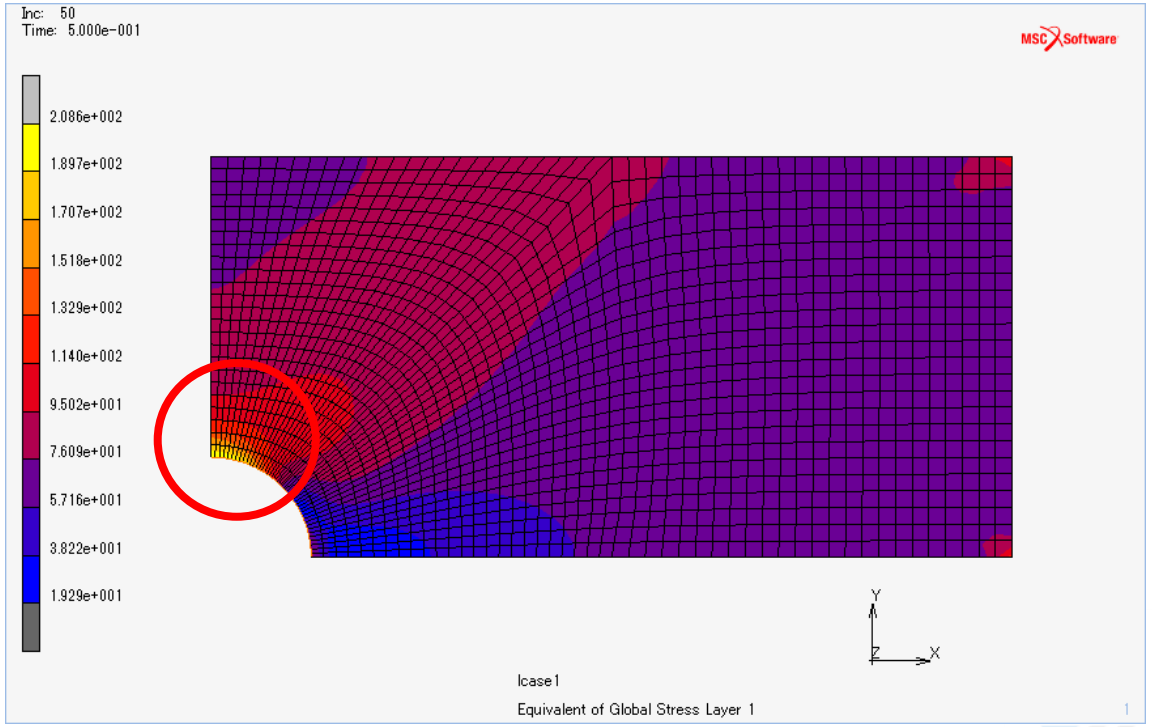
応力集中部で降伏すると、応力は頭打ちになる





- 円孔平板の応力集中解析
  - 線形解析
    - 荷重pを2倍にすると、応力集中部の応力は2倍
  - 弾塑性解析（非線形解析）
    - 降伏した個所は、応力は一定値（降伏応力）になる。
    - つまり、荷重を2倍にしても、応力集中部の応力は一定





 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

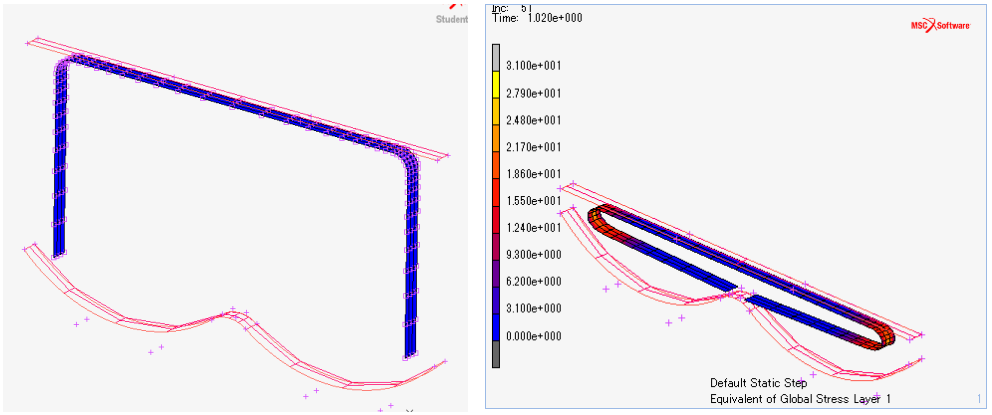
HUMAN 3S & TECHNOLOGY
TECHSPIRE

非線形有限要素法には、三つの非線形性がある

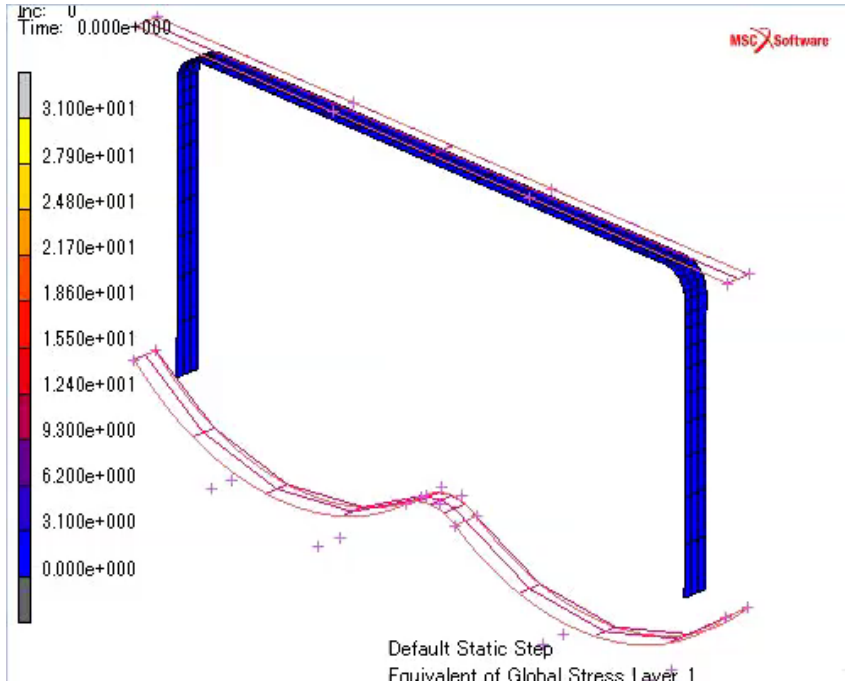
- 現象としてわかりやすい順に、以下の三つの非線形性があります。

1. 材料非線形
2. 境界条件非線形（接触）
3. 幾何学非線形

- すべてを考慮すると、リアリティのある解析ができます。
  逆に何かが欠けると、リアリティのない解析になる場合もあります。



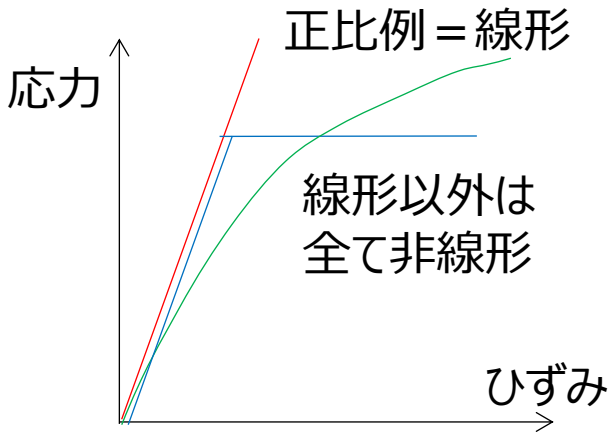
非線形の考慮＝
リアリティがある



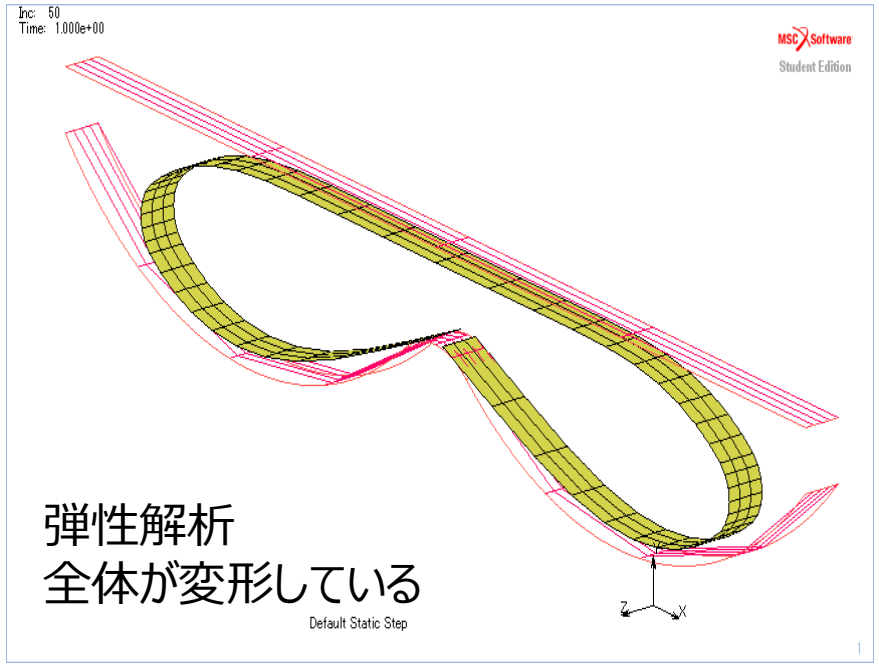
 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

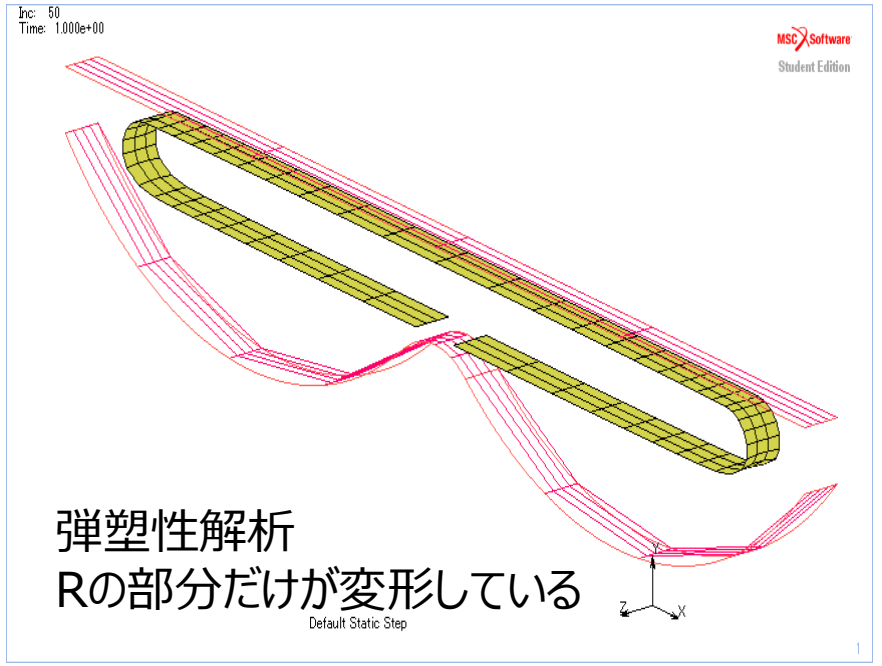
TECHSPIRE HUMAN 3S & TECHNOLOGY

弾塑性と弾性の比較



- 材料非線形　：　金属が降伏する、ゴムの非線形挙動など
- 左の図、弾塑性を考慮すると普通のホチキスの針に見えますが、
  降伏しないと金属に見えません。

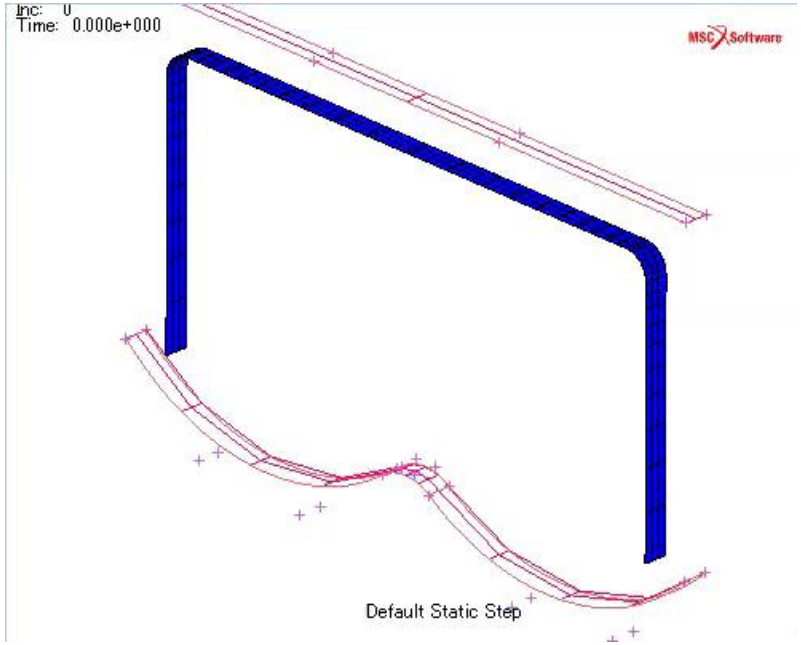




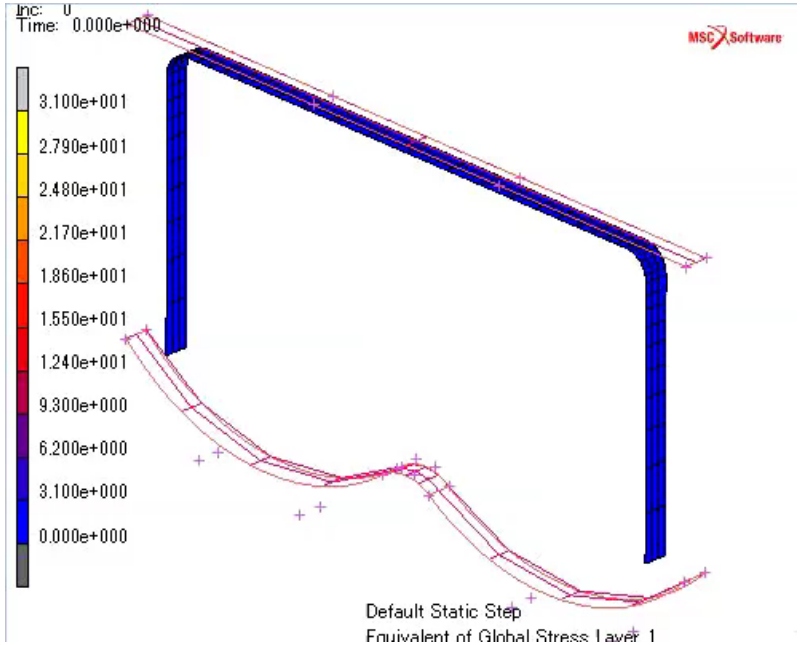
| Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

接触解析

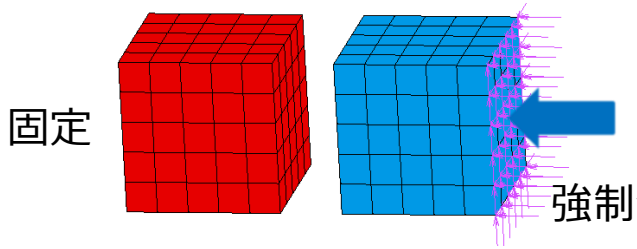
- この解析では、ドライバーが針をすり抜けてしまって、なにも起こりません。
- 接触解析は、プログラム内部では、特殊な処理を必要とします。そのための設定をする必要があります。

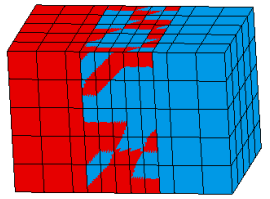


接触なし

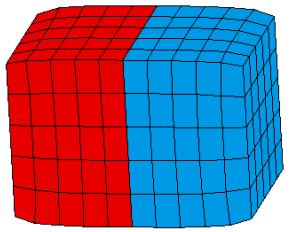


接触あり





接触の設定をしないとすり抜けるが、
強制変位2倍で右の物体の変位量は2倍
⇒線形解析



接触すると変位量は制限を受ける⇒非線形

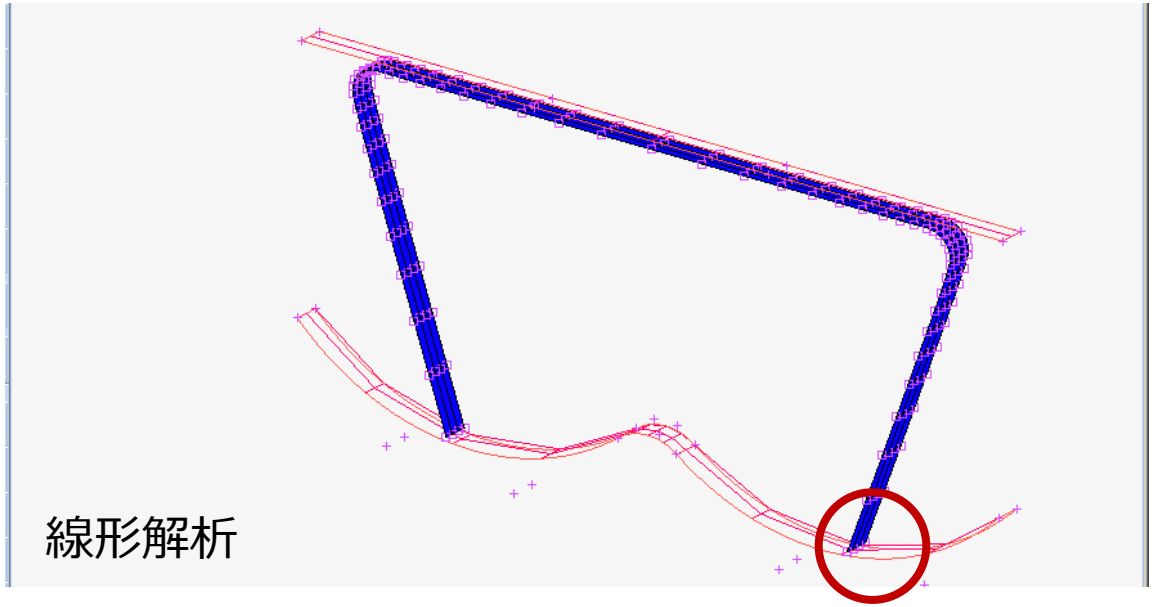
 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

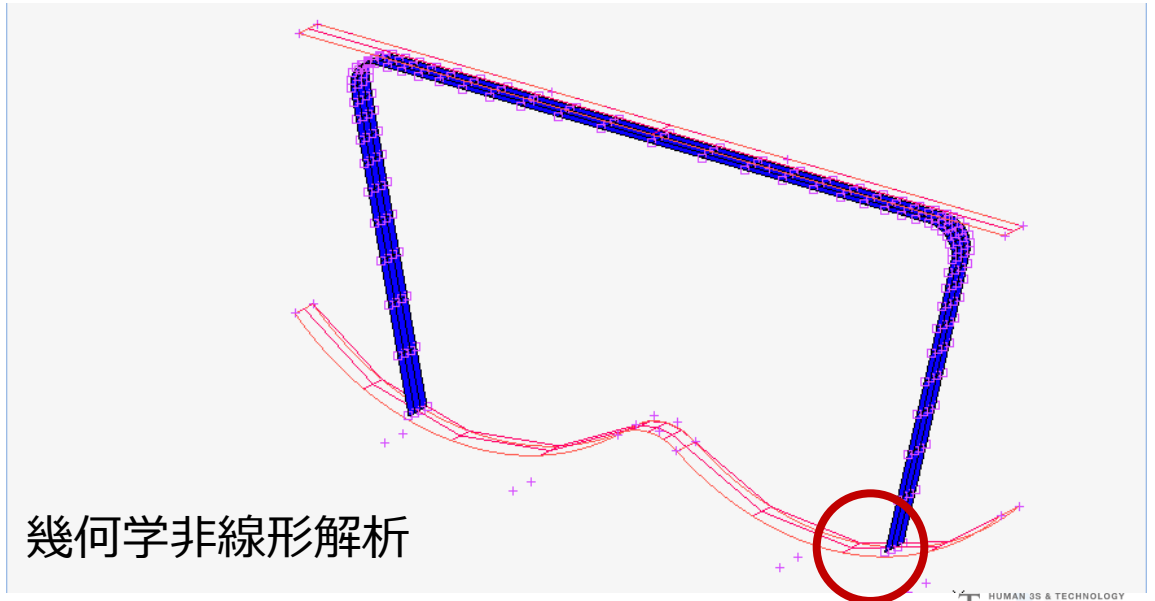
解析ができない理由は幾何学的非線形性

- 三つの非線形性の中で、最も直感的な理解が難しい
- しかし、考慮しないとリアリティのある解析ができない場合も多いことも事実
- この例題では、線形解析は、途中から解析が進まなくなるが、幾何学非線形を考慮すると、最後まで解析が進む

- 線形解析で解析が進まなくなった時点での変形図を示す。

- ホチキスの針の先端に着目すると、ホチキスの針の回転に伴ってホチキスの針が伸びていることがわかる。



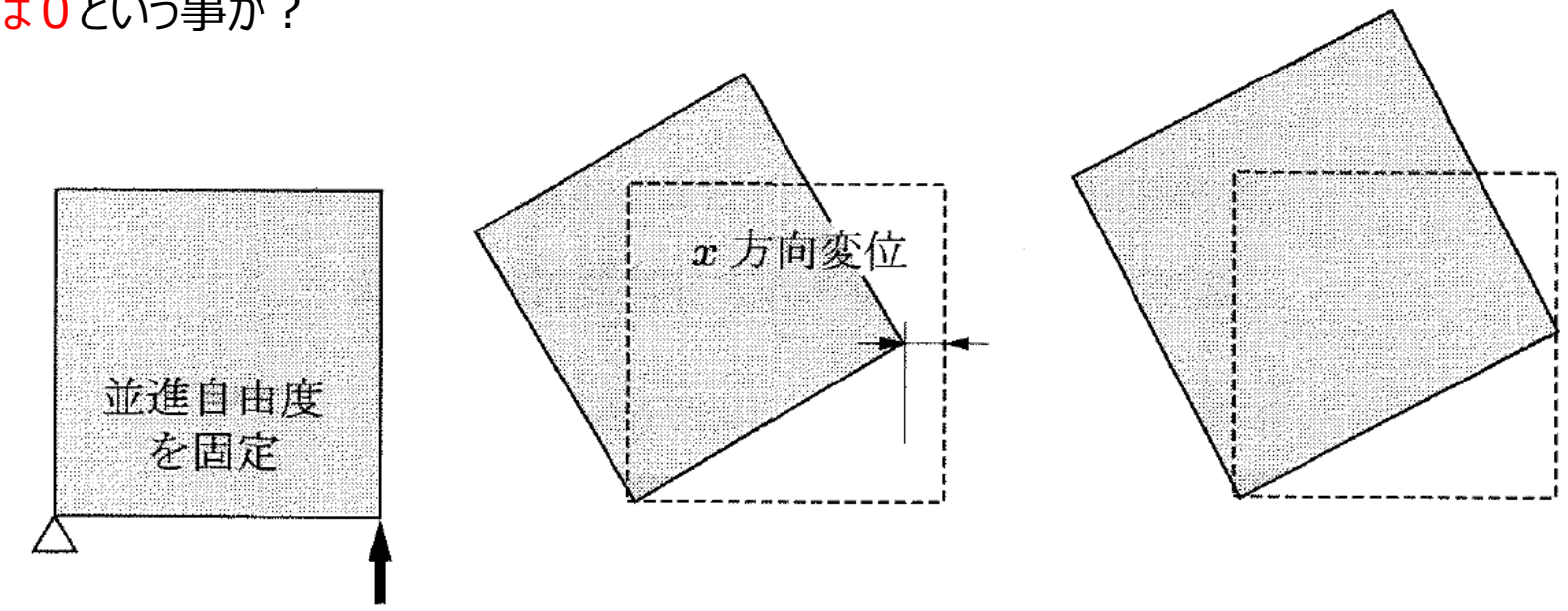


 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

有限変形（幾何学非線形性）を考慮した補足解析例

- 辺が１の立方体の原点を固定して、回転させると、どうなるか
- 常識の範囲で、期待する変形は、剛体回転のみ、応力は０
- Y方向の強制変位を与えた点は、Y方向の変位は生じるが、X向の変位が生じていない。
- 線形解析では、膨張しているが、ひずみは０という事か？

- 線形解析
  - 設計における剛性解析
  - 固有値解析
  - 周波数応答解析
  - 実は、材料力学も線形解析
- これらの信頼性が失われたのではなく、適用範囲を明確にする必要がある、ということ



（a）解析条件　（b）幾何学的非線形解析　（c）線形解析

図 0.3　正方形の回転の線形解析と幾何学的非線形解析での取り扱いの違い

 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved

有限変形理論の枠組み

内容

- ひずみは、並進・回転に依存しない変形の尺度。
  - 微小ひずみ、即ち線形のひずみだと、回転で前述のように膨張するという問題を生じる。
  - これを解決するために、有限な回転をしても値を生じない グリーン・ラグランジュひずみ、アルマンジひずみを導入する。
- 応力テンソル (コーシー応力テンソル) は、法線方向を応力ベクトルに変換するテンソル
- コーシー応力テンソルを使って、連続体解析学の基礎式コーシーの第1運動法則を導くが、非線形性が強すぎて扱いづらい。
  - 現配置x_iでの微分を変形前配置X_iでの微分に書き換えると、第1ピオラ・キルヒホッフ応力が導かれる。
  - 第1ピオラ・キルヒホッフ応力は非対称なので、対称にしたものが第2ピオラ・キルヒホッフ応力
- 有限要素法は コーシーの第1運動法則を弱形式に変換してから近似解法で解くもの。
  - コーシー応力で記述された コーシーの第1運動法則を解くものを、アップデイティッドラグランジュ法
  - 第2ピオラ・キルヒホッフ応力で記述されたコーシーの第1運動法則を解くものを、トータルラグランジュ法
  - 従って、どちらも数学的には等価。ただし、汎用コードでは内部で異なる定式化を用いる場合があり、別物と考えた方がよい。
- トータルラグランジュでも アップデイティッドラグランジュ でも、非線形方程式である
  - ニュートン・ラフソン法を用いて非線形方程式を解くと、線形有限要素法の自然な拡張になっている。ただし反復計算が必要。⇒収束しないことがある
  - 剛性マトリックス ⇒ 接線剛性マトリックス
- 以上の定式化を1次元の棒で考えてみる。

 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN DS & TECHNOLOGY TECHSPIRE

内容

０．はじめに

１．ひずみ

２．応力

３．コーシーの第１運動法則

４．仮想仕事の原理

５．非線形方程式の解法

６．超弾性体の基礎

 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN 3S & TECHNOLOGY
TECHSPIRE

Part1 ひずみ

内容

- ひずみは、並進・回転に依存しない変形の尺度。
  - 微小ひずみ、即ち線形のひずみだと、回転で前述のように膨張するという問題を生じる。
  - これを解決するために、有限な回転をしても値を生じない グリーン・ラグランジュひずみ、アルマンジひずみを導入する。
- 応力テンソル (コーシー応力テンソル) は、法線方向を応力ベクトルに変換するテンソル
- コーシー応力テンソルを使って、連続体解析学の基礎式コーシーの第1運動法則を導くが、非線形性が強すぎて扱いづらい。
  - 現配置x_iでの微分を変形前配置X_iでの微分に書き換えると、第1ピオラ・キルヒホッフ応力が導かれる。
  - 第1ピオラ・キルヒホッフ応力は非対称なので、対称にしたものが第2ピオラ・キルヒホッフ応力
- 有限要素法は コーシーの第1運動法則を弱形式に変換してから近似解法で解くもの。
  - コーシー応力で記述された コーシーの第1運動法則を解くものを、アップデイティッドラグランジュ法
  - 第2ピオラ・キルヒホッフ応力で記述されたコーシーの第1運動法則を解くものを、トータルラグランジュ法
  - 従って、どちらも数学的には等価。ただし、汎用コードでは内部で異なる定式化を用いる場合があり、別物と考えた方がよい。
- トータルラグランジュでも アップデイティッドラグランジュ でも、非線形方程式である
  - ニュートン・ラフソン法を用いて非線形方程式を解くと、線形有限要素法の自然な拡張になっている。ただし反復計算が必要。⇒収束しないことがある
  - 剛性マトリックス ⇒ 接線剛性マトリックス
- 以上の定式化を1次元の棒で考えてみる。

 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN 3S & TECHNOLOGY TECHSPIRE

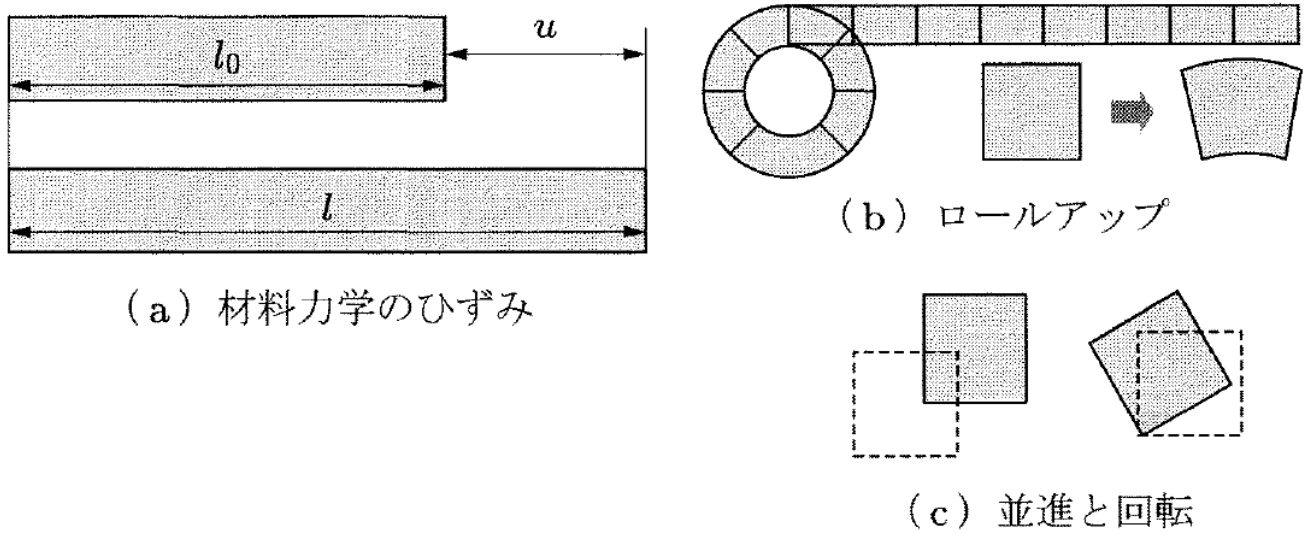
Part1 ひずみ

物体の本質的な変形の尺度とは

- 1次元のひずみは単位長さあたりの、のび

$$\varepsilon = \frac{u}{L_0} = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{L}{L_0} - 1$$

- 変位とのびは、同じものか？
- 先端に曲げモーメントをかけて巻き上げるとき、
  変位が大きい先端が壊れるわけではない。
- 変位は物体の本質的な変形の尺度ではない。
- 局所的には、正方形が扇形に変形
- 正方形が形を変えずに平行移動する並進変位と、
  回転は変位が大きくなる場合があるが、
  本質的には、変形は生じていない。
- 並進と回転に影響されない、
  即ち、変位が純粋に並進と回転の場合は、
  0になるような量を導入する。これがひずみである。



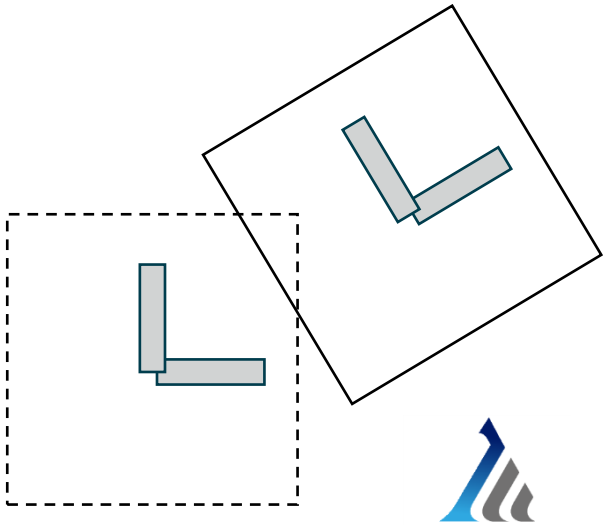
（a）材料力学のひずみ

（b）ロールアップ

（c）並進と回転

図 2.1　ひずみの要件

正方形の物体にひずみゲージを貼り付け、並進と回転変位を与えても、ひずみの値は0のままのはず
これを表すことができる数式を作りたい



 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

TECHSPIRE HUMAN 3S & TECHNOLOGY

Part1 ひずみ

並進と回転の場合に０になる量

- 材料力学で導入された垂直ひずみは単位長さあたりの伸び。
- これは並進変位の影響を受けないので妥当だが、回転は定義できない
- そこで、2点$\boldsymbol{X}$と$\boldsymbol{X}'$の間の距離の変化を考えてみることにする。
- 具体的には、変形前後の微小ベクトルの内積 $d\boldsymbol{X}\cdot d\boldsymbol{X}$と$d\boldsymbol{x}\cdot d\boldsymbol{x}$の関係を考える。
- 数学的な取り扱いを合理的にするために、テンソルを導入する。

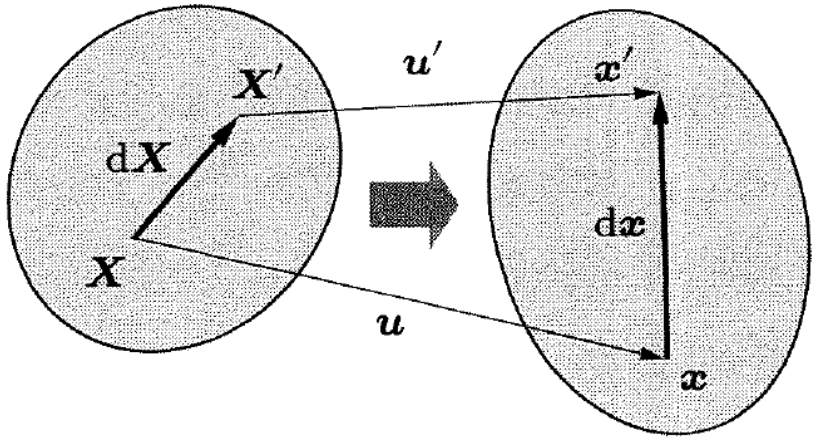


図 2.2　変形前後の微小ベクトル

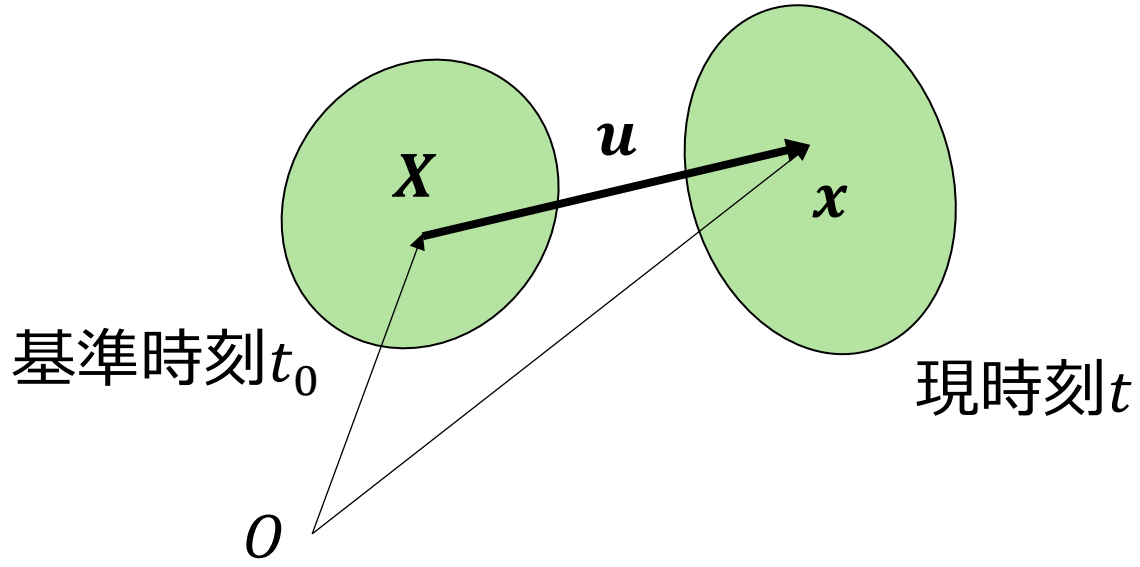
 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

Part1 ひずみ
変位の定義

- 変位の厳密に定義を示す
- ある基準時刻t_0における物体の配置を基準配置として、各物質点の位置ベクトルをX、物質点Xの現時刻tにおける位置ベクトルをx、物質点Xの時刻t_0からtまでの移動量を変位ベクトル$\boldsymbol{u}$とする。

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}$$

- 連続体力学の教科書では、決まってこのように変位を定義しているか、これはこれで分かりにくいので、具体的な例題で示そう



 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN 3S & TECHNOLOGY
TECHSPIRE

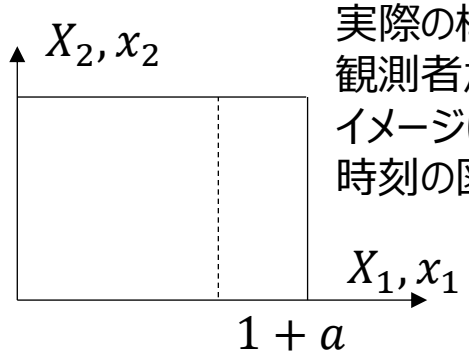
Part1 ひずみ
単純引張の変位（ラグランジュ表記法）

- 図のように、一辺の長さが 1 の正方形領域に X_1 方向の単純引っ張りを与え、X_1 方向の長さが $1+a$ になったとする。
- このとき各物質点 (X_1, X_2) の現在の位置(x_1, x_2) と変位 u_1, u_2 は以下のようにあらわせる。

$$x_1 = X_1 + aX_1$$
$$x_2 = X_2$$
$$u_1 = x_1 - X_1 = aX_1$$
$$u_2 = x_2 - X_2 = 0$$

- この関係を図示すると、それぞれ右図のようになる。

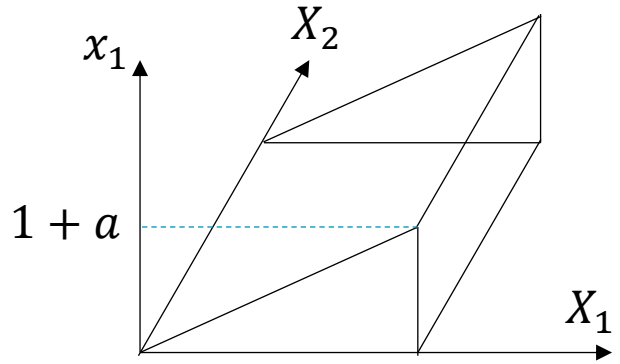
- これは、x_1, x_2 と u_1, u_2 はX_1, X_2 の通常の意味での関数になっていることがわかる

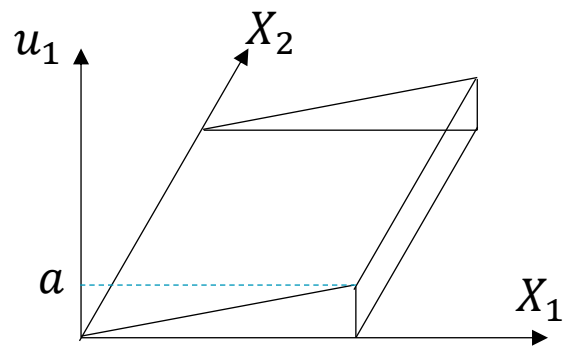


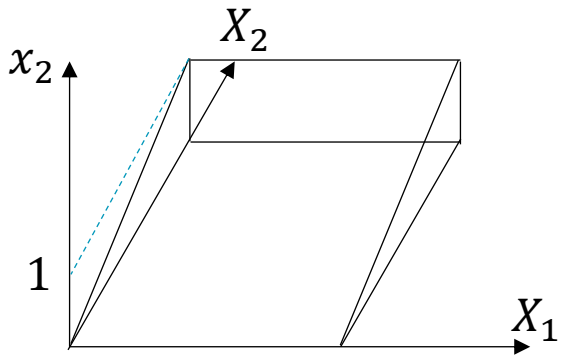
オイラー表記法的変形図
実際の構造物の変形を観測者が、観測しているイメージに近いが、異なる時刻の図を重ねている

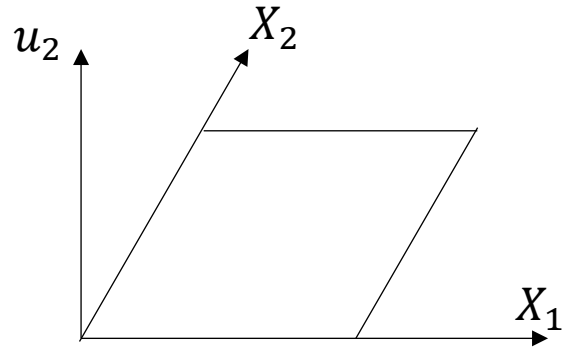
$$x_1 = x_1(X_1, X_2)$$
$$x_2 = x_2(X_1, X_2)$$

$$u_1 = u_1(X_1, X_2)$$
$$u_2 = u_2(X_1, X_2)$$









 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

Part1 ひずみ
2点間の距離

- $\boldsymbol{X}$と$\boldsymbol{X}'$の2点といっても近接しているとする。すなわち
$$\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{X} + d\boldsymbol{X}$$
- それぞれの点の現在の位置は以下のようにあらわすことができる。
$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{X})$$
$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{X}' + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}') = \boldsymbol{X} + d\boldsymbol{X} + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{X} + d\boldsymbol{X})$$
$$\approx \boldsymbol{X} + d\boldsymbol{X} + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}) + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial X_j} dX_j$$
- 従って変形後の微小ベクトル$d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}$は
$$d\boldsymbol{x} = d\boldsymbol{X} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial X_j} dX_j$$
$$\begin{Bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{Bmatrix}$$

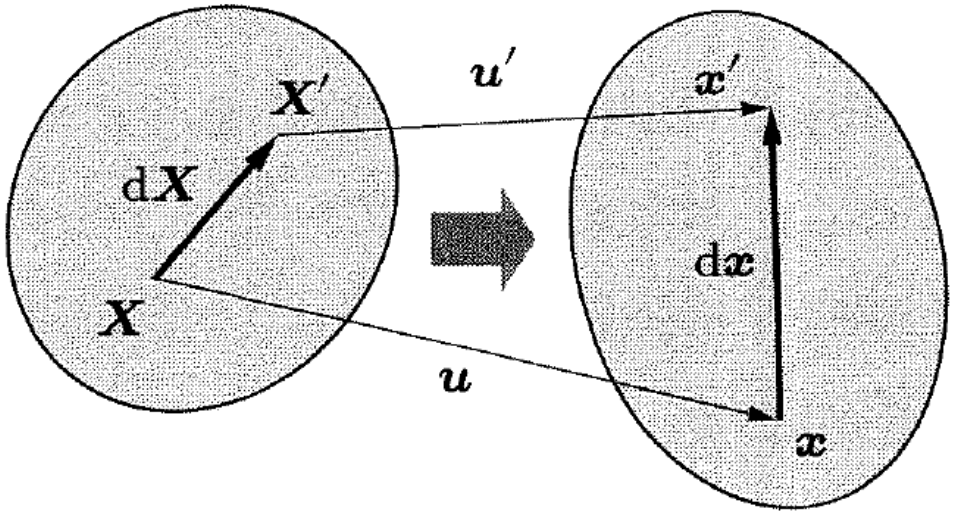


図 2.2　変形前後の微小ベクトル

$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{X})$と関数で表現したら、
$\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u}'(\boldsymbol{X}')$ではなくて

$$\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}')$$

 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

Part1 ひずみ
2点間の距離とひずみ

- 変形後の2点間の距離は

$$d\boldsymbol{x}\cdot d\boldsymbol{x} = dx_i dx_i = \left(dX_i + \frac{\partial u_i}{\partial X_j}dX_j\right)\left(dX_i + \frac{\partial u_i}{\partial X_k}dX_k\right)$$

$$= dX_i dX_i + \frac{\partial u_i}{\partial X_j}dX_j dX_i + \frac{\partial u_i}{\partial X_k}dX_k dX_i + \frac{\partial u_i}{\partial X_j}\frac{\partial u_i}{\partial X_k}dX_j dX_k$$

行列とは、
２次形式の表現方法

$$F(x,y) = ax^2 + 2hxy + by^2 = \{x \quad y\}\begin{bmatrix} a & h \\ h & b \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

- $\frac{\partial u_i}{\partial X_j}\frac{\partial u_i}{\partial X_k}$の項は２次の微小量なので無視すると（実はこの仮定は正しくありません。）

$$d\boldsymbol{x}\cdot d\boldsymbol{x} \approx dX_i dX_i + \frac{\partial u_i}{\partial X_j}dX_j dX_i + \frac{\partial u_i}{\partial X_k}dX_k dX_i$$

$$= d\boldsymbol{X}\cdot d\boldsymbol{X} + \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right)dX_i dX_j$$

- 微小ひずみテンソル ε_{ij} を定義すると、変形前後における２点間距離の変化は下式のようにあらわすことができる。

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right)$$

$$d\boldsymbol{x}\cdot d\boldsymbol{x} - d\boldsymbol{X}\cdot d\boldsymbol{X} \approx \boldsymbol{2}\varepsilon_{ij}\, dX_i dX_j$$

 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN 3S & TECHNOLOGY TECHSPIRE

Part1 ひずみ
回転の微小ひずみを計算する

- 頂点に与えた y 方向変位を a とすると回転角を θ として

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}},\ \sin\theta = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$$

- この変形は、θ回転して、原点を中心として$\sqrt{1+a^2}$だけ拡大、また$u_i = x_i - X_i$

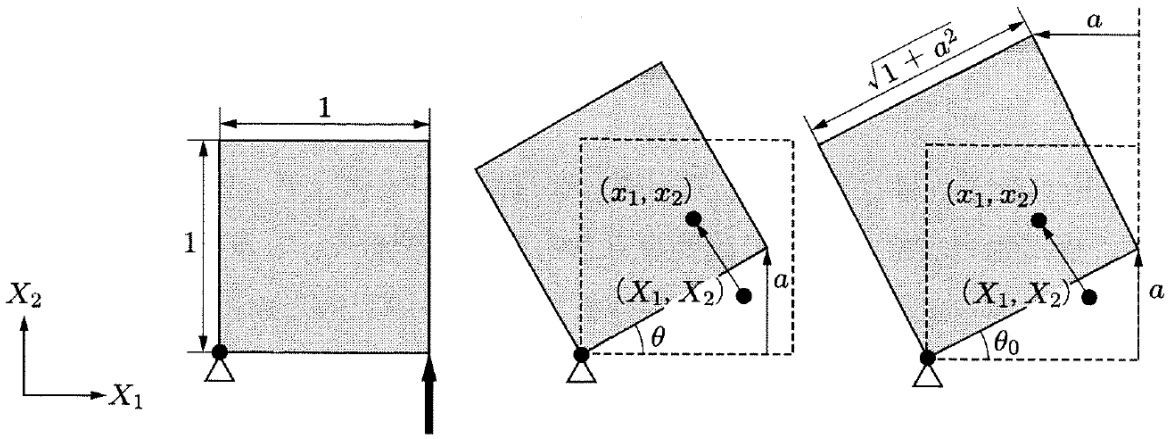
$$\begin{bmatrix} \sqrt{1+a^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{1+a^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix},\ \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -aX_2 \\ aX_1 \end{Bmatrix}$$

- ひずみを求めると、確かに 0 になっている。

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right) = 0, \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right) = 0$$

$$\varepsilon_{21} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_2}\right) = 0, \varepsilon_{22} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2}\right) = 0$$



（a）解析条件　（b）幾何学的非線形解析　（c）線形解析

図 2.3　回転の幾何学的非線形および線形解析

- 参考

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(-aX_2)}{\partial X_1} + \frac{\partial(-aX_2)}{\partial X_1}\right) = 0, \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(-aX_2)}{\partial X_2} + \frac{\partial(aX_1)}{\partial X_1}\right) = 0$$

$$\varepsilon_{21} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(aX_1)}{\partial X_1} + \frac{\partial(-aX_2)}{\partial X_2}\right) = 0, \varepsilon_{22} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(aX_1)}{\partial X_2} + \frac{\partial(aX_1)}{\partial X_2}\right) = 0$$

θが微小であれば、$\cos\theta = 1,\ \sin\theta = \theta$
このとき回転のマトリックスは

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & -\theta \\ \theta & 1 \end{bmatrix}$$

 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

Part1 ひずみ

内容

- ひずみは、並進・回転に依存しない変形の尺度。
  - 微小ひずみ、即ち線形のひずみだと、回転で前述のように膨張するという問題を生じる。
  - これを解決するために、有限な回転をしても値を生じない グリーン・ラグランジュひずみ、アルマンジひずみを導入する。
- 応力テンソル (コーシー応力テンソル) は、法線方向を応力ベクトルに変換するテンソル
- コーシー応力テンソルを使って、連続体解析学の基礎式コーシーの第1運動法則を導くが、非線形性が強すぎて扱いづらい。
  - 現配置x_iでの微分を変形前配置X_iでの微分に書き換えると、第1ピオラ・キルヒホッフ応力が導かれる。
  - 第1ピオラ・キルヒホッフ応力は非対称なので、対称にしたものが第2ピオラ・キルヒホッフ応力
- 有限要素法は コーシーの第1運動法則を弱形式に変換してから近似解法で解くもの。
  - コーシー応力で記述された コーシーの第1運動法則を解くものを、アップデイティッドラグランジュ法
  - 第2ピオラ・キルヒホッフ応力で記述されたコーシーの第1運動法則を解くものを、トータルラグランジュ法
  - 従って、どちらも数学的には等価。ただし、汎用コードでは内部で異なる定式化を用いる場合があり、別物と考えた方がよい。
- トータルラグランジュ でも アップデイティッドラグランジュ でも、非線形方程式である
  - ニュートン・ラフソン法を用いて非線形方程式を解くと、線形有限要素法の自然な拡張になっている。ただし反復計算が必要。⇒収束しないことがある
  - 剛性マトリックス ⇒ 接線剛性マトリックス
- 以上の定式化を1次元の棒で考えてみる。

 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN OS & TECHNOLOGY TECHSPIRE

Part1 ひずみ
2点間の距離～なにがいけなかったのか、見直す

- $\boldsymbol{X}$と$\boldsymbol{X}'$の2点といっても近接しているとする。すなわち

$$\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{X} + d\boldsymbol{X}$$

- それぞれの点の現在の位置は以下のようにあらわすことができる。

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{X})$$

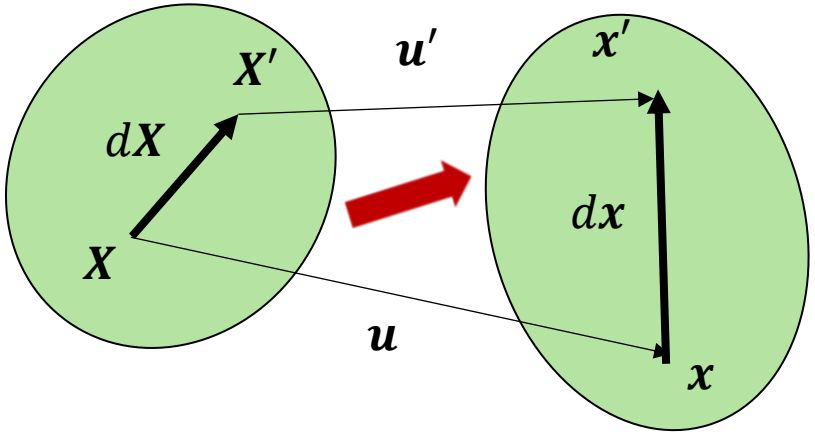
$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{X}' + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}') = \boldsymbol{X} + d\boldsymbol{X} + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{X} + d\boldsymbol{X})$$

$$\approx \boldsymbol{X} + d\boldsymbol{X} + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}) + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial X_j} dX_j$$

- 従って変形後の微小ベクトル$d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}$は

$$d\boldsymbol{x} = d\boldsymbol{X} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial X_j} dX_j$$

$$\begin{Bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{Bmatrix}$$



$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{X})$と関数で表現したら、
$\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u}'(\boldsymbol{X}')$ではなくて

$$\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}')$$

 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

Part1 ひずみ
グリーン・ラグランジュひずみの定義

行列とは、
２次形式の表現方法

$$F(x,y) = ax^2 + 2hxy + by^2 = \{x \quad y\}\begin{bmatrix} a & h \\ h & b \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

- 無視した$\frac{\partial u_i}{\partial X_j}\frac{\partial u_i}{\partial X_k}$の項を復活させる

$$d\boldsymbol{x}\cdot d\boldsymbol{x} = dx_i dx_i = \left(dX_i + \frac{\partial u_i}{\partial X_j}dX_j\right)\left(dX_i + \frac{\partial u_i}{\partial X_k}dX_k\right)$$

$$= dX_i dX_i + \frac{\partial u_i}{\partial X_j}dX_j dX_i + \frac{\partial u_i}{\partial X_k}dX_k dX_i + \frac{\partial u_i}{\partial X_j}\frac{\partial u_i}{\partial X_k}dX_j dX_k$$

- 計算がややこしくなるが、

$$d\boldsymbol{x}\cdot d\boldsymbol{x} = d\boldsymbol{X}\cdot d\boldsymbol{X} + \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\frac{\partial u_k}{\partial X_j}\right)dX_i dX_j$$

- 微小ひずみテンソル ε_{ij} に対応して グリーン・ラグランジュひずみを以下のように定義する。

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\frac{\partial u_k}{\partial X_j}\right)$$

- これを用いると

$$d\boldsymbol{x}\cdot d\boldsymbol{x} - d\boldsymbol{X}\cdot d\boldsymbol{X} = 2E_{ij}\,dX_i dX_j$$

微小ひずみ

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right)$$

 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN 3S & TECHNOLOGY TECHSPIRE

Part1 ひずみ
グリーン・ラグランジュひずみの成分

- グリーン・ラグランジュひずみの成分を書き下すと以下のようになる。

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\frac{\partial u_k}{\partial X_j}\right)$$

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_k}{\partial X_i}\frac{\partial u_k}{\partial X_j}\right)$$

$$E_{11} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1}\frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1}\frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1}\frac{\partial u_3}{\partial X_1}\right)$$

$$E_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1}\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1}\frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1}\frac{\partial u_3}{\partial X_2}\right)$$

$$\vdots$$

- 微小ひずみとは異なり、E_{ij}を求める際に変位u_iについては i, j 以外の成分もひずみの値に影響することがわかる。

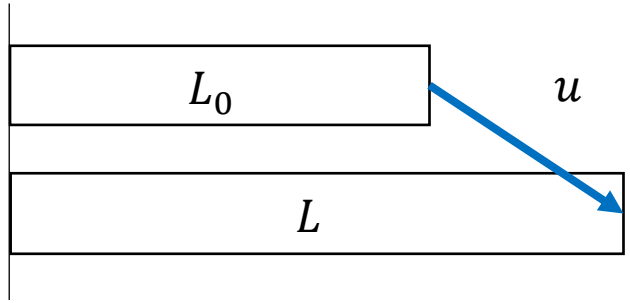
 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN 3S & TECHNOLOGY TECHSPIRE

Part1 ひずみ
1次元のグリーン・ラグランジュひずみ

- 1次元ののびは原点の取り方にもよるが、$X = L_0$の点が$x = L$に移動している。式で表すと、

$$x = \frac{L}{L_0}X, u = \left(\frac{L}{L_0} - 1\right)X$$



- グリーン・ラグランジュひずみを定義に基づき計算する

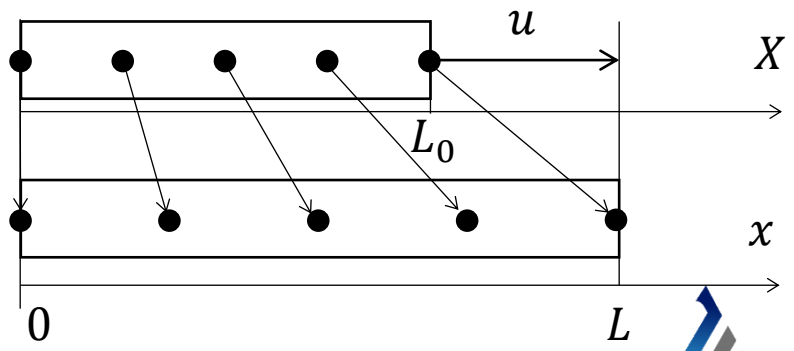
$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\frac{\partial u_k}{\partial X_j}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1}\frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1}\frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1}\frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1}\frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{2\left(\frac{L}{L_0} - 1\right) + \left(\frac{L}{L_0} - 1\right)^2\right\} = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{L}{L_0}\right)^2 - 1\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{u + L_0}{L_0}\right)^2 - 1\right\} = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{u^2 + 2uL_0 + {L_0}^2}{{L_0}^2} - 1\right)\right\} \approx \frac{u}{L_0}$$



 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

Part1 ひずみ
純粋な回転の、グリーン・ラグランジュひずみ

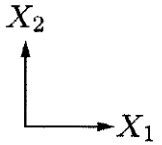
- 頂点に与えた y 方向変位を a とすると回転角を θ として

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}},\ \sin\theta = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$$

- この変形は、θ回転するだけ

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1(\cos\theta - 1) - X_2\sin\theta \\ X_1\sin\theta + X_2(\cos\theta - 1) \end{Bmatrix}$$



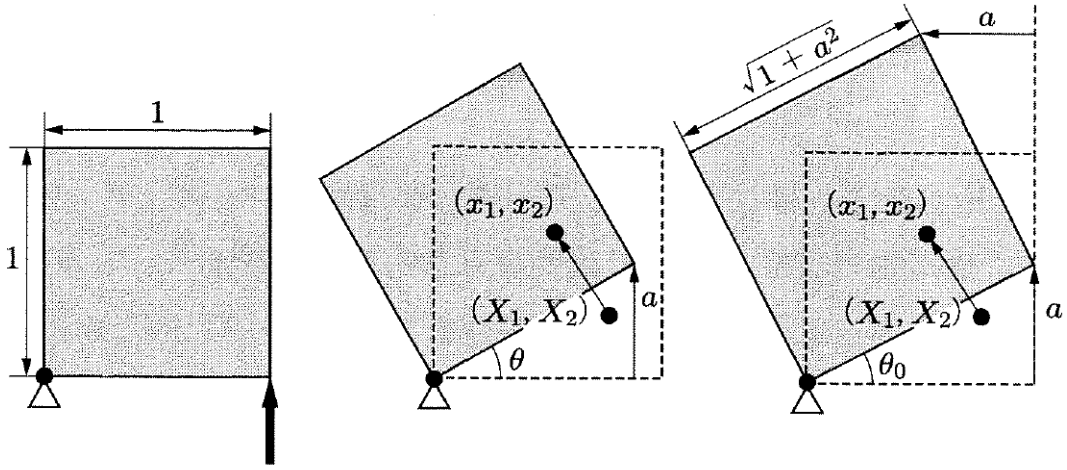
- この変形であればひずみは 0 になる。

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\frac{\partial u_k}{\partial X_j}\right) = 0$$

- 膨張する変形では 0 にならない。

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix},\ \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -aX_2 \\ aX_1 \end{Bmatrix}$$

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\frac{\partial u_k}{\partial X_j}\right) \neq 0$$



（a）解析条件　（b）幾何学的非線形解析　（c）線形解析

図 2.3　回転の幾何学的非線形および線形解析

θが微小であれば、$\cos\theta = 1,\ \sin\theta = \theta$
このとき回転のマトリックスは

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & -\theta \\ \theta & 1 \end{bmatrix}$$

 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

TECHSPIRE HUMAN 3S & TECHNOLOGY

Part1 ひずみ
（参考）実際の計算

- 代入して計算すると、非零になる。

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -aX_2 \\ aX_1 \end{Bmatrix}$$

$$E_{11} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(-aX_2)}{\partial X_1} + \frac{\partial(-aX_2)}{\partial X_1} + \frac{\partial(-aX_2)}{\partial X_1}\frac{\partial(-aX_2)}{\partial X_1} + \frac{\partial(aX_1)}{\partial X_1}\frac{\partial(aX_1)}{\partial X_1}\right) = a^2/2$$

$$E_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(-aX_2)}{\partial X_2} + \frac{\partial(aX_1)}{\partial X_1} + \frac{\partial(-aX_2)}{\partial X_1}\frac{\partial(-aX_2)}{\partial X_2} + \frac{\partial(aX_1)}{\partial X_1}\frac{\partial(aX_1)}{\partial X_2}\right) = 0$$

$$E_{21} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(aX_1)}{\partial X_1} + \frac{\partial(-aX_2)}{\partial X_2} + \frac{\partial(-aX_2)}{\partial X_2}\frac{\partial(-aX_2)}{\partial X_1} + \frac{\partial(aX_1)}{\partial X_2}\frac{\partial(aX_1)}{\partial X_1}\right) = 0$$

$$E_{22} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(aX_1)}{\partial X_2} + \frac{\partial(aX_1)}{\partial X_2} + \frac{\partial(-aX_2)}{\partial X_2}\frac{\partial(-aX_2)}{\partial X_2} + \frac{\partial(aX_1)}{\partial X_2}\frac{\partial(aX_1)}{\partial X_2}\right) = a^2/2$$

- なお、純粋に原点を中心として$\sqrt{1+a^2}$倍に拡大した場合も同じ結果になる

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left(\sqrt{1+a^2}-1\right)X_1 \\ \left(\sqrt{1+a^2}-1\right)X_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow E_{11} = a^2/2, E_{12} = 0, E_{21} = 0, E_{22} = a^2/2$$

 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN 3S & TECHNOLOGY TECHSPIRE

Part1 ひずみ
（参考）実際の計算

- 代入して計算すると、0になる。

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1(\cos\theta - 1) - X_2 \sin\theta \\ X_1 \sin\theta + X_2(\cos\theta - 1) \end{Bmatrix}$$

$$E_{11} = \frac{1}{2}\left((\cos\theta - 1) + (\cos\theta - 1) + (\cos\theta - 1)^2 + \sin^2\theta\right) = 0$$

$$E_{12} = \frac{1}{2}\left(-\sin\theta + \sin\theta + (\cos\theta - 1)(-\sin\theta) + \sin\theta\,(\cos\theta - 1)\right) = 0$$

$$E_{21} = \frac{1}{2}(\sin\theta - \sin\theta - \sin\theta\,(\cos\theta - 1) + (\cos\theta - 1)\sin\theta) = 0$$

$$E_{22} = \frac{1}{2}\left((\cos\theta - 1) + (\cos\theta - 1) + (-\sin\theta)^2 + (\cos\theta - 1)^2\right) = 0$$

- この変形の微小ひずみを計算すると以下のように 0 にならない

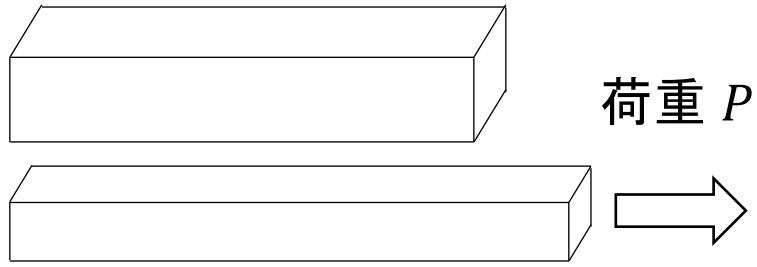
$$\varepsilon_{11} = \cos\theta - 1$$
$$\varepsilon_{12} = 0$$
$$\varepsilon_{21} = 0$$
$$\varepsilon_{22} = \cos\theta - 1$$

 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN 3S & TECHNOLOGY
TECHSPIRE

Part1 ひずみ
まとめ～１次元の棒の場合（グリーン･ラグランジュひずみまで）

- 微小ひずみ　$\varepsilon = \frac{L}{L_0} - 1$
- グリーン･ラグランジュひずみ　$E = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{L}{L_0}\right)^2 - 1\right\}$



長さ$L_0 \rightarrow L$
断面$H_0 \times H_0 \rightarrow H \times H$

 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

Part1 ひずみ
なぜこれでうまくいくのか？～変形勾配 F の定義

- 微小ベクトルの関係に立ち返ると

$$\begin{Bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{Bmatrix}$$

- この式は、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{u}$ であることを考えると

$$\begin{Bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial X_1} & \frac{\partial X_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial X_2}{\partial X_1} & \frac{\partial X_2}{\partial X_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{Bmatrix}$$

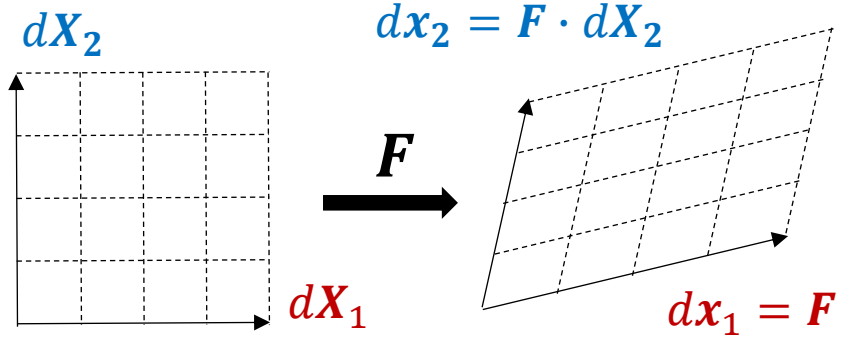
- これを $d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{X}$ として、$\boldsymbol{F}$ を変形勾配テンソルと呼ぶ。

$$\begin{Bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j$$

- 基本的に多変数積分の変数変換のヤコビマトリックスと同じ
- $J = \det\boldsymbol{F}$は体積変化率になる。

$$\int_{V_0} dV = \int_V J dV$$

$$J = \det\boldsymbol{F}$$

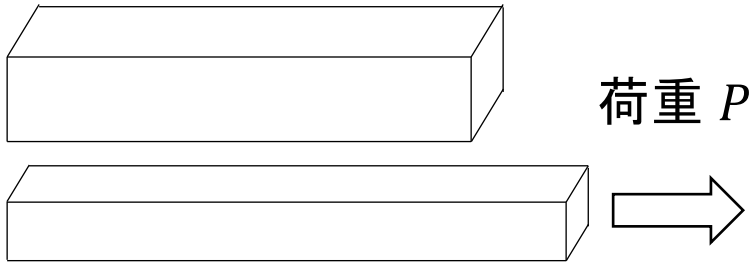


 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

TECHSPIRE HUMAN 3S & TECHNOLOGY

Part1 ひずみ
まとめ　～　１次元の棒の場合（変形勾配まで）

- 微小ひずみ　$\varepsilon = \frac{L}{L_0} - 1$
- グリーン・ラグランジュひずみ　$E = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{L}{L_0}\right)^2 - 1\right\}$
- 変形勾配　$\boldsymbol{F} = (F_{11}) = \frac{L}{L_0}, F_{22}, F_{33} = \frac{H}{H_0}$



長さ$L_0 \rightarrow L$
断面$H_0 \times H_0 \rightarrow H \times H$

 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

Part1 ひずみ
極分解と、回転を含まない変形の尺度～コーシー・グリーン変形テンソル

- この $\boldsymbol{F}$ は、回転を表す直交テンソル $\boldsymbol{R}$と、実質的な変形を表す対称テンソル $\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}$ との積に分解できる。
- 右極分解：X方向に2倍にのばしてから90度回転

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{U}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 左極分解：90度回転してからY方向に2倍にのばす

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{R}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- 求めたいのは、$d\boldsymbol{X} \cdot d\boldsymbol{X}$と$d\boldsymbol{x} \cdot d\boldsymbol{x}$の関係なので、

$$d\boldsymbol{x} \cdot d\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{X}) \cdot (\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{X}) = d\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{X}$$

- $\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{F}$を計算すると、都合よく $\boldsymbol{R}$ が相殺して、回転に依存しない量、右 コーシー・グリーン変形テンソルが定義できる。

$$\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{F} = \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}^{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{C}$$

- 同様に、左コーシー・グリーン変形テンソル

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}^{\boldsymbol{2}}$$

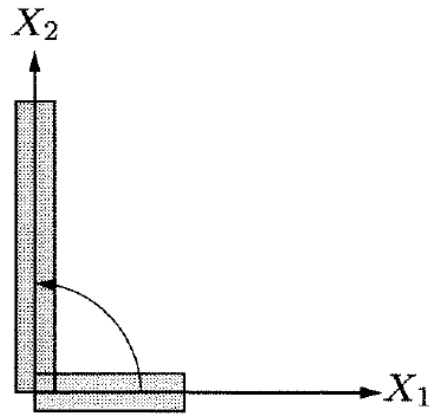
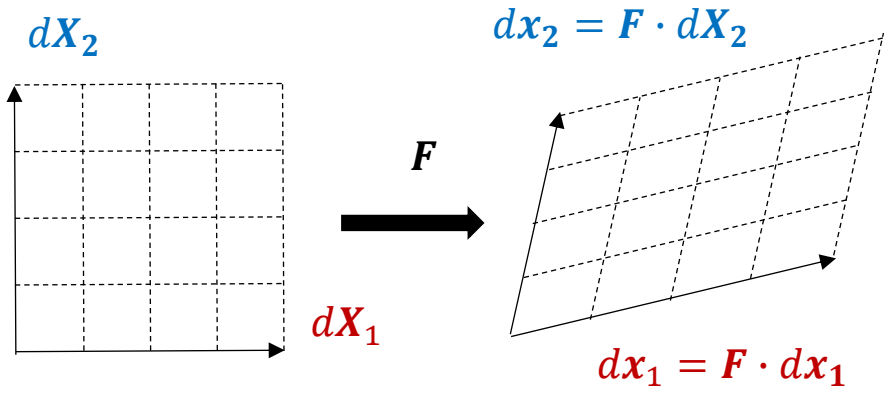


図 2.4　ロッドの引張と回転



 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

Part 1. ひずみ
変形テンソルを使ったひずみの定義

- グリーン・ラグランジュひずみは、微小ベクトルの変形前後での内積の差

$$d\boldsymbol{x}\cdot d\boldsymbol{x}-d\boldsymbol{X}\cdot d\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{X})\cdot(\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{X})-d\boldsymbol{X}\cdot d\boldsymbol{X}$$
$$=\left(d\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{T}}\right)\cdot(\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{X})-d\boldsymbol{X}\cdot d\boldsymbol{X}=d\boldsymbol{X}\cdot(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{I})\cdot d\boldsymbol{X}$$

- 変形前後での二つの微小ベクトルの内積の差と拡張できる

$$d\boldsymbol{x}_1\cdot d\boldsymbol{x}_2-d\boldsymbol{X}_1\cdot d\boldsymbol{X}_2$$
$$=(\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{X}_1)\cdot(\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{X}_2)-d\boldsymbol{X}_1\cdot d\boldsymbol{X}_2$$
$$=\left(d\boldsymbol{X}_1\cdot\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{T}}\right)\cdot(\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{X}_2)-d\boldsymbol{X}_1\cdot d\boldsymbol{X}_2$$
$$=d\boldsymbol{X}_1\cdot(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{I})\cdot d\boldsymbol{X}_2$$

$$d\boldsymbol{x}_1\cdot d\boldsymbol{x}_2-d\boldsymbol{X}_1\cdot d\boldsymbol{X}_2$$
$$=d\boldsymbol{x}_1\cdot d\boldsymbol{x}_2-(\boldsymbol{F}^{-1}\cdot d\boldsymbol{x}_1)\cdot(\boldsymbol{F}^{-1}\cdot d\boldsymbol{x}_2)$$
$$=d\boldsymbol{x}_1\cdot d\boldsymbol{x}_2-(d\boldsymbol{x}_1\cdot\boldsymbol{F}^{-T})\cdot(\boldsymbol{F}^{-1}\cdot d\boldsymbol{x}_2)$$
$$=d\boldsymbol{x}_1\cdot(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}^{-1})\cdot d\boldsymbol{x}_2$$

- グリーン・ラグランジュひずみ $\boldsymbol{E}$

$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{I})=\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{U}^{\boldsymbol{2}}-\boldsymbol{I}),$$
$$E_{11}=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\ell}{\ell_0}\right)^2-1\right\}\approx\frac{u}{\ell_0}$$

- アルマンジひずみ $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A}=\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}^{-\boldsymbol{1}})=\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}^{-\boldsymbol{2}})\quad A_{11}=\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{\ell_0}{\ell}\right)^2\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{\ell-u}{\ell}\right)^2\right\}\approx\frac{u}{\ell}\approx\frac{u}{\ell_0}$$

どちらのひずみが正しいのか？

材料の気持ちになれば、u/ℓ

一方計測可能な量はあくまでu/ℓ_0

 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN 3S & TECHNOLOGY TECHSPIRE

Part 1. ひずみ
E と A の成分表示と相互関係

- それぞれ成分表示すると

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\frac{\partial u_k}{\partial X_j}\right)$$

$$A_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)$$

- これに対して微小ひずみは変位が小さいときに成り立つ近似

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\frac{\partial u_k}{\partial X_j}\right) \to \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right)$$

$$A_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) \to \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

- 微小ひずみ、本来 X_i に関する微分であることに注意。x_i に関する微分だとこれだけで非線形になる。

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right) \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

- $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{A}$ は変形勾配 $\boldsymbol{F}$ を通して以下の関係がある。

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{F^T}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{F}$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{I}) = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\left(\boldsymbol{F^T}\cdot\boldsymbol{F}-\boldsymbol{I}\right)$$

$$= \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{F^T}\cdot\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F^{-T}}\cdot\boldsymbol{F^{-1}}\right)\cdot\boldsymbol{F} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{F^T}\cdot\left(\boldsymbol{I}-\left(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F^T}\right)^{-1}\right)\cdot\boldsymbol{F}$$

$$= \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{F^T}\cdot\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B^{-1}}\right)\cdot\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F^T}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{F}$$

- 一次元の場合

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{I}) \to E_{11} = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\ell}{\ell_0}\right)^2 - 1\right\}$$

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B^{-1}}) \to A_{11} = \frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{\ell_0}{\ell}\right)^2\right\}$$

$$\boldsymbol{F^T}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{F} = \frac{\ell}{\ell_0}\cdot\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{\ell_0}{\ell}\right)^2\right\}\cdot\frac{\ell}{\ell_0} = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\ell}{\ell_0}\right)^2 - 1\right\} = \boldsymbol{E}$$

 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN DS & TECHNOLOGY TECHSPIRE

Part 1. ひずみ

（基礎知識）固有値と、特性方程式・主不変量

- マトリックスの場合と同様に、λ をスカラーとして下式が成立するとき、λ を固有値、$\boldsymbol{\phi}$ を固有ベクトルと呼ぶ

$$\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{\phi}=\lambda\boldsymbol{\phi}$$

- 関係式 $\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{\phi}=\lambda\boldsymbol{\phi}$ を移項し、成分表示すると

$$(\boldsymbol{X}-\lambda\boldsymbol{I})\cdot\boldsymbol{\phi}\ =\ 0\rightarrow\left(X_{ij}-\lambda\delta_{ij}\right)\phi_j\ =\ 0$$

- これを連立一次方程式とみると$\phi_j=0\ (j=1\sim3)$以外の解をもつための必要十分条件は

$$\left\|\begin{bmatrix}X_{11}-\lambda & X_{12} & X_{13}\\ X_{21} & X_{22}-\lambda & X_{23}\\ X_{31} & X_{32} & X_{33}-\lambda\end{bmatrix}\right\|=\det(\boldsymbol{X}-\lambda\boldsymbol{I})=\ 0$$

- これを展開すると

$$-\lambda^3+\ I_1\lambda^2-I_2\lambda+\ I_3=0$$

$$\left.\begin{aligned}I_1&=X_{ii}=\mathrm{tr}\boldsymbol{X}\\ I_2&=\frac{1}{2}\left\{(X_{ii})^2-X_{ij}X_{ji}\right\}=\frac{1}{2}\left\{(\mathrm{tr}\boldsymbol{X})^2-\mathrm{tr}(\boldsymbol{X}^2)\right\}\\ I_3&=e_{ijk}X_{i1}X_{j2}X_{k3}=\det\boldsymbol{X}\end{aligned}\right\}$$

- ここで3次方程式の根と係数の関係を考えると

$$\left.\begin{aligned}I_1&=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\\ I_2&=\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1\\ I_3&=\lambda_1\lambda_2\lambda_3\end{aligned}\right\}$$

- I_1, I_2, I_3は座標系の選択に依存しないことが分る．よってこれらは1次，2次，3次の主不変量 と呼ばれる．
- この式は特性方程式 と呼ばれ，λに関する3次方程式となっている．したがって重根のない場合，固有値は$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$と3個存在する．重根がある場合，異なる固有値の数は2個か1個となる．
- また$\left(X_{ij}-\lambda\delta_{ij}\right)\cdot\phi_j\ =\ 0$の$\lambda$に解$\lambda_i$を代入すると対応する$\boldsymbol{\phi}_j(j=1\sim3)$ を定めることができる．
- なお任意のテンソル$\boldsymbol{X}$に対しては，固有値 λ_i と固有ベクトル成分 $\boldsymbol{\phi}_j$ が実数となる保証はないが、有限要素法で固有値を使う応力とひずみはどちらも対称で、固有値 λ_i と固有ベクトル成分 $\boldsymbol{\phi}_j$ は実数となる。

 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN 3S & TECHNOLOGY TECHSPIRE

Part 1. ひずみ

対数ひずみ

- 汎用コードの構成式では対数ひずみが用いられていることが多いので紹介する。
- 以下の固有値、固有ベクトルの関係式から、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{U}$と$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{V}$はそれぞれ、固有ベクトルが一致することがわかる。

$$\boldsymbol{U}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}=\lambda\hat{\boldsymbol{e}}\rightarrow\boldsymbol{U}=\lambda_i\hat{\boldsymbol{e}}_i\otimes\hat{\boldsymbol{e}}_i$$

$$\boldsymbol{C}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}=\boldsymbol{U}^{\boldsymbol{2}}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}=\lambda^2\hat{\boldsymbol{e}}\rightarrow\boldsymbol{C}=\lambda_i^2\hat{\boldsymbol{e}}_i\otimes\hat{\boldsymbol{e}}_i$$

$$\boldsymbol{E}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{U}^{\boldsymbol{2}}-\boldsymbol{I})\cdot\hat{\boldsymbol{e}}=\frac{1}{2}(\lambda^2-1)\hat{\boldsymbol{e}}$$

$$\rightarrow\boldsymbol{E}=\frac{1}{2}(\lambda^2-1)\hat{\boldsymbol{e}}_i\otimes\hat{\boldsymbol{e}}_i$$

$$\boldsymbol{V}\cdot\check{\boldsymbol{e}}=\mu\check{\boldsymbol{e}}\rightarrow\boldsymbol{V}=\mu_i\check{\boldsymbol{e}}_i\otimes\check{\boldsymbol{e}}_i$$

$$\boldsymbol{B}\cdot\check{\boldsymbol{e}}=\boldsymbol{V}^{\boldsymbol{2}}\cdot\check{\boldsymbol{e}}=\mu^2\check{\boldsymbol{e}}\rightarrow\boldsymbol{B}=\mu_i^2\check{\boldsymbol{e}}_i\otimes\check{\boldsymbol{e}}_i$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\check{\boldsymbol{e}}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}^{-2})\cdot\check{\boldsymbol{e}}=\frac{1}{2}(1-\mu^{-2})\check{\boldsymbol{e}}$$

$$\rightarrow\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}(1-\mu^{-2})\check{\boldsymbol{e}}_i\otimes\check{\boldsymbol{e}}_i$$

- 以下の関係式より$\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}$は固有値は一致、$\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}$の固有ベクトル$\hat{\boldsymbol{e}}_i$、$\check{\boldsymbol{e}}_i$について$\check{\boldsymbol{e}}_i=\boldsymbol{R}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_i$が成り立つことがわかる

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U}=\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{R}$$

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{R}^T=\boldsymbol{R}\cdot(\lambda_i\hat{\boldsymbol{e}}_i\otimes\hat{\boldsymbol{e}}_i)\cdot\boldsymbol{R}^T$$

$$=\lambda_i(\boldsymbol{R}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_i)\otimes(\boldsymbol{R}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_i)=\lambda_i\,\check{\boldsymbol{e}}_i\otimes\check{\boldsymbol{e}}_i$$

- すなわち

$$\boldsymbol{U}=\lambda_i\hat{\boldsymbol{e}}_i\otimes\hat{\boldsymbol{e}}_i,\boldsymbol{V}=\lambda_i\check{\boldsymbol{e}}_i\otimes\check{\boldsymbol{e}}_i$$

$$\boldsymbol{C}=\lambda_i^2\hat{\boldsymbol{e}}_i\otimes\hat{\boldsymbol{e}}_i,\boldsymbol{B}=\lambda_i^2\check{\boldsymbol{e}}_i\otimes\check{\boldsymbol{e}}_i$$

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{2}(\lambda^2-1)\hat{\boldsymbol{e}}_i\otimes\hat{\boldsymbol{e}}_i,\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}(1-\mu^{-2})\check{\boldsymbol{e}}_i\otimes\check{\boldsymbol{e}}_i$$

- この関係に基づいて、対数ひずみを以下のように定義する。特に$\ln\boldsymbol{V}$ は真ひずみと呼ばれ、多くの汎用コードが採用している。

$$\ln\boldsymbol{U}=\ln\lambda_i\;\hat{\boldsymbol{e}}_i\otimes\hat{\boldsymbol{e}}_i$$

$$\ln\boldsymbol{V}=\ln\lambda_i\;\check{\boldsymbol{e}}_i\otimes\check{\boldsymbol{e}}_i$$

 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN 3S & TECHNOLOGY TECHSPIRE

Part1 ひずみ
まとめ～１次元の棒の場合（ひずみの一般的な定義まで）

- 微小ひずみ

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{L}{L_0} - 1$$

- 変形勾配

$$F = (F_{11}) = \frac{L}{L_0}, F_{22}, F_{33} = \frac{H}{H_0}$$

- 右コーシー・グリーン変形テンソル

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{F} = \left(\frac{L}{L_0}\right)^2$$

- 左コーシー・グリーン変形テンソル

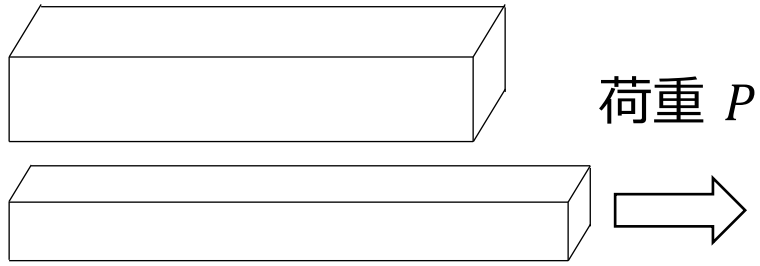
$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{T}} = \left(\frac{L}{L_0}\right)^2$$

- グリーン・ラグランジュひずみ

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{I}) = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{L}{L_0}\right)^2 - 1\right\}$$

- アルマンジひずみ

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}^{-1}) = \frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{L_0}{L}\right)^2\right\}$$



長さ$L_0 \rightarrow L$
断面$H_0 \times H_0 \rightarrow H \times H$

 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

Part 1. ひずみ

補足例題

- 図のように、まず X_1 方向に2倍に引張り、次に、θだけ回転したとする。この時の $\boldsymbol{V}$ を求めよ。

- 次に、固有値、固有ベクトルを用いて$\boldsymbol{V}$ を求めよ。

$$\boldsymbol{U} = \lambda_i \, \hat{\boldsymbol{e}}_i \otimes \hat{\boldsymbol{e}}_i$$
$$\check{\boldsymbol{e}}_i = \boldsymbol{R} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_i$$
$$\boldsymbol{V} = \lambda_i \, \check{\boldsymbol{e}}_i \otimes \check{\boldsymbol{e}}_i$$

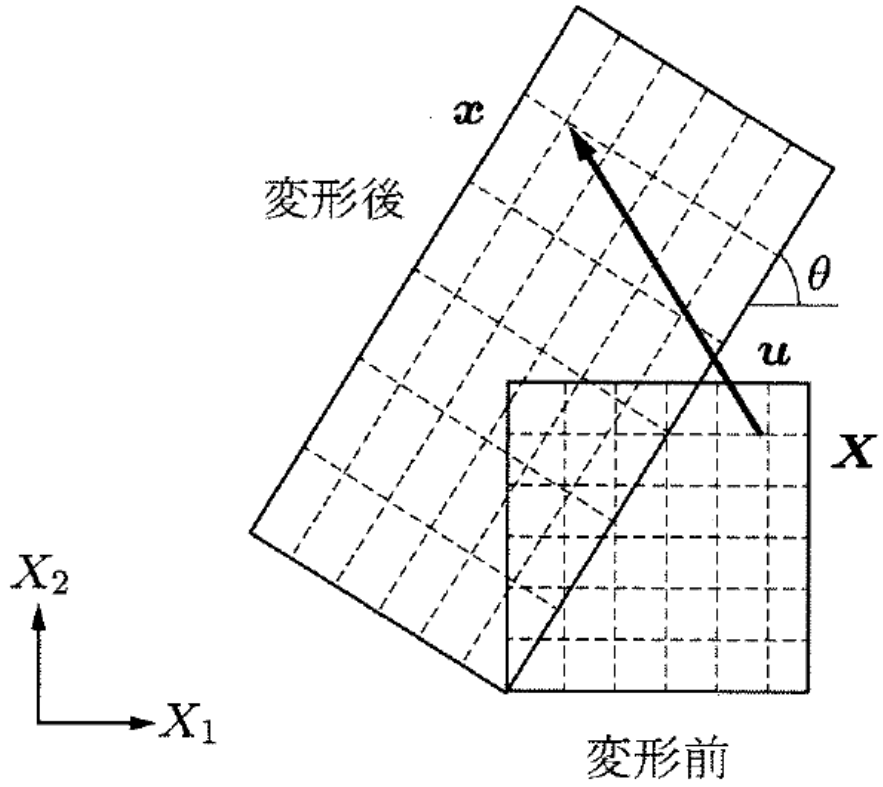


図 2.5　回転と引張

 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

Part 1. ひずみ
補足例題の解説

- X_1方向に2倍にのばしてからθ回転した変形について$\boldsymbol{U}$をもとめる

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\cos\theta & -\sin\theta \\ 2\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $\boldsymbol{V}$は、$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{U} = \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{R}$から求めることができる

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{U} = \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{R}$$

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{T}}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\theta + 1 & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta + 1 \end{bmatrix}$$

- 形式的には、$\boldsymbol{R}$だけ回転した座標系で単純引っ張りしていると考えるとわかりやすい。

- 固有値、固有ベクトルを用いて$\boldsymbol{V}$ を求めよ。

$$\boldsymbol{U} = \lambda_i \, \hat{\boldsymbol{e}}_i \otimes \hat{\boldsymbol{e}}_i$$

$$\check{\boldsymbol{e}}_i = \boldsymbol{R} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_i$$

$$\boldsymbol{V} = \lambda_i \, \check{\boldsymbol{e}}_i \otimes \check{\boldsymbol{e}}_i$$

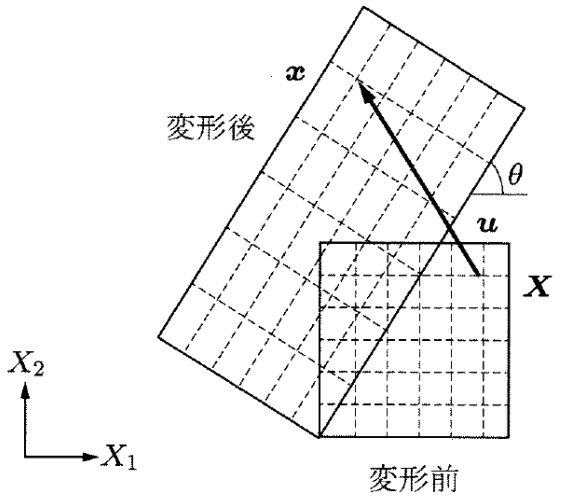


図 2.5　回転と引張

解き方は異なるが同じ答えになる。

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \lambda_i \hat{\boldsymbol{e}}_i \otimes \hat{\boldsymbol{e}}_i = 2 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 0 \end{Bmatrix} + 1 \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

$$\check{\boldsymbol{e}}_1 = \boldsymbol{R} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{Bmatrix}$$

$$\check{\boldsymbol{e}}_2 = \boldsymbol{R} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{V} = \lambda_i \check{\boldsymbol{e}}_i \otimes \check{\boldsymbol{e}}_i$$

$$= 2 \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \end{Bmatrix} + 1 \begin{Bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -\sin\theta & \cos\theta \end{Bmatrix}$$

$$= 2 \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin^2\theta & -\cos\theta\sin\theta \\ -\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\theta + 1 & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta + 1 \end{bmatrix}$$

 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN DS & TECHNOLOGY TECHSPIRE

Part 1. ひずみ
変形速度テンソル

- 一般に隣接する2つの物質点 $\boldsymbol{X}$ 及び $\boldsymbol{X}+d\boldsymbol{X}$ は、時刻 t において物質点 $\boldsymbol{x}$ 及び $\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}$ に位置し、速度$\dot{\boldsymbol{x}}$及び$\dot{\boldsymbol{x}}+d\dot{\boldsymbol{x}}$を持つ。$\dot{\boldsymbol{x}}$ を$\boldsymbol{v}$、$d\dot{\boldsymbol{x}}$を$d\boldsymbol{v}$と表すと、速度勾配テンソル$\boldsymbol{L}$は次のように定義される。

$$d\boldsymbol{v}=\boldsymbol{L}\cdot d\boldsymbol{x}$$

- すなわち、 $d\boldsymbol{x}$ から2つの物質点の相対速度$d\boldsymbol{v}$への線形変換を表す。これは時刻t におけるベクトル場$\boldsymbol{v}$の勾配 grad $\boldsymbol{v}$にほかならない。

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}}$$

- 変形勾配の定義式

$$d\boldsymbol{x}=\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{X}$$

- この式の物質時間導関数を取ると、 $d\boldsymbol{X}$が時間に依存しないので、

$$d\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{F}}\cdot d\boldsymbol{X}$$

- また、$d\boldsymbol{v}=\boldsymbol{L}\cdot d\boldsymbol{x}$の$d\boldsymbol{x}$に$d\boldsymbol{x}=\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{X}$を代入すると

$$d\boldsymbol{v}=\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{X}$$

- ２つの式を比較すると

$$\dot{\boldsymbol{F}}=\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{F}$$

- すなわち、 $\boldsymbol{L}$と$\boldsymbol{F}$には以下の関係がある。

$$\boldsymbol{L}=\dot{\boldsymbol{F}}\cdot\boldsymbol{F}^{-1}$$

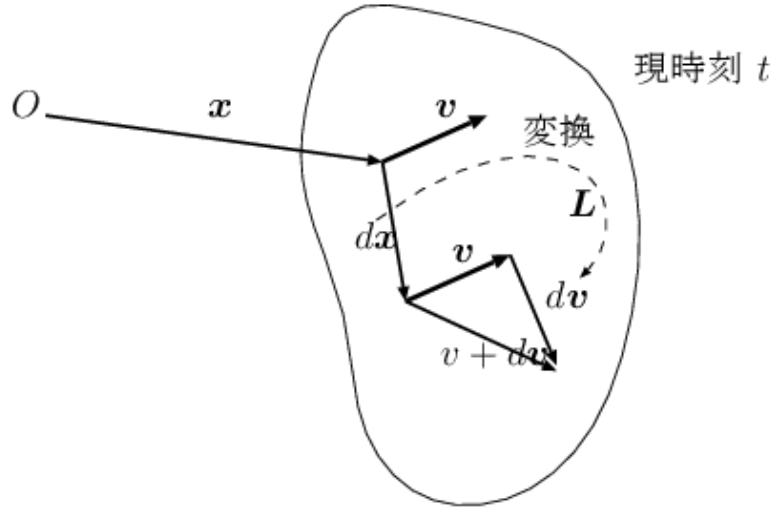


図 1: 速度勾配テンソル

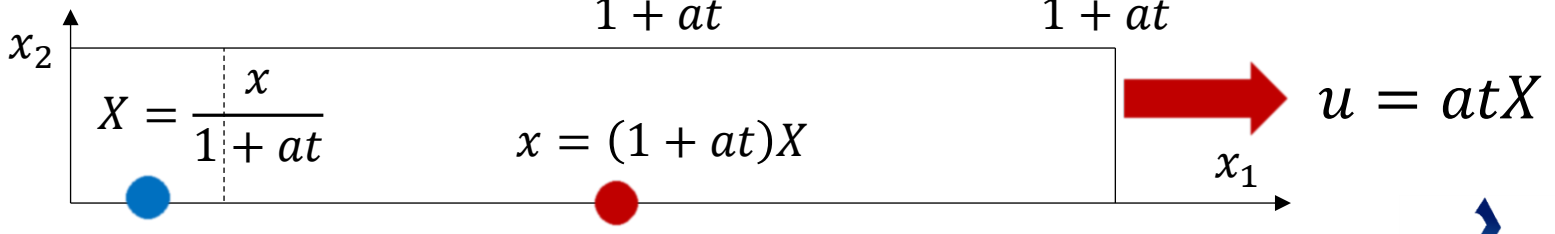
 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN 3S & TECHNOLOGY TECHSPIRE

Part1 ひずみ
速度勾配テンソル（２）

- 変形勾配の定義式
$$d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{X}$$
- この式の物質時間導関数を取ると、$d\boldsymbol{X}$が時間に依存しないので、
$$d\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{F}} \cdot d\boldsymbol{X}$$
- また、$d\boldsymbol{v} = \boldsymbol{L} \cdot d\boldsymbol{x}$の$d\boldsymbol{x}$に$d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{X}$を代入すると
$$d\boldsymbol{v} = \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{X}$$
- ２つの式を比較すると
$$\dot{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{F}$$
- すなわち、$\boldsymbol{L}$と$\boldsymbol{F}$には以下の関係がある。
$$\boldsymbol{L} = \dot{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{F}^{-1}$$

- この例で確認すると$x = (1 + at)X$ なので
$$\boldsymbol{F} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{X}} = 1 + at, \boldsymbol{F}^{-1} = \frac{1}{1 + at}$$
- 物質時間導関数を取ると
$$\dot{\boldsymbol{F}} = a$$
- 速度勾配は
$$\boldsymbol{L} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\left(\frac{a\boldsymbol{x}}{1 + at}\right) = \frac{a}{1 + at}$$
- 以上から$\boldsymbol{L} = \dot{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{F}^{-1}$が成立していることが確認できる。
$$\boldsymbol{L} = \frac{a}{1 + at} = \dot{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{F}^{-1} = a\,\frac{1}{1 + at}$$



$$v = \frac{\partial u}{\partial t} = aX = \frac{a\boldsymbol{x}}{1 + at}$$

 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

Part1 ひずみ
ストレッチテンソル

- 体積変化率$J = \det \boldsymbol{F}$を用いると

$$\frac{\dot{J}}{J} = \operatorname{tr} \boldsymbol{L} \left(= \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \operatorname{div} \boldsymbol{v} \right)$$

- また速度勾配テンソル$\boldsymbol{L}$を次のように、対称成分と反対称成分に加算分解する

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{D} + \boldsymbol{W}$$

$$\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}^T) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$$

$$\boldsymbol{W} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{L} - \boldsymbol{L}^T) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$$

- 対称成分$\boldsymbol{D}$は変形速度テンソル、あるいはストレッチングテンソル、反対称成分$\boldsymbol{W}$は回転速度テンソル、あるいはスピンテンソルと呼ばれる。

- 次のような関係式がある。

$$\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}\boldsymbol{R} \cdot \left(\dot{\boldsymbol{U}} \cdot \boldsymbol{U}^{-1} + \boldsymbol{U}^{-1} \cdot \dot{\boldsymbol{U}}\right) \cdot \boldsymbol{R}^T$$

$$\boldsymbol{W} = \dot{\boldsymbol{R}} \cdot \boldsymbol{R}^T + \frac{1}{2}\boldsymbol{R} \cdot \left(\dot{\boldsymbol{U}} \cdot \boldsymbol{U}^{-1} + \boldsymbol{U}^{-1} \cdot \dot{\boldsymbol{U}}\right) \cdot \boldsymbol{R}^T$$

$$\dot{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{F}^T \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{F}$$

$$\boldsymbol{D} = \dot{\boldsymbol{A}} + \boldsymbol{L}^T \cdot \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{L}$$

 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN 3S & TECHNOLOGY TECHSPIRE

内容

0．はじめに

1．ひずみ

2．応力

3．コーシーの第１運動法則

4．仮想仕事の原理

5．非線形方程式の解法

6．超弾性体の基礎

 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

Part2 応力

内容

- ひずみは、並進・回転に依存しない変形の尺度。
  - 微小ひずみ、即ち線形のひずみだと、回転で前述のように膨張するという問題を生じる。
  - これを解決するために、有限な回転をしても値を生じない グリーン・ラグランジュひずみ、アルマンジひずみを導入する。
- 応力テンソル (コーシー応力テンソル) は、法線方向を応力ベクトルに変換するテンソル
- コーシー応力テンソルを使って、連続体解析学の基礎式コーシーの第1運動法則を導くが、非線形性が強すぎて扱いづらい。
  - 現配置x_iでの微分を変形前配置X_iでの微分に書き換えると、第1ピオラ・キルヒホッフ応力が導かれる。
  - 第1ピオラ・キルヒホッフ応力は非対称なので、対称にしたものが第2ピオラ・キルヒホッフ応力
- 有限要素法は コーシーの第1運動法則を弱形式に変換してから近似解法で解くもの。
  - コーシー応力で記述された コーシーの第1運動法則を解くものを、アップデイティッドラグランジュ法
  - 第2ピオラ・キルヒホッフ応力で記述されたコーシーの第1運動法則を解くものを、トータルラグランジュ法
  - 従って、どちらも数学的には等価。ただし、汎用コードでは内部で異なる定式化を用いる場合があり、別物と考えた方がよい。
- トータルラグランジュ でも アップデイティッドラグランジュ でも、非線形方程式である
  - ニュートン・ラフソン法を用いて非線形方程式を解くと、線形有限要素法の自然な拡張になっている。ただし反復計算が必要。⇒収束しないことがある
  - 剛性マトリックス ⇒ 接線剛性マトリックス
- 以上の定式化を1次元の棒で考えてみる。

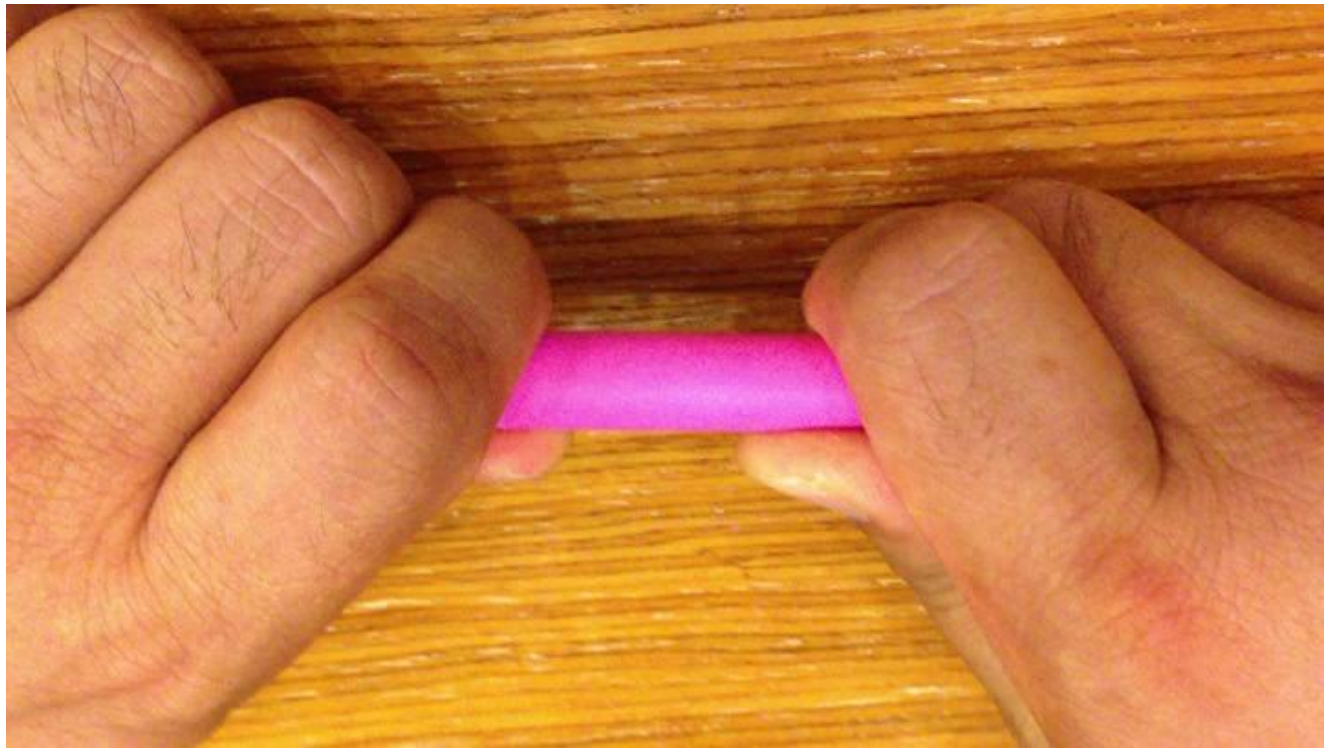
 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

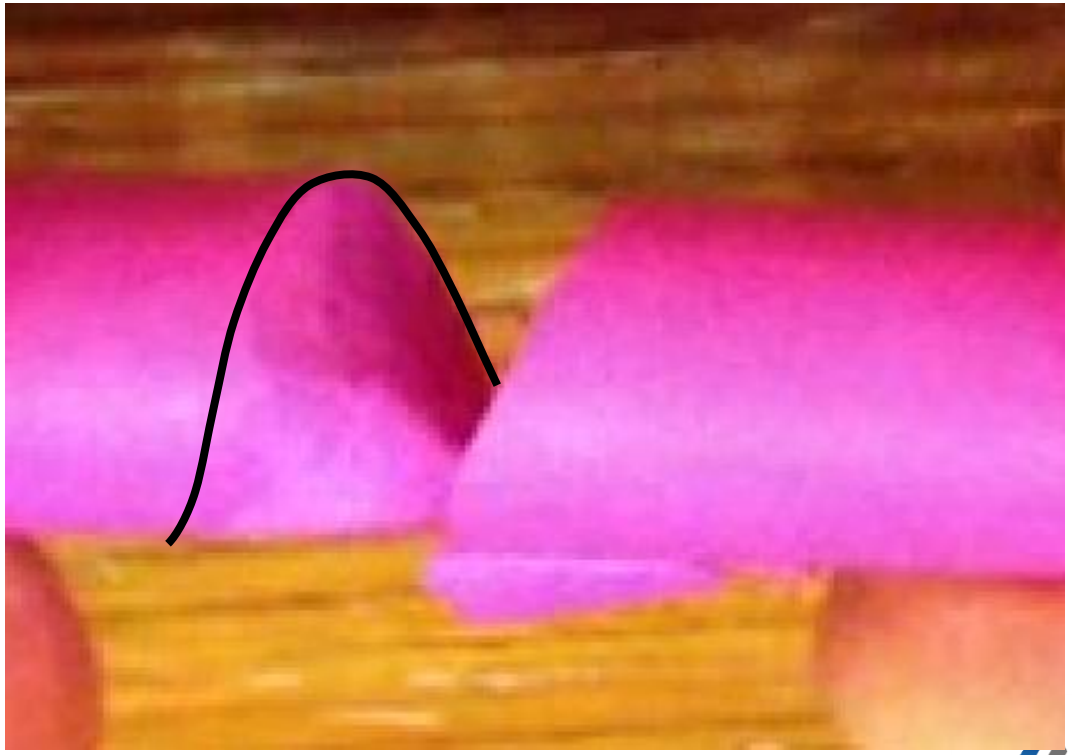
HUMAN DS & TECHNOLOGY TECHSPIRE

Part2 応力

チョークをねじると、らせん状に割れる

- 手で回転を与えて、純粋なねじり変形のみを与えることは、案外難しいので、少しでも曲げが加わると、軸直交方向に割れます。
- なぜこのような割れ方をするのでしょうか。





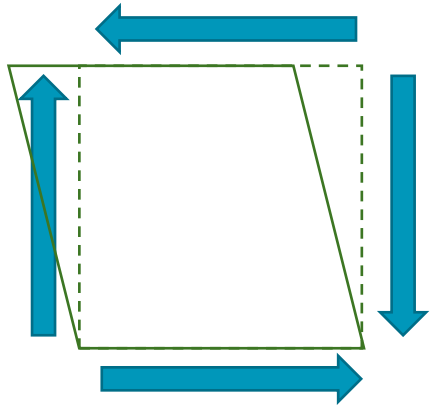
 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN 3S & TECHNOLOGY
TECHSPIRE

Part2 応力

竹をねじると、どうなるか？

- ねじりに対して垂直方向にずれている。せん断変形
- 実は角運動量平衡則　⇒　応力テンソルが対称





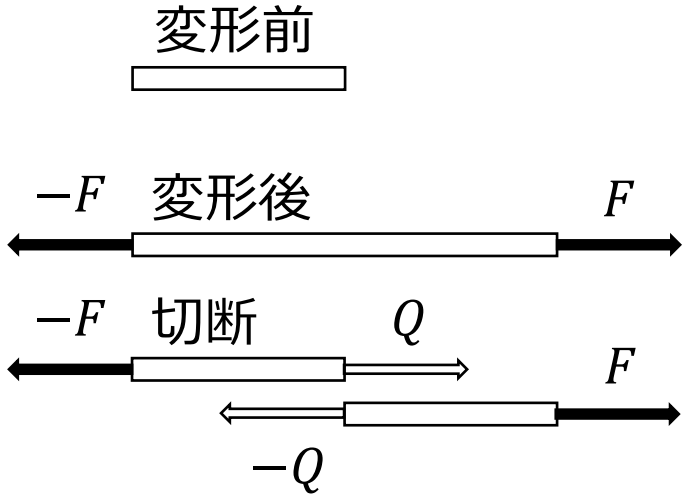


 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

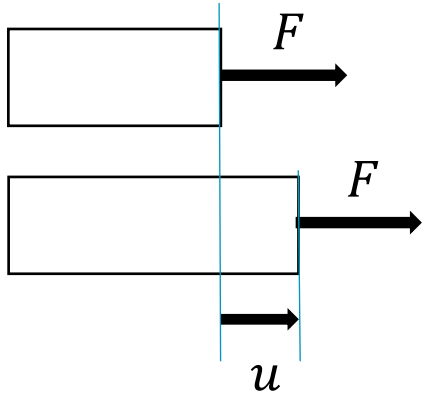
HUMAN 3S & TECHNOLOGY
TECHSPIRE

Part 2. 応力
応力を定義する前に、外力と内力を定義しておく

- ゴムひもに荷重（外力）をかけると伸びる
- 外力に対抗して物体内に生じる力を、内力と呼ぶ
- 伸びた状態で切断する（＝内力の伝達経路を遮断する）と、変形前の形状に戻る
- 切断面に変形しているときと同じ内力（相手側に伝達されていた荷重）（未知）を作用させることができれば、変形した状態を再現できる



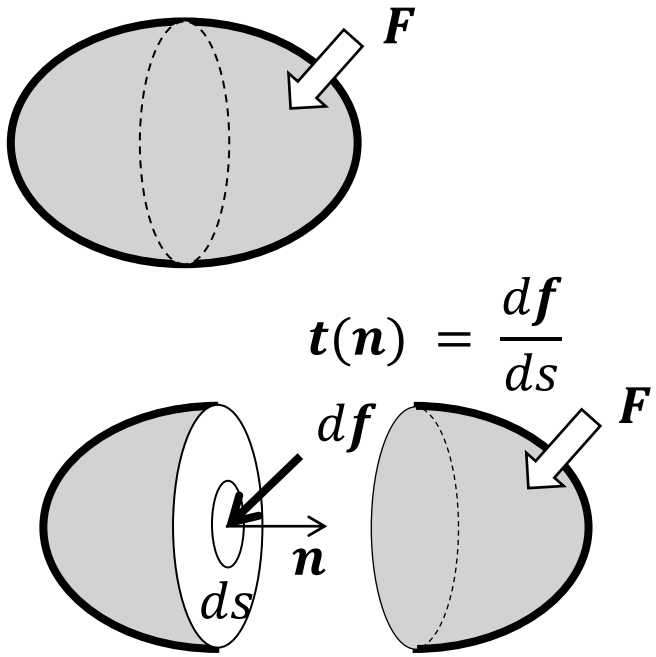
- 外力Fで物体を引っ張り、変位uを生じたとき、外力の仕事はFu
- Fuはエネルギーの次元を持つ
- 一方物体内部には、変形によりひずみエネルギーがたまっている。
- このひずみエネルギーの根源になっているのが内力Q
- 生じる変位uは同じなので、ひずみエネルギーはQu
- 外力の仕事と、変形によるひずみエネルギーが等しい



 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

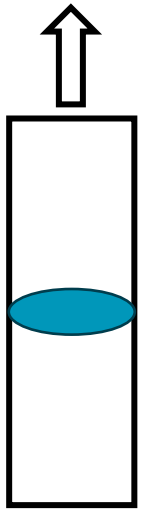
Part 2. 応力
応力ベクトルとは

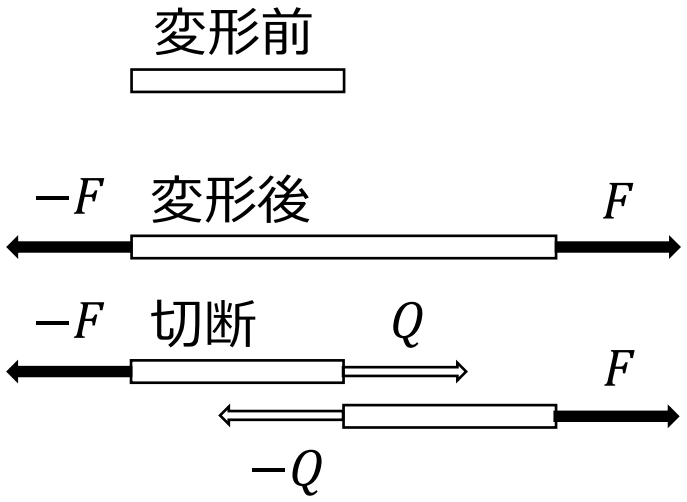
- ゴムひもに荷重をかけると伸びる、梁に曲げモーメントをかけるとたわむ
- 伸びた状態、たわんだ状態（荷重が作用している）で切断すると、縮む、真直に戻る
- 切断面に変形しているときと同じ荷重（未知）を作用させることができれば、変形した状態を再現できる
- 外力でも、内力でも単位面積当たりの力を応力という
- 力には、向きと大きさがある。応力ベクトル

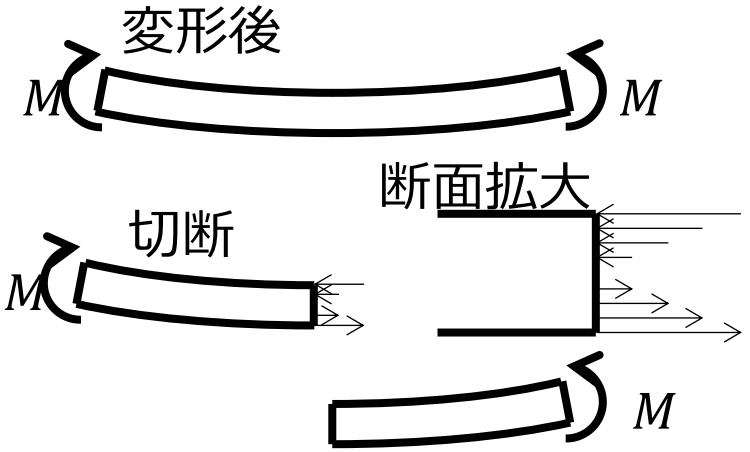


応力＝力/面積
（外力、内力とも）

単位面積当たりの
荷重







 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

Part 2. 応力

応力の定義

- 力$\boldsymbol{F}$で棒を引っ張るときの図は、左右に$\boldsymbol{F}$が作用しているように描くが、これは、棒を$2\boldsymbol{F}$で引っ張っていることにはならないのか？

- 応力ベクトルは、単位面積当たりの荷重

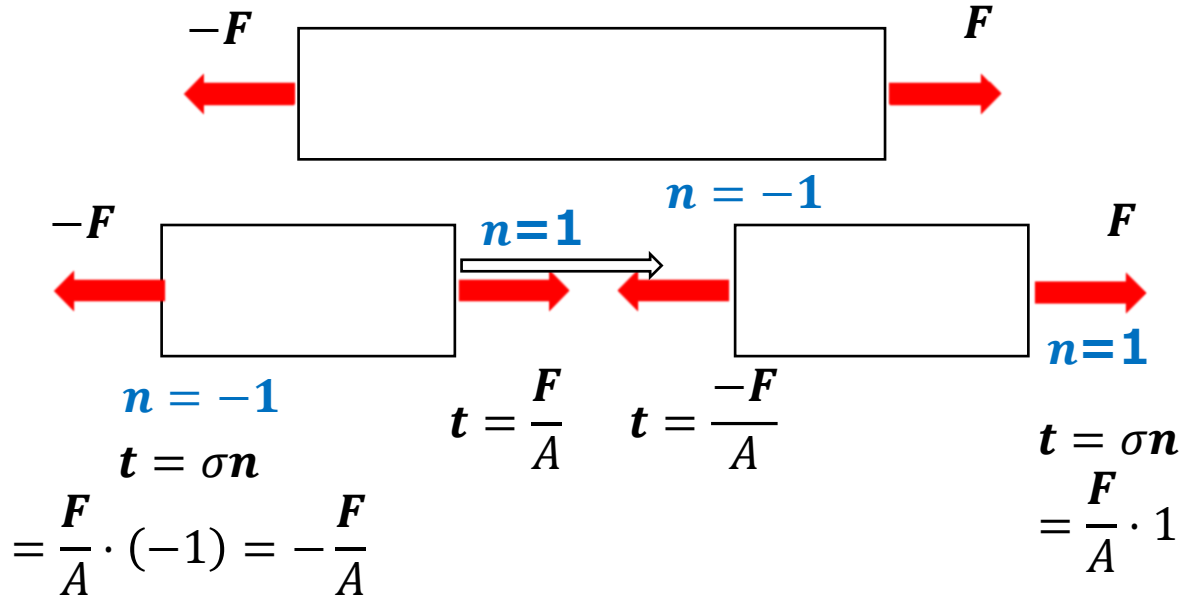
$$\boldsymbol{t} = \frac{\boldsymbol{F}}{A}$$

- 応力は面の法線ベクトル（1次元だと±）を応力ベクトルに変換する

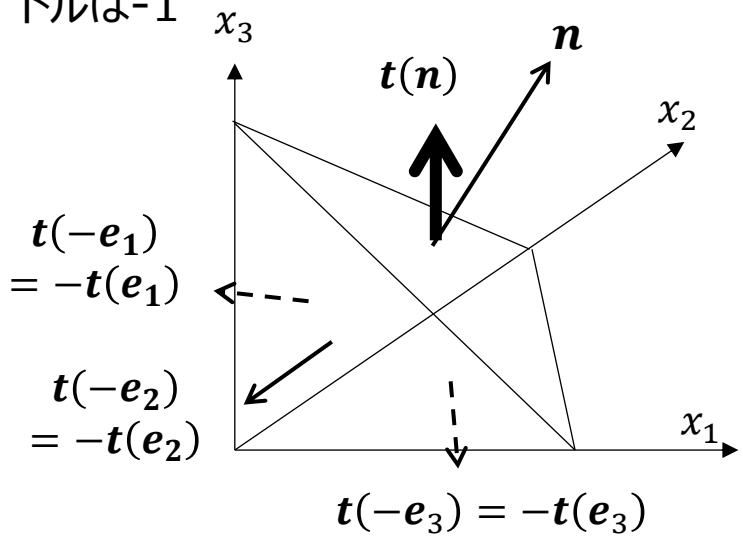
$$\boldsymbol{t} = \sigma \boldsymbol{n}$$

- 2次元、3次元の問題になると、応力ベクトルと面の法線ベクトルは、必ずしも平行ではないので、 σ の定義が、スカラー量からテンソル量に拡張される。
- 拡張されても、式の形式は同じ

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \boldsymbol{n}$$



- 右側の外向き法線ベクトルは１、左側の外向き法線ベクトルは-1



 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

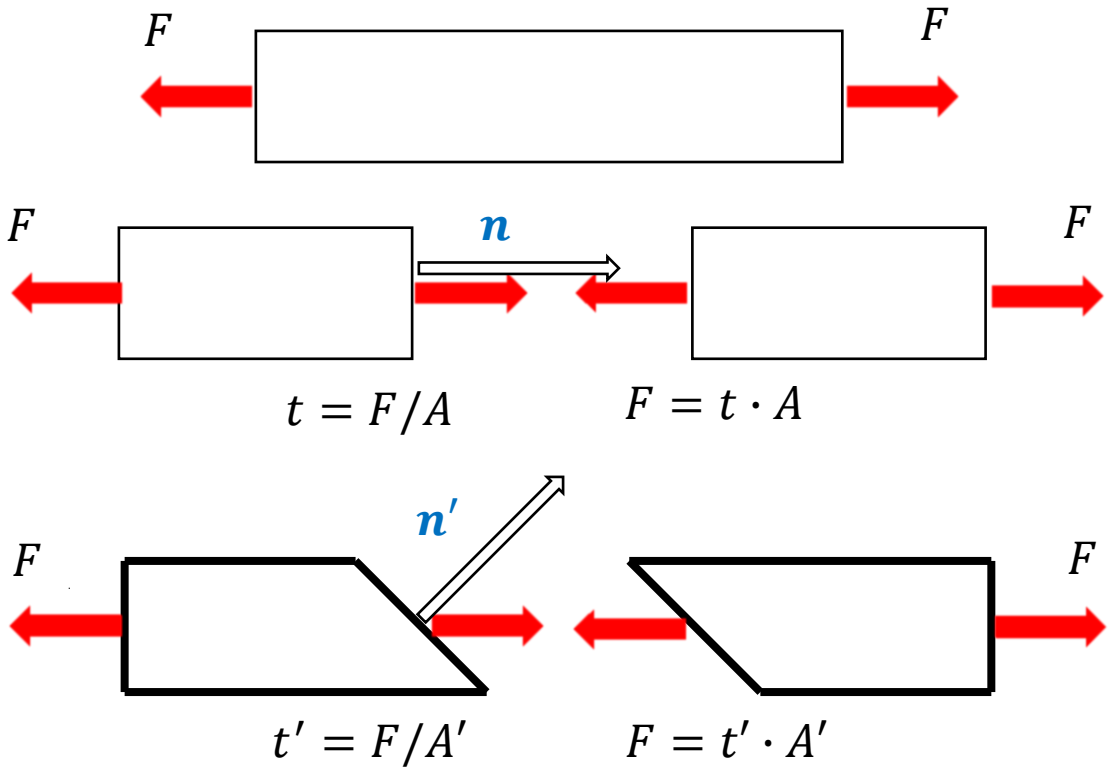
Part 2. 応力
応力ベクトルは断面の取り方で値が変わる

- 単軸引張というと、断面は軸に直交する面を想定する。
  つまり法線ベクトル$\boldsymbol{n}$は軸方向。応力ベクトルの方向も軸方向、
  大きさは$t = F/A$

- では、切断面を軸に垂直ではなく、45度方向にしたら、つまり、
  法線n'を45度方向にしたら、応力ベクトルの向きは軸方向、
  ただし、大きさは$t' = t/\sqrt{2}$

- なぜか？
- 受け持つ断面積が$\sqrt{2}$倍になるから。

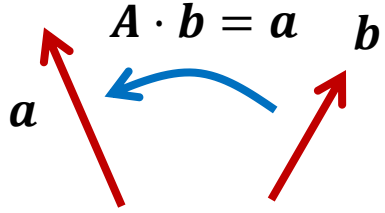
$$A' = \sqrt{2}A$$



 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

Part2 応力
応力テンソルとは

行列とは、２つのベクトルの一次変換



- 応力ベクトルは断面の取り方で値が変わる。
- つまり応力ベクトル は、法線ベクトルの関数

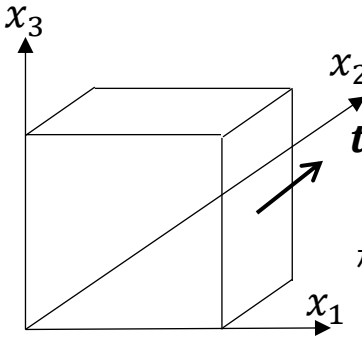
$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n}) = \frac{F}{A}$$

- テンソル解析により、断面の法線ベクトルn_iを応力ベクトル（単位面積当たりの荷重）$t_i = \frac{F}{A}$ に変換する関数 $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n})$ （ベクトルをベクトルに変換する関数）は、テンソルになる（線形である） ことが数学的に証明できる。
- このテンソル T_{ij} を、コーシー応力テンソルと呼ぶ

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{T}^T \cdot \boldsymbol{n}\ (\text{コーシー、ティモシェンコ})$$

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{n}\ (\text{トゥルーズデル})$$

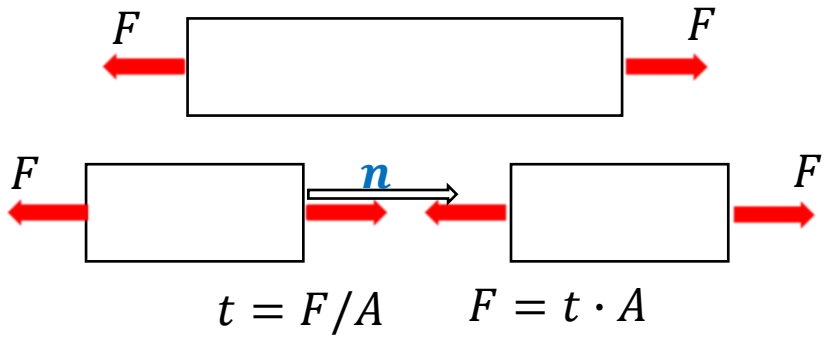
$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}$$



$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{e_1}) = \begin{Bmatrix} T_{11} \\ T_{12} \\ T_{13} \end{Bmatrix}$$

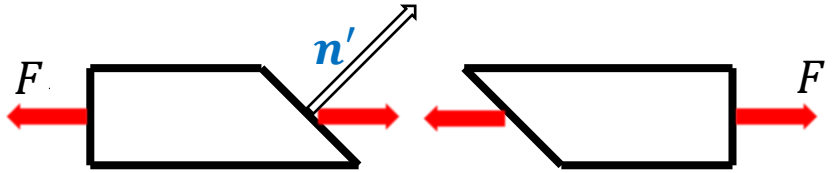
なおトゥルーズデル型だと以下のようになる。

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{e_1}) = \begin{Bmatrix} T_{11} \\ T_{21} \\ T_{31} \end{Bmatrix}$$



$t = F/A$　　$F = t \cdot A$

$$t' = \frac{t}{\sqrt{2}}$$



$t' = F/A'$　　$F = t' \cdot A'$

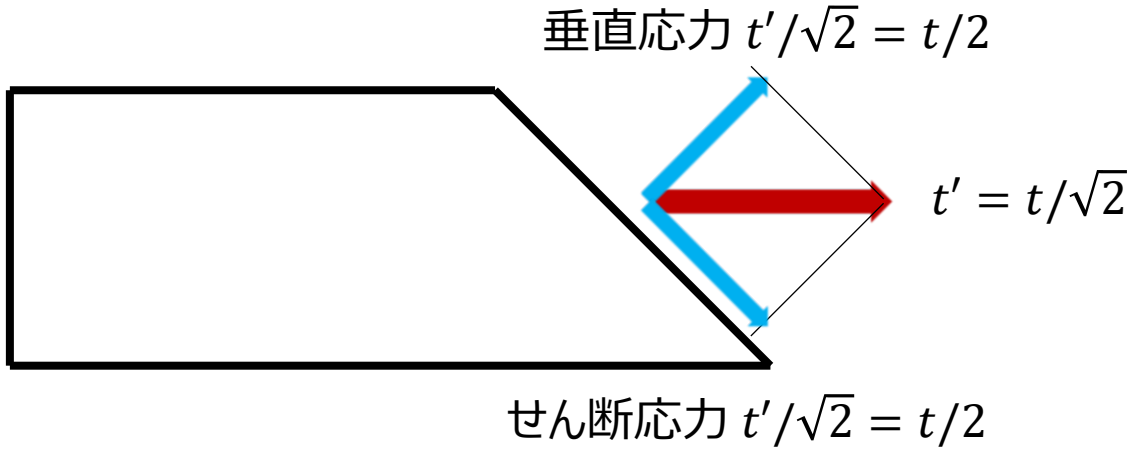
$$\begin{Bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F/A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

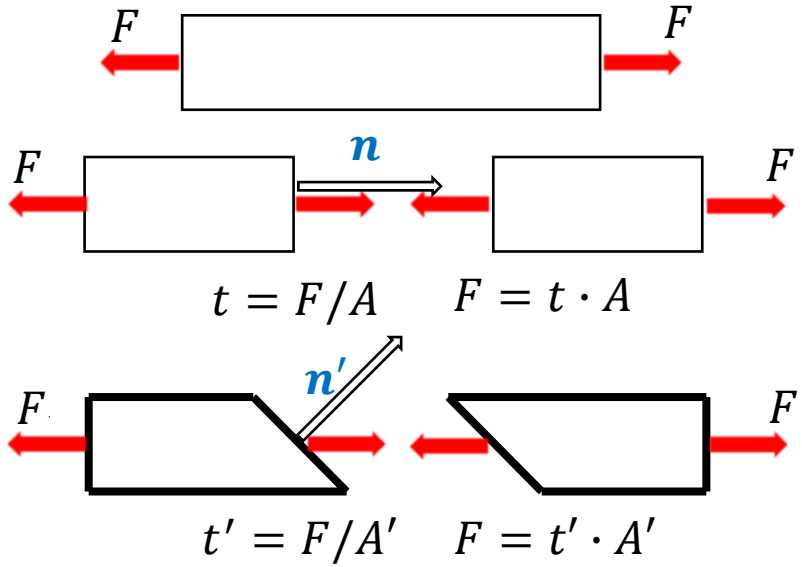
$$\begin{Bmatrix} t' \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F/A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

Part2 応力
引張の中にせん断あり

- 面に垂直な応力ベクトルが垂直応力、面に水平な応力ベクトルがせん断応力
- ４５度の断面で見ると、現象としては、単純引張であるにも関わらず、せん断応力が発生していることがわかる。

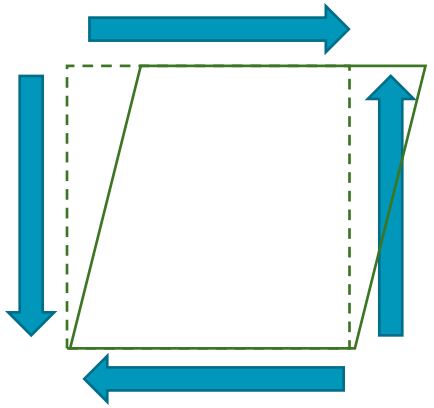




 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

Part 2. 応力
応力をテンソルで表現する利点





- テンソルだと座標変換できる。特に、固有ベクトルを基底ベクトルとする座標系に座標変換するとマトリックスは対角化される。
- 主応力：数学的には、応力テンソルの固有値、固有ベクトルだが、物理現象（壊れる or 壊れない）の本質をとらえている場合がある。
- せん断の応力テンソル（対称テンソル）

$$\begin{bmatrix} 0 & \tau \\ \tau & 0 \end{bmatrix}$$

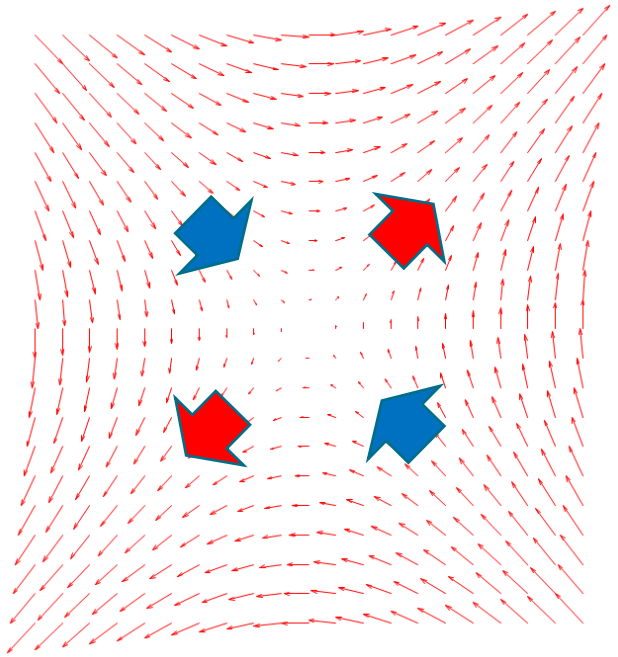
- 主応力、主応力方向

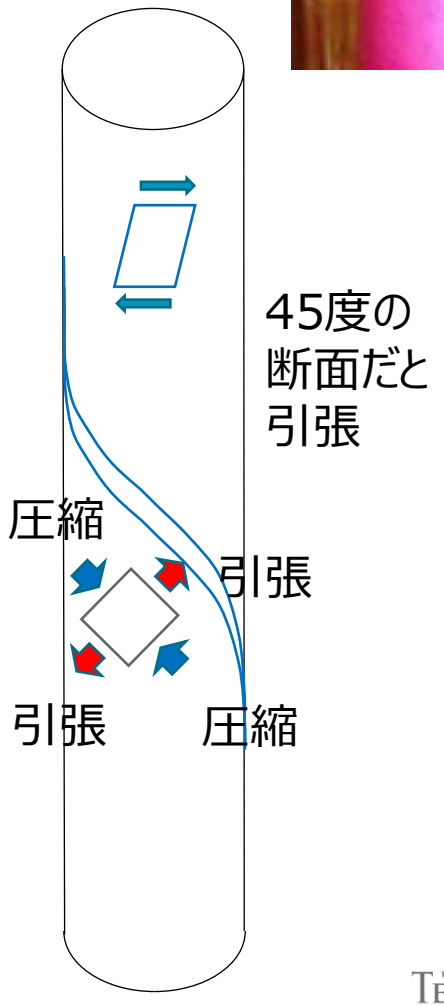
$$\begin{bmatrix} \tau & 0 \\ 0 & -\tau \end{bmatrix}, \begin{Bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{Bmatrix}$$

- テンソルの可視化：
- (x, y) が-1,1の領域の格子点でベクトルを表示

$$\begin{bmatrix} 0 & \tau \\ \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tau y \\ \tau x \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} 0 \\ \tau \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \tau \\ 0 \end{Bmatrix}$$





 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

Part2 応力
まとめ ～ １次元の棒の場合（コーシー応力まで）

- 微小ひずみ

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{L}{L_0} - 1$$

- 変形勾配

$$F = (F_{11}) = \frac{L}{L_0}, F_{22}, F_{33} = \frac{H}{H_0}$$

- 右コーシー・グリーン変形テンソル

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F^T} \cdot \boldsymbol{F} = \left(\frac{L}{L_0}\right)^2$$

- 左コーシー・グリーン変形テンソル

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{F^T} = \left(\frac{L}{L_0}\right)^2$$

- 左コーシー・グリーン変形テンソル

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{F^T} = \left(\frac{L}{L_0}\right)^2$$

- グリーン・ラグランジュひずみ

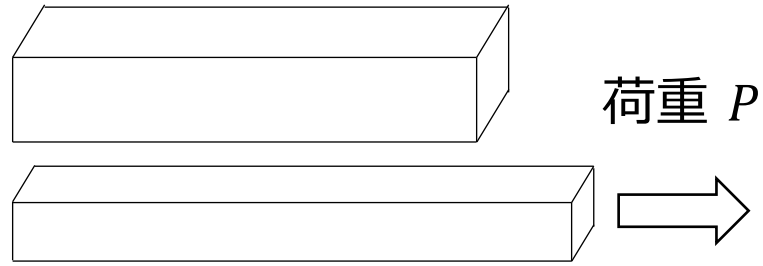
$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C}^2 - 1) = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{L}{L_0}\right)^2 - 1\right\}$$

- アルマンジひずみ

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}(1 - \boldsymbol{B}^{-2}) = \frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{L_0}{L}\right)^2\right\}$$

- コーシー応力テンソル

$$\boldsymbol{T} = \frac{P}{H^2}$$



長さ$L_0 \rightarrow L$
断面$H_0 \times H_0 \rightarrow H \times H$

 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

Part2 応力
（参考）コーシー応力テンソルの証明（１）

- コーシーの第1運動法則を導くときに使用した、運動量平衡則（以下の関係式）は、Euler の第1運動法則と呼ばれている。

$$\int_V \rho\, a_i dV = \int_S t_i\, dS + \int_V \rho\, g_i\, dV$$

- これはどのような物体に対しても成立するので、図のような微小な四面体を考える。体積を$\Delta \boldsymbol{v}$斜面の面積$\Delta \boldsymbol{s}$、また各側面の面積を$\Delta \boldsymbol{s_1}, \Delta \boldsymbol{s_2}, \Delta \boldsymbol{s_3}$とする。

$$\rho\, a_i \Delta \boldsymbol{v} = t_i(\boldsymbol{n})\Delta s + t_i(-\boldsymbol{e}_1)\Delta s_1 + t_i(-\boldsymbol{e}_2)\Delta s_2 + t_i(-\boldsymbol{e}_3)\Delta s_3 + \rho\, g_i \Delta \boldsymbol{v}$$

$$\rho\,(a_i - g_i)\Delta \boldsymbol{v} = t_i(\boldsymbol{n})\Delta s - t_i(\boldsymbol{e}_1)\Delta s_1 - t_i(\boldsymbol{e}_2)\Delta s_2 - t_i(\boldsymbol{e}_3)\Delta s_3$$

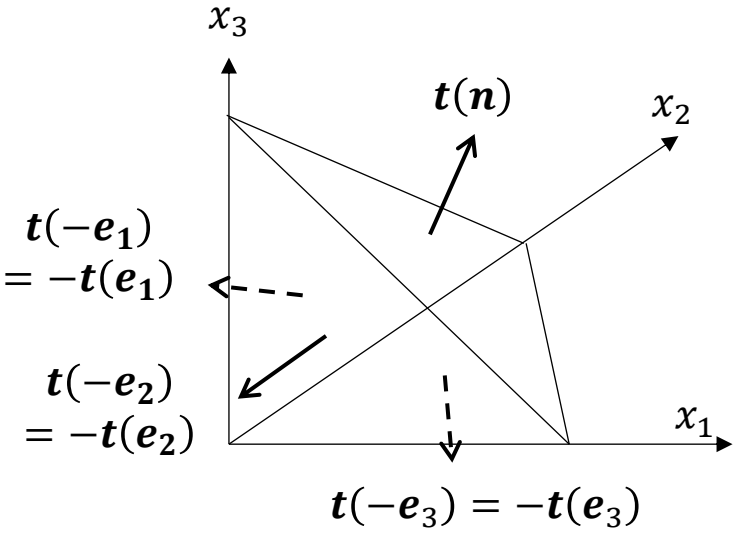
$$\rho\,(a_i - g_i)\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta s} = t_i(\boldsymbol{n}) - t_i(\boldsymbol{e}_1)\frac{\Delta s_1}{\Delta s} - t_i(\boldsymbol{e}_2)\frac{\Delta s_2}{\Delta s} - t_i(\boldsymbol{e}_3)\frac{\Delta s_3}{\Delta s}$$

- ここで、$\Delta \boldsymbol{v}/\Delta s$は、微小の極限を考えると0になる。

$$t_i(\boldsymbol{n}) = t_i(\boldsymbol{e}_1)n_1 + t_i(\boldsymbol{e}_2)n_2 + t_i(\boldsymbol{e}_3)n_3$$

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{t}(\boldsymbol{e}_k)n_k$$

- ただし$\Delta s_i/\Delta s = n_i$ を用いている



 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

Part2 応力
（参考）コーシー応力テンソルの証明（２）

- 少々技巧的であるが、以下のように式展開する。

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n}) = n_k \boldsymbol{t}(\boldsymbol{e}_k)$$
$$= (\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{t}(\boldsymbol{e}_k)$$
$$= (\boldsymbol{t}(\boldsymbol{e}_k) \otimes \boldsymbol{e}_k) \cdot \boldsymbol{n}$$

- この$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{e}_k) \otimes \boldsymbol{e}_k$はテンソルなので、$\boldsymbol{T}$ とおき、コーシー応力テンソルと呼ぶ。

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{T}^T \cdot \boldsymbol{n}$$
$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{n}$$

- どちらの形式も用いられる。ここでは前形、後形と呼ぶ。
（それぞれの場合に導かれる コーシーの第1運動法則の形式に基づく）
- コーシー応力の成分を求めると、以下のようになる。また、Cauchy の第2運動法則から対称になることが証明できるが、この段階では対称性はわからない。

- $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{T}^T \cdot \boldsymbol{n}$:

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{T}^T \cdot \boldsymbol{e}_1 = T_{11}\boldsymbol{e}_1 + T_{12}\boldsymbol{e}_2 + T_{13}\boldsymbol{e}_3$$
$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{T}^T \cdot \boldsymbol{e}_2 = T_{21}\boldsymbol{e}_1 + T_{22}\boldsymbol{e}_2 + T_{23}\boldsymbol{e}_3$$
$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{T}^T \cdot \boldsymbol{e}_3 = T_{31}\boldsymbol{e}_1 + T_{32}\boldsymbol{e}_2 + T_{33}\boldsymbol{e}_3$$

- $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{n}$:

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{e}_1 = T_{11}\boldsymbol{e}_1 + T_{21}\boldsymbol{e}_2 + T_{31}\boldsymbol{e}_3$$
$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{e}_2 = T_{12}\boldsymbol{e}_1 + T_{22}\boldsymbol{e}_2 + T_{32}\boldsymbol{e}_3$$
$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{e}_3 = T_{13}\boldsymbol{e}_1 + T_{23}\boldsymbol{e}_2 + T_{33}\boldsymbol{e}_3$$

 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN 3S & TECHNOLOGY TECHSPIRE

Part2 応力

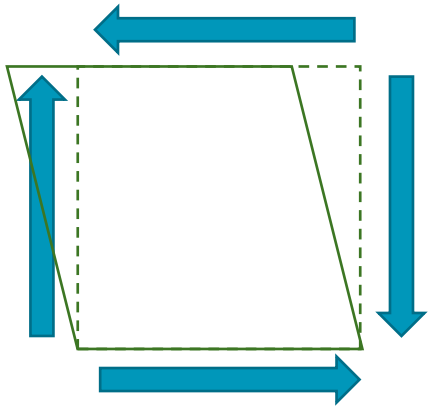
（参考）角運動量平衡則からコーシーの第２運動法則を導く

- 角運動量平衡則は、慣性力、表面力、体積力の角運動量が釣り合っているという式である。

$$\int_V \boldsymbol{x}\times\rho\,\boldsymbol{a}dV = \int_S \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{n}dS + \int_V \boldsymbol{x}\times\rho\boldsymbol{g}\,dV$$

- この関係式に、Gauss の発散定理と、コーシーの第1運動法則を用いると コーシー応力テンソルが対称であることが証明できる

$$\boldsymbol{T}^T = \boldsymbol{T}, T_{ji} = T_{ij}$$





 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN 3S & TECHNOLOGY TECHSPIRE

Part2 応力
（参考）コーシーの第２運動法則

- 角運動量平衡則に関する Euler の第2運動法則

$$\int_V \boldsymbol{x}\times\rho\boldsymbol{a}\,dV = \int_V \boldsymbol{x}\times\rho\boldsymbol{g}\,dV + \int_S \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{t}\,dS$$

- 上式の$\boldsymbol{t}$に$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{T}^T\cdot\boldsymbol{n}$ を代入する

$$\int_V \boldsymbol{x}\times\rho\boldsymbol{a}\,dV = \int_V \boldsymbol{x}\times\rho\boldsymbol{g}\,dV + \int_S \boldsymbol{x}\times(\boldsymbol{T}^T\cdot\boldsymbol{n})dS$$

$$\int_S \boldsymbol{x}\times(\boldsymbol{T}^T\cdot\boldsymbol{n})dS = \int_S x_i\boldsymbol{e}_i\times T_{lj}n_l dS = \int_S \epsilon_{ijk}x_iT_{lj}n_l\boldsymbol{e}_k dS$$

$$= \epsilon_{ijk}\int_S x_iT_{lj}n_l dS\boldsymbol{e}_k = \epsilon_{ijk}\int_V \frac{\partial}{\partial x_l}(x_iT_{lj})dV\boldsymbol{e}_k$$

$$= \epsilon_{ijk}\int_V \delta_{il}T_{lj} + x_i\frac{\partial T_{lj}}{\partial x_l}dV\boldsymbol{e}_k = \int_V \epsilon_{ijk}T_{ij}\boldsymbol{e}_k + \epsilon_{ijk}x_i\frac{\partial T_{lj}}{\partial x_l}\boldsymbol{e}_k dV$$

$$= \int_V \epsilon_{ijk}T_{ij}\boldsymbol{e}_k + (x_i\boldsymbol{e}_i)\times\left(\frac{\partial T_{lj}}{\partial x_l}\boldsymbol{e}_k\right)dV = \int_V \epsilon_{ijk}T_{ij}\boldsymbol{e}_k + \boldsymbol{x}\times\mathrm{div}\boldsymbol{T}\,dV$$

- Cauchyの第1運動法則

$$\rho\boldsymbol{a} = \mathrm{div}\boldsymbol{T} + \rho\boldsymbol{g}$$

- 上式から

$$\int_V \boldsymbol{x}\times(\rho\boldsymbol{a} - \mathrm{div}\boldsymbol{T} - \rho\boldsymbol{g})\,dV = 0$$

- したがって

$$\int_V \epsilon_{ijk}T_{ij}\boldsymbol{e}_k dV = 0$$

$$\epsilon_{ijk}T_{ij}\boldsymbol{e}_k = 0$$

- これは$T_{ij} = T_{ji}$のとき成立する。

$$\epsilon_{ij1}T_{ij}\boldsymbol{e}_1 = \epsilon_{231}T_{23}\boldsymbol{e}_1 + \epsilon_{321}T_{32}\boldsymbol{e}_1 = (T_{23} - T_{32})\boldsymbol{e}_1 = 0$$

$$\epsilon_{ij2}T_{ij}\boldsymbol{e}_2 = \epsilon_{312}T_{31}\boldsymbol{e}_2 + \epsilon_{132}T_{13}\boldsymbol{e}_2 = (T_{31} - T_{13})\boldsymbol{e}_2 = 0$$

$$\epsilon_{ij3}T_{ij}\boldsymbol{e}_3 = \epsilon_{123}T_{12}\boldsymbol{e}_3 + \epsilon_{213}T_{21}\boldsymbol{e}_3 = (T_{12} - T_{21})\boldsymbol{e}_3 = 0$$

 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN 3S & TECHNOLOGY TECHSPIRE

内容

０．はじめに
１．ひずみ
２．応力
３．コーシーの第１運動法則
４．仮想仕事の原理
５．非線形方程式の解法
６．超弾性体の基礎

 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN 3S & TECHNOLOGY
TECHSPIRE

Part 3. コーシーの第1運動法則

内容

- ひずみは、並進・回転に依存しない変形の尺度。
  - 微小ひずみ、即ち線形のひずみだと、回転で前述のように膨張するという問題を生じる。
  - これを解決するために、有限な回転をしても値を生じない グリーン・ラグランジュひずみ、アルマンジひずみを導入する。
- 応力テンソル (コーシー応力テンソル) は、法線方向を応力ベクトルに変換するテンソル
- コーシー応力テンソルを使って、連続体解析学の基礎式コーシーの第1運動法則を導くが、非線形性が強すぎて扱いづらい。
  - 現配置x_iでの微分を変形前配置X_iでの微分に書き換えると、第1ピオラ・キルヒホッフ応力が導かれる。
  - 第1ピオラ・キルヒホッフ応力は非対称なので、対称にしたものが第2ピオラ・キルヒホッフ応力
- 有限要素法は コーシーの第1運動法則を弱形式に変換してから近似解法で解くもの。
  - コーシー応力で記述された コーシーの第1運動法則を解くものを、アップデイティッドラグランジュ
  - 第2ピオラ・キルヒホッフ応力で記述されたコーシーの第1運動法則を解くものを、トータルラグランジュ法
  - 従って、どちらも数学的には等価。ただし、汎用コードでは内部で異なる定式化を用いる場合があり、別物と考えた方がよい。
- トータルラグランジュ でも アップデイティッドラグランジュ でも、非線形方程式である
  - ニュートン・ラフソン法を用いて非線形方程式を解くと、線形有限要素法の自然な拡張になっている。ただし反復計算が必要。⇒収束しないことがある
  - 剛性マトリックス ⇒ 接線剛性マトリックス
- 以上の定式化を1次元の棒で考えてみる。

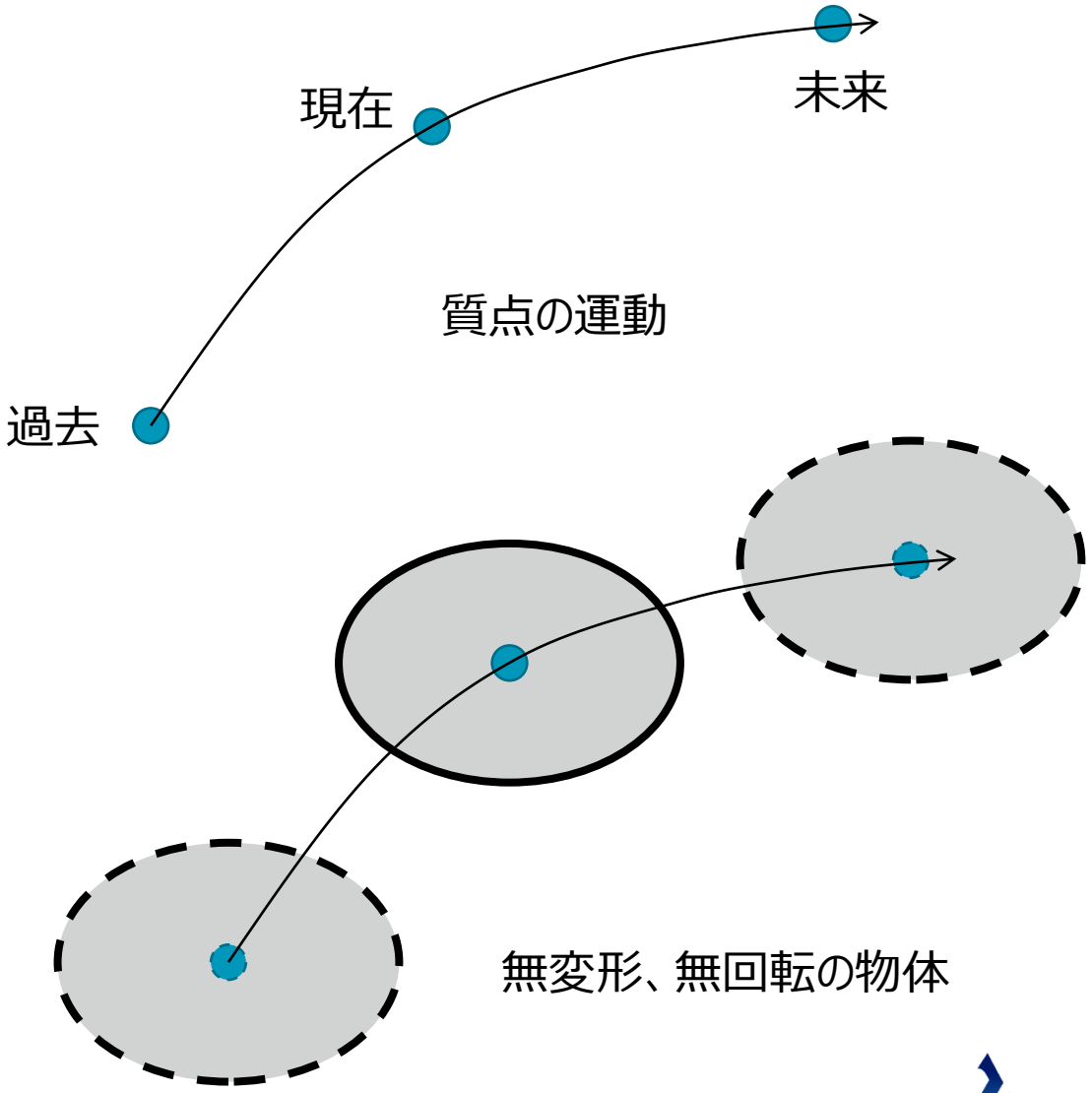
 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN DS & TECHNOLOGY TECHSPIRE

Part 3. コーシーの第1運動法則
運動量平衡則

- CAEではどんな物理法則を解いているか？
- ニュートン力学の運動の法則
  - 運動の第 1 法則：慣性の法則
  - 運動の第 2 法則：運動方程式
  - 運動の第 3 法則：作用反作用の法則

- 運動方程式 $\boldsymbol{ma} = \boldsymbol{F}$ は何を表しているのか。
  - 特に質点とは何か。
  - 質量があるが、大きさがない。という概念はあるが、物理的には存在しない。
- → 無変形、無回転の物体の重心の運動。
- 変形したり、回転するような運動をする物体の運動方程式はどうするのか。



 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

Part 3. コーシーの第1運動法則
運動量平衡則

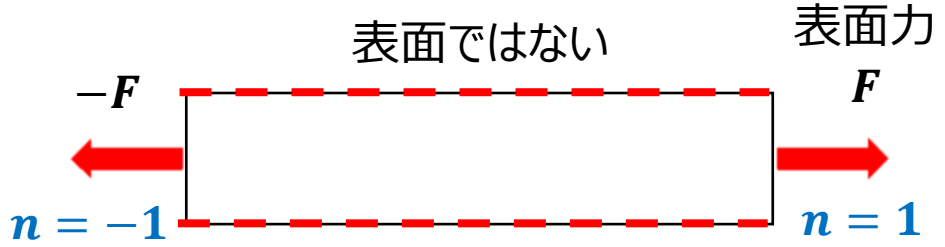


質点には表面がないので、表面力はない

- 運動方程式は、運動量の変化率$m\boldsymbol{a}$は外力$\boldsymbol{F}$に等しいというもの

$$\boldsymbol{ma} = \boldsymbol{F}$$

- 連続体解析学では、運動量の変化率$m\boldsymbol{a}$を慣性力として、外力と慣性力のつり合いと考える。 ⇒ 運動量平衡則



$$\boldsymbol{t} = \sigma\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{F}}{A} \cdot (-1) = -\frac{\boldsymbol{F}}{A} \qquad \boldsymbol{t} = \sigma\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{F}}{A} \cdot 1 = \frac{\boldsymbol{F}}{A}$$

- 物体に作用する力は、以下の３つしかない
  1. 慣性力 （体積積分）

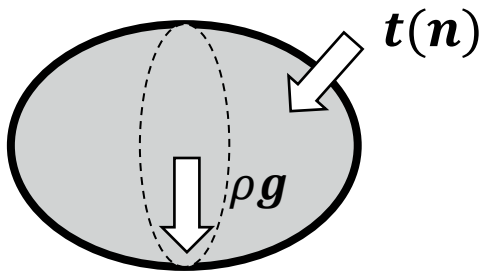
$$\int_V \rho a_i \, dV$$

  2. 重力などの体積力 （体積積分）

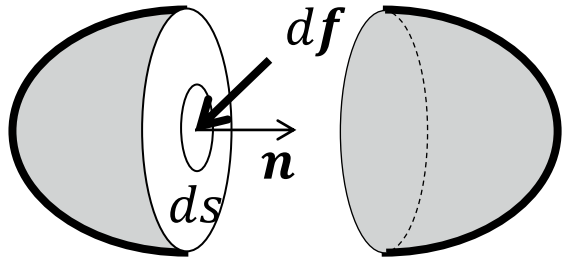
$$\int_V \rho g_i \, dV$$

  3. 表面力 （面積積分）

$$\int_S t_i \, dS = \int_S \sigma_{ji} n_i \, dS$$



$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n}) = \frac{d\boldsymbol{f}}{dS}$$



- 成分で書くと以下のようになる

$$T_{ji} n_i = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}$$

- １次元だと

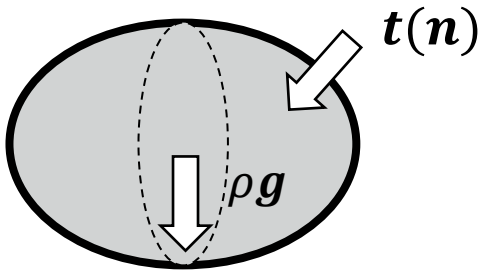
$$\int_S \sigma_{ji} n_i \, dS = A\left(\sigma(x_j) - \sigma(x_i)\right)$$

$$= A[\sigma(x)]_{x_i}^{x_j} = A\int_{x_i}^{x_j} \frac{d\sigma}{dx} dx$$

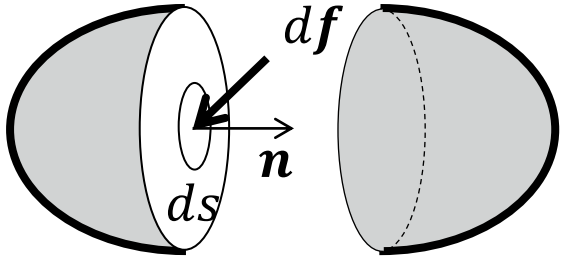
 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN 3S & TECHNOLOGY TECHSPIRE

Part 3. コーシーの第1運動法則
運動量平衡則からコーシーの第1運動法則を導く



$$\boldsymbol{t(n)} = \frac{d\boldsymbol{f}}{ds}$$



- 運動量平衡則は、慣性力が表面力と体積力の和と釣り合っているという式である。

$$\int_V \rho\, a_i dV = \int_S T_{ji}\, n_j\, dS + \int_V \rho\, g_i\, dV$$

- 右辺第１項（表面力）だけ面積積分なので、体積積分に変更したい。

⇒ ガウスの発散定理を使う。

$$\int_V \rho\, a_i dV = \int_V \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j}\, dV + \int_V \rho\, g_i\, dV$$

- 被積分関数をまとめたものを、コーシーの第一運動法則、平衡方程式と呼ぶ。形状とは無関係の局所的な関係式。物体を構成する任意の物質点で成り立つ関係式になる。

$$\rho\, a_i = \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} + \rho\, g_i$$

- この式は、加速度が０の時は、静的なつり合い状態を表している。
- ベクトル演算子∇を使うと、

$$\rho\, \boldsymbol{a} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{T} + \rho \boldsymbol{g}$$

ガウス の発散定理

$$\int_V \mathrm{div}\, \boldsymbol{a}\, dV = \int_S \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{a} dS$$

$$\int_V \frac{\partial a_i}{\partial x_i}\, dV = \int_S a_i n_i dS$$

前形（コーシー、ティモシェンコ）

$$\boldsymbol{t(n)} = \boldsymbol{T}^T \cdot \boldsymbol{n}$$

$$\rho\, a_i = \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} + \rho\, g_i$$

$$\rho\, \boldsymbol{a} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{T} + \rho \boldsymbol{g}$$

後形（トゥルーズデル）

$$\boldsymbol{t(n)} = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{n}$$

$$\rho\, a_i = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho\, g_i$$

$$\rho\, \boldsymbol{a} = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \rho \boldsymbol{g}$$

 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

Part 3. コーシーの第1運動法則

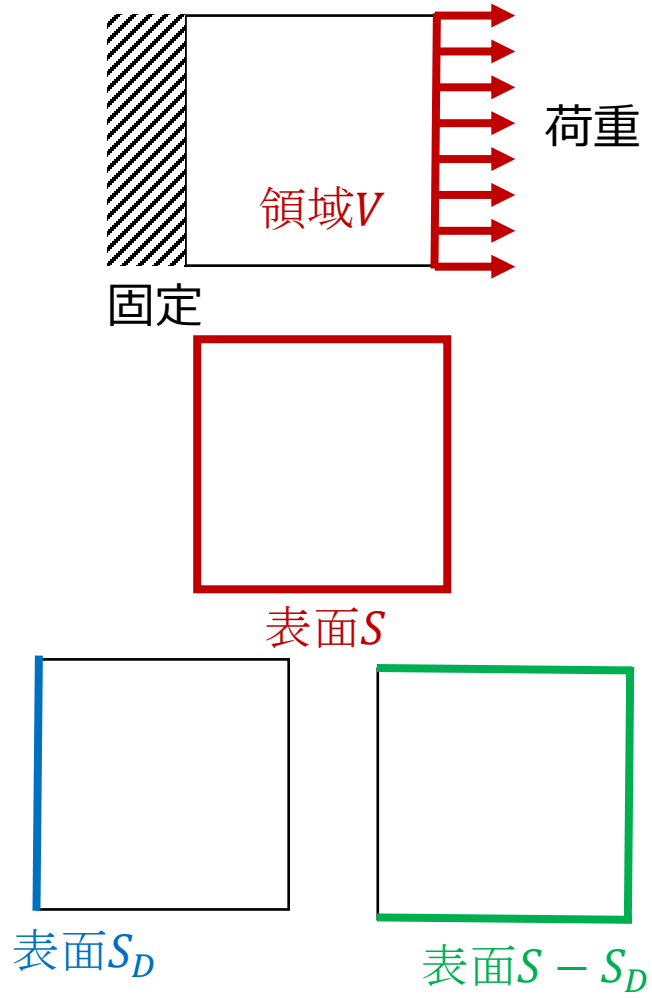
コーシーの第1運動法則を解くと物体の変形がわかる

- コーシーの第1運動法則に、以下を与えると、物体の変形がわかる。
  - 応力ひずみ関係式（構成式）
  - 形状
  - 変位境界条件
  - 応力境界条件

$$\rho\, a_j = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} + \rho\, g_j$$

$$\left(\rho\, a_i = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho\, g_i\right)$$

- 微分方程式としては、境界条件がわかると解けるタイプで、境界値問題と呼ばれる。



変位境界条件が与えられていない$S - S_D$は、明示的に荷重が与えられていない箇所も、荷重０の応力境界条件と考える

 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

Part 3. コーシーの第1運動法則
応力とひずみの関係（構成式）

- 応力とひずみの関係式を構成式という。
- では、応力が決まるとひずみが得られるのか？それともひずみが決まると応力が得られるのか？
- 基本的に連続体解析学だと、応力はひずみの関数と考える。
- 変形　⇒　変形勾配$\boldsymbol{F}$ ⇒　ひずみ。ひずみと応力を関係づけるものが構成式
- 単に応力とひずみの関係で、後述する、応力、ひずみの種類は問わない
- 組み合わせは限定される。
- 注：せん断ひずみを2倍にするのは工学ひずみ

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{11}, \varepsilon_y = \varepsilon_{22}, \varepsilon_z = \varepsilon_{33}$$
$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{12}, \gamma_{yz} = 2\varepsilon_{23}, \gamma_{zx} = 2\varepsilon_{31}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & & & \\ & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & & 0 & \\ & & \frac{1}{E} & & & \\ & & & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ & sym. & & & \frac{1}{G} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & & & \\ & 1-\nu & \nu & & 0 & \\ & & 1-\nu & & & \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & & \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2} & \\ & sym. & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}$$

- なお、この形式が、フォークト表示である。フォークトはテンソルを考案したが、その当時は2階のテンソルまでだった。構成則は、応力と、ひずみという2階のテンソル同士の関係なので、その当時は知られていない4階のテンソルになり、フォークト表示も考案した。

 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN DS & TECHNOLOGY TECHSPIRE

Part 3. コーシーの第1運動法則
フック則の由来（構成則の4階のテンソルを導く）

- 応力はひずみの関数であるとして、多項式で表す。ひずみが0のとき応力も0なので、定数項はない。

$$\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}\end{bmatrix} = a_1\begin{bmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13}\\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33}\end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13}\\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33}\end{bmatrix}^2 + a_3\begin{bmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13}\\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33}\end{bmatrix}^3 + \cdots$$

- ケーリー・ハミルトンの定理によって、マトリックスの3乗以上は２乗以下で表すことができる。ここで、ひずみが0のとき、定数項の係数が0になるので、ひずみが0のとき応力も0になる。

$$\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}\end{bmatrix} = \phi_0\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} + \phi_1\begin{bmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13}\\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33}\end{bmatrix} + \phi_2\begin{bmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13}\\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33}\end{bmatrix}^2$$

- もっとも単純な関係式として、応力とひずみが線形であることを仮定すると、フック則が得られる。λ, μはラメ の定数

$$\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}\end{bmatrix} = \lambda(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} + 2\mu\begin{bmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13}\\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33}\end{bmatrix}$$

- 材料定数には、以下の関係がある。

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN 3S & TECHNOLOGY TECHSPIRE

Part 3. コーシーの第1運動法則
構成則テンソル（4階のテンソル）

- フック則の関係式は

$$\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}\end{bmatrix} = \lambda(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} + 2\mu\begin{bmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13}\\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33}\end{bmatrix}$$

- 例えば

$$\sigma_{11} = (\lambda+2\mu)\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22} + \lambda\varepsilon_{33}$$
$$\sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12}$$
$$\vdots$$

- これに対してヤング率Eは

$$\sigma = E\varepsilon$$

- 応力ひずみ関係式も、形式的にこのような関係式に書くと記述が簡潔になる。
- 残念ながら、通常のマトリックスでは記述できない。4階のテンソルを使う。

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

- 具体的な形式は

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right)$$

- 成分で書くと

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$
$$= C_{ij11}\varepsilon_{11} + C_{ij12}\varepsilon_{12} + C_{ij13}\varepsilon_{13}$$
$$+C_{ij21}\varepsilon_{21} + C_{ij22}\varepsilon_{22} + C_{ij23}\varepsilon_{23}$$
$$+C_{ij31}\varepsilon_{31} + C_{ij23}\varepsilon_{32} + C_{ij33}\varepsilon_{33}$$

- 具体的に計算すると、

$$\sigma_{11} = (\lambda+2\mu)\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22} + \lambda\varepsilon_{33}$$
$$\sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12}$$
$$\vdots$$

 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN 3S & TECHNOLOGY TECHSPIRE

Part 3. コーシーの第1運動法則

本当に コーシーの第1運動法則で解けるのか？

- コーシーの第1運動法則 で1次元の棒の問題を解く

$$\rho\, a_i = \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} + \rho\, g_i$$

- 加速度 $a_i = 0$ 重力加速度 $g_i = 0$

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{31}}{\partial x_3} = 0$$
$$\frac{\partial T_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_3} = 0$$
$$\frac{\partial T_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} = 0$$

- ここでT_{11}以外は 0 なので、

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} = 0$$

- 微小変形だと、積分も容易

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial X_1} = 0 \rightarrow T_{11}(X_1) = const.$$

本当は、
$\frac{\partial T}{\partial x}$、$\frac{P}{H^2}$
のはず？

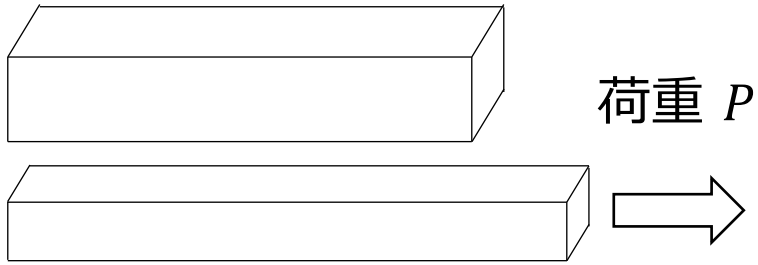
- 外力も微小変形を仮定して$\frac{P}{{H_0}^2}$とする

$$T_{11}(\text{右端}) = \frac{P}{{H_0}^2} \quad (\text{応力境界条件})$$

- 微小ひずみは、未知のuに対して$\frac{u}{L_0}$，
- ヤング率をEとして、$T_{11} = E\varepsilon = E \cdot \frac{u}{L_0}$
- （境界条件のT_{11}）＝（構成式のT_{11}）とおく

$$\frac{P}{{H_0}^2} = T_{11} = E \cdot \frac{u}{L_0} \rightarrow \frac{E{H_0}^2}{L_0} u = P \rightarrow u = \frac{PL_0}{E{H_0}^2}$$

- $\frac{E{H_0}^2}{L_0}$はバネ定数



 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

Part 3. コーシーの第1運動法則

線形解析とは

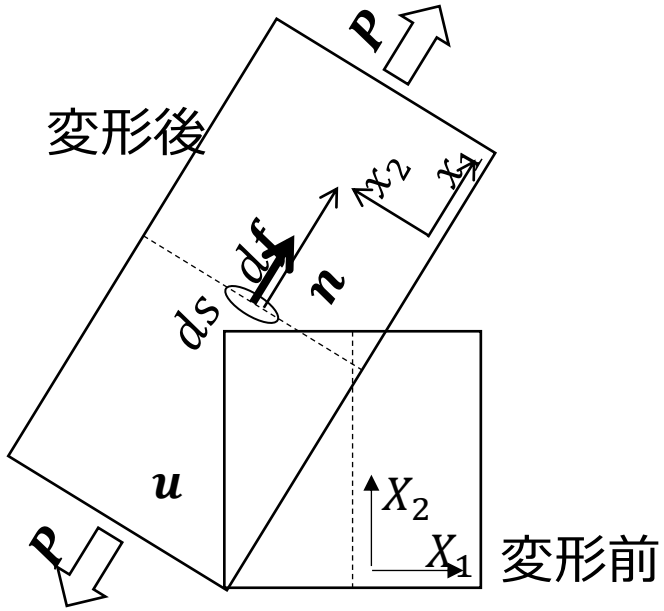
- コーシーの第1運動法則

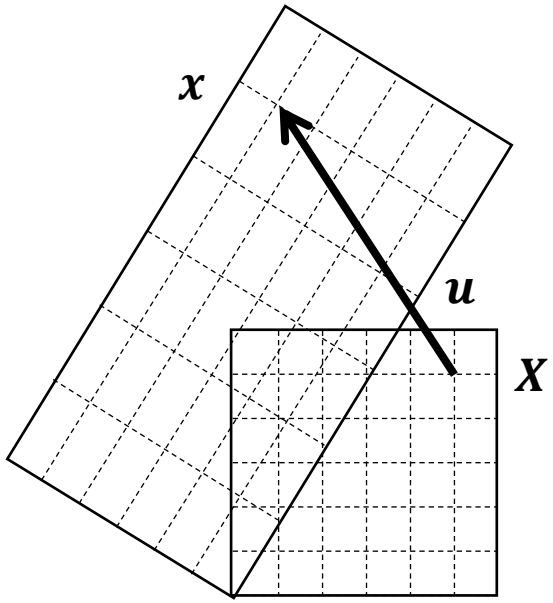
$$\rho\, a_i = \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} + \rho\, g_i$$

- 前述の例題で解いた式

$$\rho\, a_i = \frac{\partial T_{ji}}{\partial X_j} + \rho\, g_i$$

- 何をしたことになるのか？：x_jには、変位 u が含まれているので、分子分母とも変位 u が含まれることになり、非線形になる。
- そのため、変位 u が小さいと仮定して、x_jをX_jと置き換える。
- この時、さらに、ひずみとして微小ひずみ $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right)$を用いると、分母には変位 u が含まれず、容易に解けるようになる。これが線形解析





 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

Part 3. コーシーの第1運動法則

内容

- ひずみは、並進・回転に依存しない変形の尺度。
  - 微小ひずみ、即ち線形のひずみだと、回転で前述のように膨張するという問題を生じる。
  - これを解決するために、有限な回転をしても値を生じない グリーン・ラグランジュひずみ、アルマンジひずみを導入する。
- 応力テンソル (コーシー応力テンソル) は、法線方向を応力ベクトルに変換するテンソル
- コーシー応力テンソルを使って、連続体解析学の基礎式コーシーの第1運動法則を導くが、非線形性が強すぎて扱いづらい。
  - 現配置x_iでの微分を変形前配置X_iでの微分に書き換えると、第1ピオラ・キルヒホッフ応力が導かれる。
  - 第1ピオラ・キルヒホッフ応力は非対称なので、対称にしたものが第2ピオラ・キルヒホッフ応力
- 有限要素法は コーシーの第1運動法則を弱形式に変換してから近似解法で解くもの。
  - コーシー応力で記述された コーシーの第1運動法則を解くものを、アップデイティッドラグランジュ
  - 第2ピオラ・キルヒホッフ応力で記述されたコーシーの第1運動法則を解くものを、トータルラグランジュ法
  - 従って、どちらも数学的には等価。ただし、汎用コードでは内部で異なる定式化を用いる場合があり、別物と考えた方がよい。
- トータルラグランジュ でも アップデイティッドラグランジュ でも、非線形方程式である
  - ニュートン・ラフソン法を用いて非線形方程式を解くと、線形有限要素法の自然な拡張になっている。ただし反復計算が必要。⇒収束しないことがある
  - 剛性マトリックス ⇒ 接線剛性マトリックス
- 以上の定式化を1次元の棒で考えてみる。

 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN DS & TECHNOLOGY TECHSPIRE

Part 3. コーシーの第1運動法則
第１ピオラ･キルヒホッフ応力

- コーシーの第1運動法則

$$\rho\, a_i = \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} + \rho\, g_i$$

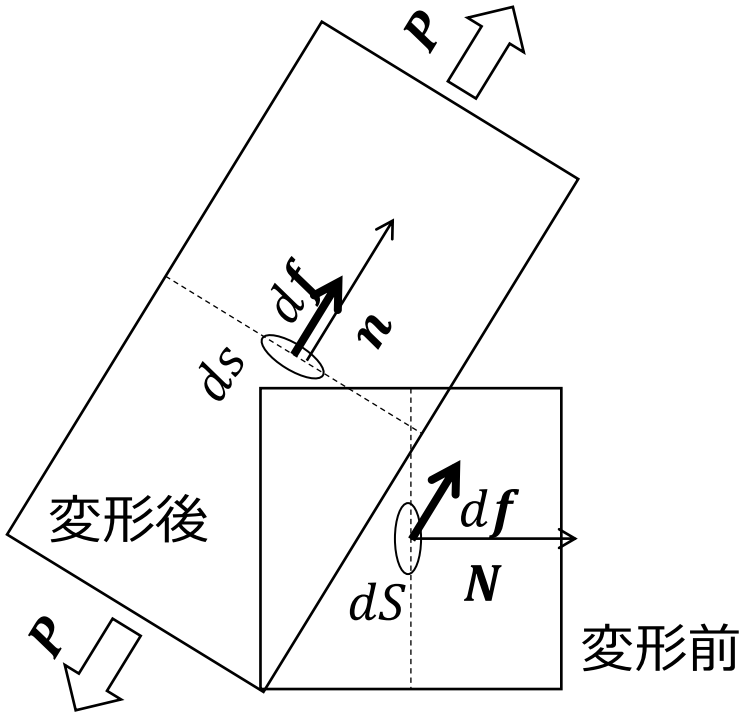
- 式展開は省略するが、$J = \det \boldsymbol{F}$、変形前の密度をρ_0として以下のような形式に変換する

$$\rho_0 a_i = \frac{\partial \Pi_{ji}}{\partial X_j} + \rho_0 g_i$$

- このΠ_{ij}は、$J = \det \boldsymbol{F}$として

$$\boldsymbol{T} = \frac{1}{J}\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\Pi}, \boldsymbol{\Pi} = J\boldsymbol{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{T}$$

- これを第１ピオラ･キルヒホッフ応力とよぶ



1次元だと、与えた荷重 F を変形前の断面積 A_0 で割ったもの。つまり第１ピオラ･キルヒホッフ応力は公称応力

$$\Pi = \frac{F}{A_0}$$

 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

Part 3. コーシーの第1運動法則
第２ピオラ･キルヒホッフ応力

- 第１ピオラ･キルヒホッフ応力は非対称になる。

$$\boldsymbol{T} = \frac{1}{J}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\Pi} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\Pi} = J\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{T}$$

- 非対称だと扱いにくいので、以下のように対称なテンソルを定義する。

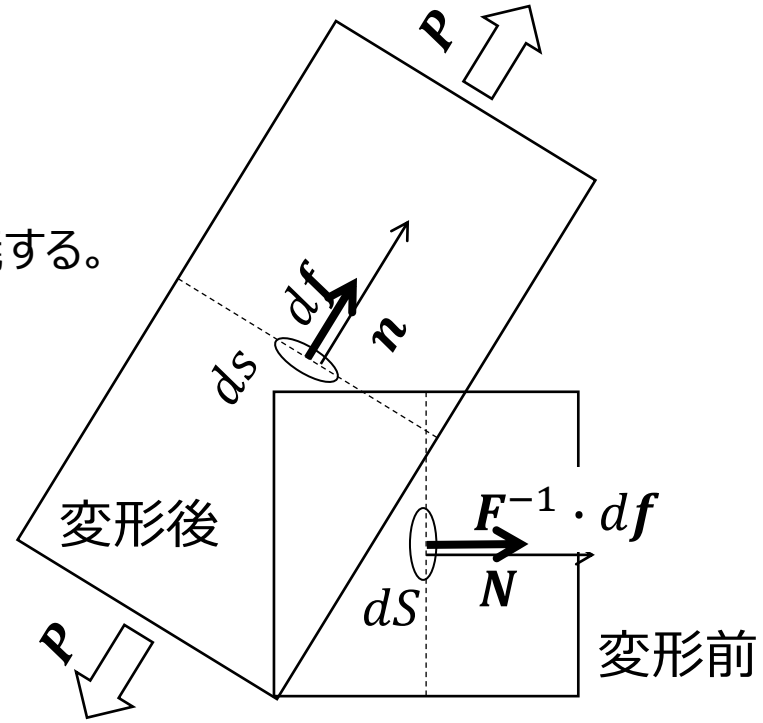
$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{\Pi}\cdot\boldsymbol{F}^{-T} = J\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{F}^{-T}$$

- これを第２ピオラ･キルヒホッフ応力と呼ぶ
- コーシーの第1運動法則

$$\rho\, a_i = \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} + \rho\, g_i$$

- 第２ピオラ･キルヒホッフ応力だと以下のような形式になる

$$\rho_0 a_i = \frac{\partial (\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{F}^T)_{ji}}{\partial \boldsymbol{X}_j} + \rho_0 g_i$$



第２ピオラ･キルヒホッフ応力の物理的意味は、希薄

 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

Part 3. コーシーの第1運動法則
まとめ　～　１次元の棒の場合（第１第２ ピオラ･キルヒホッフ応力）

- 微小ひずみ

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{L}{L_0} - 1 = \frac{u}{L_0}$$

- 変形勾配

$$F = (F_{11}) = \frac{L}{L_0}, F_{22}, F_{33} = \frac{H}{H_0}$$

- 右Cauchy-Green変形テンソル

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{F} = \left(\frac{L}{L_0}\right)^2$$

- 左Cauchy-Green変形テンソル

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{T}} = \left(\frac{L}{L_0}\right)^2$$

- グリーン･ラグランジュひずみ

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C}^2 - 1) = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{L}{L_0}\right)^2 - 1\right\}$$

- アルマンジひずみ

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}(1 - \boldsymbol{B}^{-2}) = \frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{L_0}{L}\right)^2\right\}$$

- コーシー応力テンソル

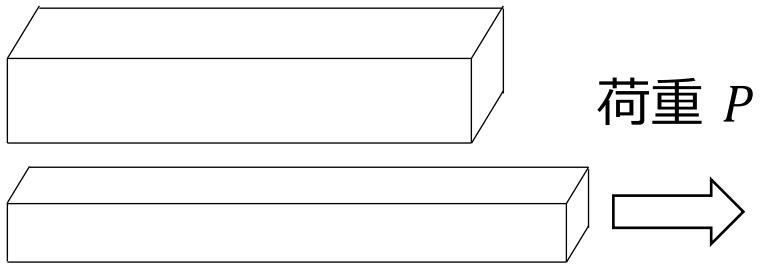
$$\boldsymbol{T} = \frac{P}{H^2}$$

- 第１ピオラ･キルヒホッフ応力

$$\boldsymbol{\Pi} = J\boldsymbol{F}^{-\boldsymbol{1}} \cdot \boldsymbol{T} = \frac{L}{L_0}\frac{h^2}{{H_0}^2}\frac{L_0}{L}\frac{P}{H^2} = \frac{P}{{H_0}^2}$$

- 第2ピオラ･キルヒホッフ応力

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{\Pi} \cdot \boldsymbol{F}^{-\boldsymbol{T}} = \frac{P}{{H_0}^2}\frac{L_0}{L}$$



長さ$L_0 \rightarrow L$
断面$H_0 \times H_0 \rightarrow H \times H$

 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

内容

０．はじめに
１．ひずみ
２．応力
３．コーシーの第１運動法則
４．仮想仕事の原理
５．非線形方程式の解法
６．超弾性体の基礎

 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN 3S & TECHNOLOGY
TECHSPIRE

Part 4. 仮想仕事の原理

内容

- ひずみは、並進・回転に依存しない変形の尺度。
  - 微小ひずみ、即ち線形のひずみだと、回転で前述のように膨張するという問題を生じる。
  - これを解決するために、有限な回転をしても値を生じない グリーン・ラグランジュひずみ、アルマンジひずみを導入する。
- 応力テンソル (コーシー応力テンソル) は、法線方向を応力ベクトルに変換するテンソル
- コーシー応力テンソルを使って、連続体解析学の基礎式コーシーの第1運動法則を導くが、非線形性が強すぎて扱いづらい。
  - 現配置x_iでの微分を変形前配置X_iでの微分に書き換えると、第1ピオラ・キルヒホッフ応力が導かれる。
  - 第1ピオラ・キルヒホッフ応力は非対称なので、対称にしたものが第2ピオラ・キルヒホッフ応力
- 有限要素法は コーシーの第1運動法則を弱形式に変換してから近似解法で解くもの。
  - コーシー応力で記述された コーシーの第1運動法則を解くものを、アップデイティッドラグランジュ
  - 第2ピオラ・キルヒホッフ応力で記述されたコーシーの第1運動法則を解くものを、トータルラグランジュ法
  - 従って、どちらも数学的には等価。ただし、汎用コードでは内部で異なる定式化を用いる場合があり、別物と考えた方がよい。
- トータルラグランジュ でも アップデイティッドラグランジュ でも、非線形方程式である
  - ニュートン・ラフソン法を用いて非線形方程式を解くと、線形有限要素法の自然な拡張になっている。ただし反復計算が必要。⇒収束しないことがある
  - 剛性マトリックス ⇒ 接線剛性マトリックス
- 以上の定式化を1次元の棒で考えてみる。

 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN 3S & TECHNOLOGY TECHSPIRE

Part 4. 仮想仕事の原理
コーシーの第1運動法則と、仮想仕事の原理

- コーシーの第1運動法則 は局所的な力のつり合いだった

$$\rho\, a_i = \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} + \rho\, g_i$$

$$\Leftarrow \int_V \rho\, a_i dV = \int_V \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} dV + \int_V \rho\, g_i\, dV \quad \text{（物体全体の力のつり合い）}$$

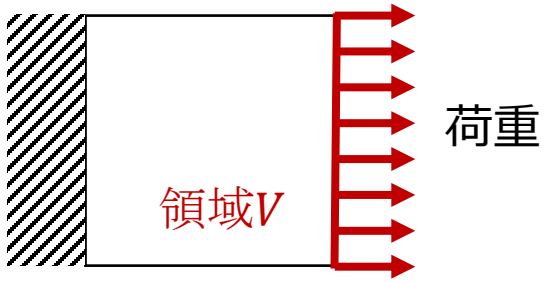
- 仮想仕事の原理を適用する

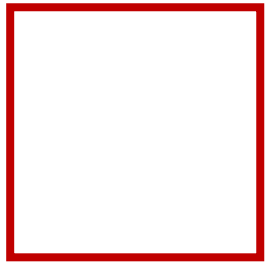
$$\int_V \rho\, \delta u_i a_i dV = \int_V \delta u_i \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} dV + \int_V \rho\, \delta u_i g_i dV$$

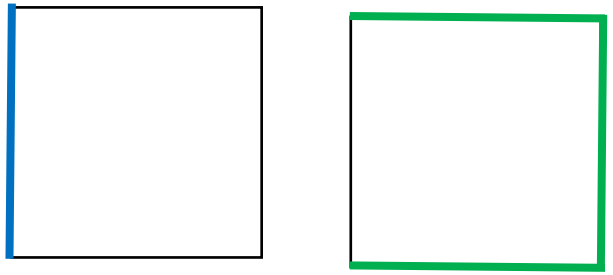
- 部分積分とガウスの発散定理を用いて計算すると

$$\int_V \rho\, \delta u_i a_i dV + \int_V \delta\varepsilon_{ij} T_{ij} dV = \int_V \rho\, \delta u_i g_i dV + \int_{S-S_D} \delta u_i t_i dS$$

$$\delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i}\right)$$







変位境界条件が与えられていない$S - S_D$は、明示的に荷重が与えられていない箇所も、荷重０の応力境界条件と考える

 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

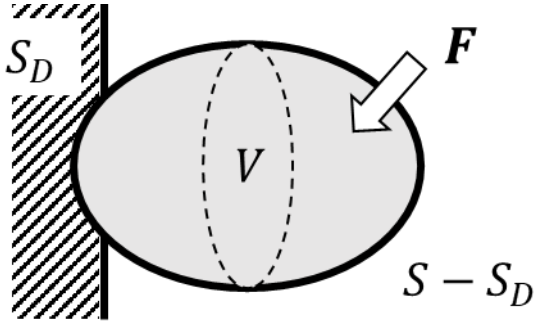
Part 4. 仮想仕事の原理
平衡方程式の有限要素定式化　境界値問題

- 解をu_iとして物体の境界S_Dではディリクレ(Dirichlet)境界条件（変位境界条件）が与えられ，それ以外の境界ではノイマン(Neumann)境界条件（応力境界条件）が与えられたとき，境界値問題は以下のように定式化される．なお境界条件として与えられる量には下線をつけて区別することとする．

$$\rho\, a_j = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} + \rho\, g_j$$

$$u_i = \underline{u}_i \text{ on } S_D$$

$$T_{ij} n_i = \underline{t}_j \text{ on } S - S_D$$



- この境界値問題を強形式とよぶ。これを変形して以下の弱形式（仮想仕事式）を導く。この弱形式をもとに有限要素法が導かれる。

$$\int_V T_{ij}\delta\varepsilon_{ij}\, dV = \int_{S-S_D} \underline{t}_i \delta u_i\, dV + \int_V (\rho\, g_i - \rho\, a_i)\, \delta u_i dV$$

$$\delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i}\right)$$

 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN 3S & TECHNOLOGY TECHSPIRE

Part 4. 仮想仕事の原理
解の候補を分離する

- ここで $\bar{u}_i$ はコーシーの第1運動法則および，ノイマン境界条件は満たすが，ディリクレ境界条件は必ずしも満たさないもの，$\bar{\bar{u}}_i$はディリクレ境界条件を満たすがコーシーの第1運動法則および，ノイマン境界条件は必ずしも満たさないものとする．$\bar{u}_i$から定義に従いひずみを求め，構成則から導かれる応力を$\bar{T}_{ij}$とすると下式が成立する．

$$\frac{\partial \bar{T}_{ij}}{\partial x_i} + \rho\, g_j - \rho\, a_j = 0$$

- この両辺に$\bar{\bar{u}}_i$をかけ，領域V全体で積分する．

$$\int_V \left(\frac{\partial \bar{T}_{ij}}{\partial x_i} + \rho\, g_j - \rho\, a_j \right) \bar{\bar{u}}_j \, dV = 0 \qquad \text{(a1)}$$

 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN 3S & TECHNOLOGY TECHSPIRE

Part 4. 仮想仕事の原理
部分積分の導入

- 次に以下の関係式を用いて部分積分を適応する.

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\bar{T}_{ij}\bar{\bar{u}}_j\right) = \frac{\partial \bar{T}_{ij}}{\partial x_i}\bar{\bar{u}}_j + \bar{T}_{ij}\frac{\partial \bar{\bar{u}}_j}{\partial x_i} \Rightarrow \frac{\partial \bar{T}_{ij}}{\partial x_i}\bar{\bar{u}}_j = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\bar{T}_{ij}\bar{\bar{u}}_j\right) - \bar{T}_{ij}\frac{\partial \bar{\bar{u}}_j}{\partial x_i}$$

- これを用いると(a1)は以下のようになる.

$$-\int_V \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\bar{T}_{ij}\bar{\bar{u}}_j\right) dV + \int_V \bar{T}_{ij}\frac{\partial \bar{\bar{u}}_i}{\partial x_i} dV = \int_V \left(\rho\, g_j - \rho\, a_j\right)\, \bar{\bar{u}}_j\, dV$$

- それぞれ左辺第1項にガウスの発散定理を用いると，以下のようになる.

$$\int_V \bar{T}_{ij}\frac{\partial \bar{\bar{u}}_j}{\partial x_i} dV = \int_S n_i \bar{T}_{ij}\bar{\bar{u}}_j\, dV + \int_V \left(\rho\, g_j - \rho\, a_j\right)\bar{\bar{u}}_j dV$$

 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN 3S & TECHNOLOGY TECHSPIRE

Part 4. 仮想仕事の原理
境界条件の考慮

- 表面積分の領域Sをディリクレ境界条件が与えられている部分とそれ以外に2分割し，かつ，$\bar{T}_{ij}$として正解T_{ij}を代入する.

$$\int_V T_{ij}\frac{\partial \bar{\bar{u}}_j}{\partial x_i}dV = \int_{S_D} \underline{t}_j \bar{\bar{u}}_j\, dV + \int_{S-S_D} \underline{t}_j \bar{\bar{u}}_j\, dV + \int_V \left(\rho\, g_j - \rho\, a_j\right)\bar{\bar{u}}_j dV$$

- ここで$\bar{\bar{u}}_i$を正解u_iと正解との差δu_iに分解する．すなわち $\bar{\bar{u}}_i = u_i + \delta u_i$を代入する.

$$\int_V T_{ij}\frac{\partial\left(u_j + \delta u_j\right)}{\partial x_i}dV = \int_{S_D} \underline{t}_j\left(u_j + \delta u_j\right) dV + \int_{S-S_D} \underline{t}_j\left(u_j + \delta u_j\right) dV + \int_V \left(\rho\, g_j - \rho\, a_j\right)\left(u_j + \delta u_j\right)dV \qquad \text{(b1)}$$

- また$\bar{\bar{u}}_i$として正解u_iを代入する.

$$\int_V T_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}dV = \int_{S_D} \underline{t}_j u_j\, dV + \int_{S-S_D} \underline{t}_j u_j\, dV + \int_V \left(\rho\, g_j - \rho\, a_j\right)u_j dV \qquad \text{(b2)}$$

- (b1)から(b2)を引く

$$\int_V T_{ij}\frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i}dV = \int_{S_D} \underline{t}_j \delta u_j\, dV + \int_{S-S_D} \underline{t}_j \delta u_j\, dV + \int_V \left(\rho\, g_j - \rho\, a_j\right)\delta u_j dV$$

 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN 3S & TECHNOLOGY TECHSPIRE

Part 4. 仮想仕事の原理
コーシーの第1運動法則の弱形式

- コーシー応力が対称なことを用い，$\delta\varepsilon_{ij}$を以下のように定義すると

$$\delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i}\right)$$

- 最終的に弱形式（仮想仕事式）は，前形，後形の差はなく以下のように得られる.

$$\int_V T_{ij}\delta\varepsilon_{ij}\, dV = \int_{S-S_D} \underline{t}_i \delta u_i\, dV + \int_V (\rho\, g_i - \rho\, a_i)\, \delta u_i dV$$

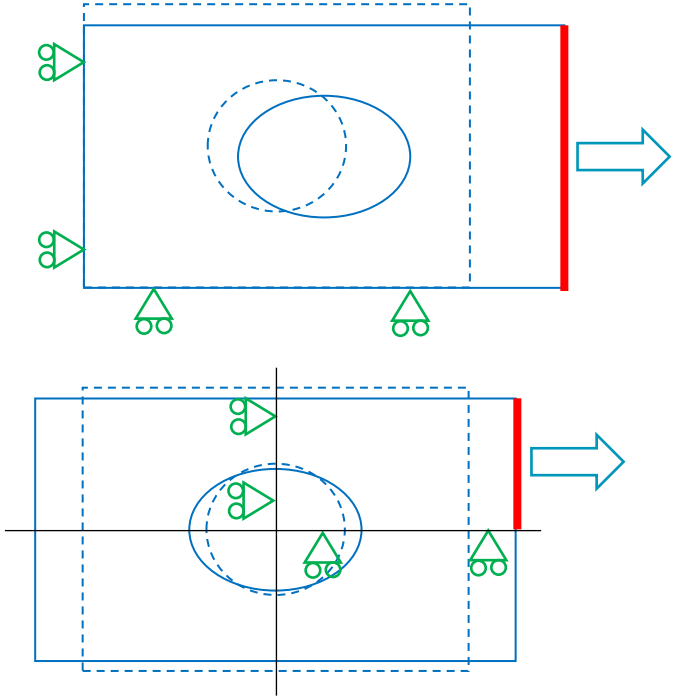
- この式展開からわかるように、δu_iは、ディリクレ境界条件を満たすu_iと$\bar{u}_i$の差であり、微小量である必要はなく、ディリクレ境界条件が与えられている領域S_Dにおいては、$\delta u_i = 0$となることがわかる。

$$\delta u_i = \bar{\bar{u}}_i - u_i$$

 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN 3S & TECHNOLOGY
TECHSPIRE

Part 4. 仮想仕事の原理
境界値問題の有限要素定式化



- コーシーの第1運動法則 に加えて以下の条件を考慮する
  - 応力ひずみ関係式（構成式）
  - 形状
  - 変位境界条件
  - 応力境界条件

$$\rho\, a_i = \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} + \rho\, g_i$$

- 有限要素定式化（仮想仕事の原理）は以下のようになる。形状と、応力境界条件は基礎式に組み込まれている。

$$\int_V \rho\, \delta u_i a_i dV + \int_V \delta\varepsilon_{ij} T_{ij} dV = \int_V \rho\, \delta u_i g_i dV + \int_{S-S_D} \delta u_i t_i dS$$

$$\delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i}\right)$$

- 変位境界条件は組み込みまれない。→自由に設定できる→例えば 1/4対称

 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN 3S & TECHNOLOGY TECHSPIRE

Part 4. 仮想仕事の原理
本当に有限要素法（仮想仕事の原理）で解けるのか？

- 慣性力と、体積力が０であることから

$$\int_V \delta\varepsilon_{ij} T_{ij} dV = \int_{S-S_D} \delta u_i t_i dS$$

- 微小変形と、1次元問題であることから未知のuに対して

$$\int_V \frac{\delta u}{L_0} E \frac{u}{L_0} dV = \int_{S-S_D} \delta u \frac{P}{{H_0}^2} dS$$

- 有限要素法の場合は、基礎式の段階で形状を考慮しているので、体積積分、面積積分を実行する必要あり。
- 被積分関数は定数なので、物体の体積、外力が作用している面積をかける

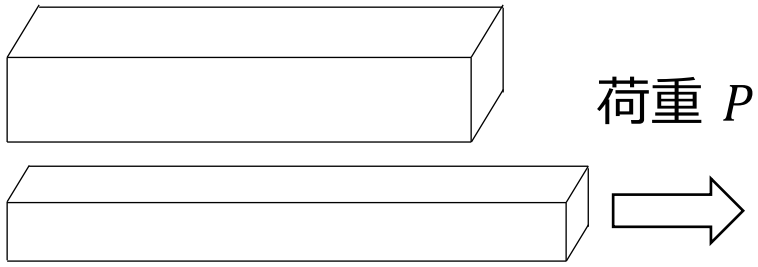
$$\frac{\delta u}{L_0} E \frac{u}{L_0} L_0 {H_0}^2 = \delta u \frac{P}{{H_0}^2} {H_0}^2$$

$$\rightarrow \delta u \left(\frac{E{H_0}^2}{L_0} u - P \right) = 0$$

- この式が、任意のδuに対して成り立つ条件（カッコ内が０）から、変位が得られる。

$$\frac{E{H_0}^2}{L_0} u = P \rightarrow u = \frac{PL_0}{E{H_0}^2}$$

- $\frac{E{H_0}^2}{L_0}$はバネ定数だが、一般化すると剛性マトリックスと呼ばれる。
- $\frac{E{H_0}^2}{L_0} u$は外力Pと釣り合っていると考え、内力と呼ぶ



長さ$L_0 \rightarrow L$
断面$H_0 \times H_0 \rightarrow H \times H$

 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

Part 4. 仮想仕事の原理
トータルラグランジュとアップデイティッドラグランジュに関する疑問

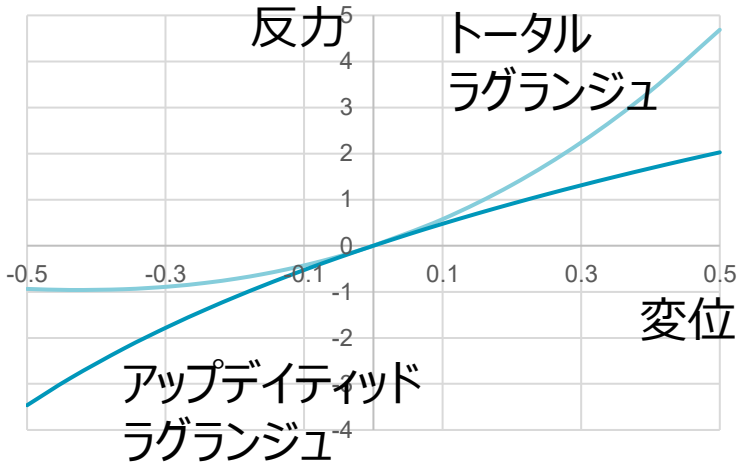
- 最も多いものが、「汎用コードでは両方選択できるのですが、どこが違うのですか？」
- 専門の研究者の答え：数学的には等価です。
- 深まる疑問：しかし、実際には、挙動が違うのですが、どう説明すればよいのでしょうか。
- 答え：数学的に等価にするには、そもそも、それなりの手間がかかります。さらに手間をかけても、得られるメリットは、プログラマーとして、確実にデバッグできたと確信できることぐらいです。
  - 自分でコードを書く場合、トータルラグランジュ法は線形のコードがあったとして、その 5 割増し程度の拡張でできますが、アップデイティッドラグランジュ法は、トータルラグランジュ法のコードがあったとして、さらにその 5 割増しの手間がかかります。
- 汎用コードのユーザー様が重視することは、理屈の正確さよりも「答えが出てなんぼ」です。
- 従って、汎用コードには「様々な答えが出るための工夫」が取り込まれます。
  - 例えば、塑性加工のように、変形が極端に大きい場合リメッシュは不可欠ですが、アップデイティッドラグランジュ法のみ対応の場合が多いと思います。
- つまり、汎用コードの トータルラグランジュ法と アップデイティッドラグランジュ法は別物です。従って、同じ物性を与えても、挙動が異なることがあります。

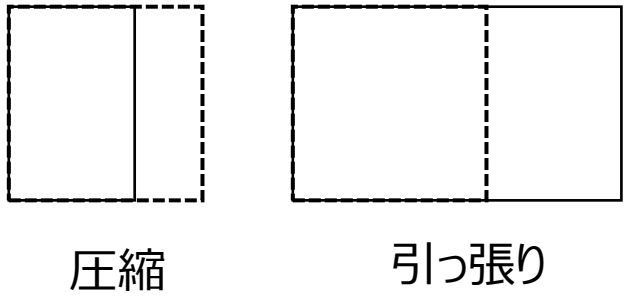
 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN 3S & TECHNOLOGY
TECHSPIRE

Part 4. 仮想仕事の原理
単純引っ張りの非線形解析

- 1辺が1の立方体の引っ張りと圧縮
- 線形弾性体で、ヤング率5、ポアソン比 0 とする。
- トータルラグランジュと更新ラグランジュで解析する
- このときの、変位と反力を比較する。
- トータルラグランジュは3次関数になる。
- これに対してアップデイティッドラグランジュは上に凸になる。（対数関数）
- 超弾性体のネオフック体とアップデイティッドラグランジュは類似した応力ひずみ関係になる。対してトータルラグランジュではこれ以上圧縮すると、極値を持ち、その後増加するという、力学的には不適切な挙動を示す。





 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

Part 4. 仮想仕事の原理

コーシーの第1運動法則の厳密な弱形式からアップデイティッドラグランジュ法の基礎式が得られる

- コーシーの第1運動法則

$$\rho\, a_i = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho\, g_i \text{ あるいは} \rho_0 a_i = \frac{\partial (\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{F}^T)_{ij}}{\partial \boldsymbol{X}_j} + \rho_0 g_i$$

- これを厳密に弱形式にすると、変形後の体積$\boldsymbol{V}$、変形後の表面積$\boldsymbol{S}$として

$$\int_V \rho\, \delta u_j a_j dV + \int_{\boldsymbol{V}} T_{ij}\delta A_{ij} dV = \int_S t_i \delta u_i dS + \int_V \rho g_i \delta u_i dV$$

$$\delta A_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i}\right)$$

- この式をもとに有限要素法を導入して境界値問題を解くことをアップデイティッドラグランジュ法と呼ぶ
- 微小変形の場合、領域積分はそれぞれ、変形前の体積$\boldsymbol{V_0}$、変形前の表面積$\boldsymbol{S_0}$で、コーシー応力は微小ひずみの関数、かつ、以下のようにおいて線形にする。

$$\delta A_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial X_i}\right)$$

 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN 3S & TECHNOLOGY TECHSPIRE

Part 4. 仮想仕事の原理

アップデイティッドラグランジュ法を厳密に書き換えるとトータルラグランジュ法の基礎式が得られる

- 前述のアップデイティッドラグランジュ法の基礎式

$$\int_V \rho\, \delta u_j a_j dV + \int_V T_{ij}\delta A_{ij} dV = \int_S t_i \delta u_i dS + \int_V \rho g_i \delta u_i dV$$

$$\delta A_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i}\right)$$

- この式の参照配置を変形前に変更すると、変形前の体積$\boldsymbol{V_0}$、変形前の表面積$\boldsymbol{S_0}$として以下のようになる。

$$\int_{V_0} \rho_0\, \delta u_j a_j dV + \int_{V_0} S_{ij}\delta E_{ij} dV = \int_{S_0} t_{0i} \delta u_i dS + \int_{V_0} \rho_0 g_i \delta u_i dV$$

$$\delta E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial \delta u_k}{\partial X_i}\frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\frac{\partial \delta u_k}{\partial X_j}\right)$$

- この式をもとに有限要素法を導入して境界値問題を解くことをトータルラグランジュ法と呼ぶ
- 一般にS_{ij}は、E_{ij}の関数で、変位 $\boldsymbol{u}$ に対して非線形

 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

TECHSPIRE HUMAN 3S & TECHNOLOGY

Part 4. 仮想仕事の原理
コーシーの第1運動法則と、仮想仕事の原理

- コーシーの第1運動法則 は力のつり合いだった

$$\rho\, a_i = \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} + \rho\, g_i \quad \text{（局所的な力のつり合い）}$$

$$\Leftarrow \int_V \rho\, a_i dV = \int_V \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} dV + \int_V \rho\, g_i\, dV \quad \text{（物体全体の力のつり合い）}$$

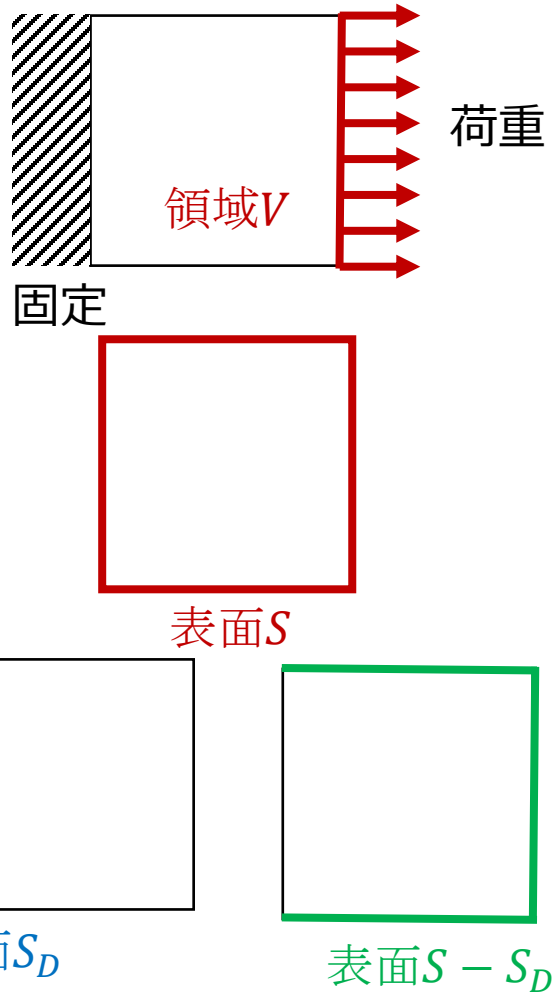
- 仮想仕事の原理を適用する

$$\int_V \rho\, \delta u_i a_i dV = \int_V \delta u_i \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} dV + \int_V \rho\, \delta u_i g_i dV$$

- 部分積分とガウスの発散定理を用いて計算すると

$$\int_V \rho\, \delta u_i a_i dV + \int_V \delta\varepsilon_{ij} T_{ij} dV = \int_V \rho\, \delta u_i g_i dV + \int_{S-S_D} \delta u_i t_i dS$$

$$\delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i}\right)$$



変位境界条件が与えられていない$S - S_D$は、明示的に荷重が与えられていない箇所も、荷重０の応力境界条件と考える

 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

Part 4. 仮想仕事の原理
1次元の棒の場合（トータルラグランジュ法）（１）

- 慣性力、体積力＝０なので

$$\int_{V_0} S_{ij}\delta E_{ij}dV = \int_{S_0} t_{0i}\delta u_i dS$$

- $\delta E = \frac{\delta L \cdot L}{{L_0}^2}$であることを用いて解けるところまで進むことにする

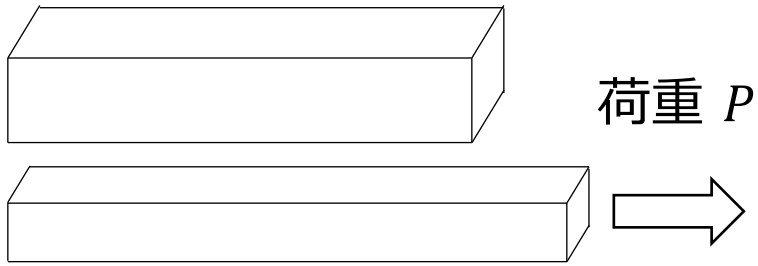
$$\int_{V_0} \delta ES\, dV = \frac{\delta L \cdot L}{{L_0}^2} S\left({H_0}^2 L_0\right)$$

$$\int_{S_0} t_{0i}\delta u_i dS = \delta u \frac{P}{{H_0}^2} {H_0}^2$$

- $\delta L = \delta u$より、Sを求めることはできる

$$\delta u\left(\frac{L}{{L_0}^2} S\left({H_0}^2 L_0\right) - P\right) = 0 \rightarrow S = \frac{PL_0}{{H_0}^2 L}$$

- 線形と同様に、$\frac{L}{{L_0}^2} S\left({H_0}^2 L_0\right)$は内力



 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

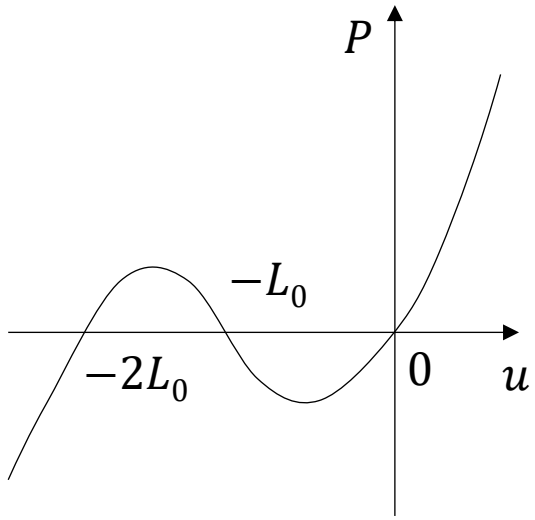
Part 4. 仮想仕事の原理
1次元の棒の場合（トータルラグランジュ法）（２）

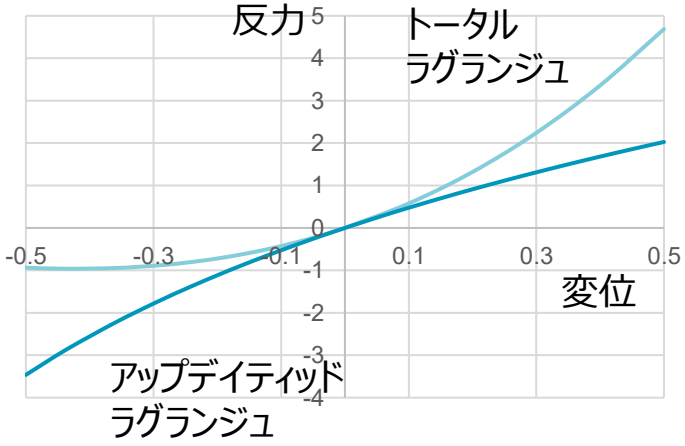
- 第2ピオラ・キルヒホッフ応力$S = \frac{PL_0}{{H_0}^2 L}$
- 構成式は$S = CE = \frac{C}{2}\left\{\left(\frac{L}{L_0}\right)^2 - 1\right\}$とする。
- 整理するとPはLの3次関数になっている。

$$\frac{PL_0}{{H_0}^2 L} = S = \frac{C}{2}\left\{\left(\frac{L}{L_0}\right)^2 - 1\right\}$$

$$\rightarrow P = \frac{{H_0}^2 L}{L_0} S = \frac{C{H_0}^2}{2}\frac{L}{L_0}\left\{\left(\frac{L}{L_0}\right)^2 - 1\right\} = \frac{C{H_0}^2}{2}\frac{L}{L_0}\left(\frac{L}{L_0} + 1\right)\left(\frac{L}{L_0} - 1\right)$$

- PはL, u に対して線形ではない＝非線形
- $P = 0$は、$L = 0(u = -L_0), L = -L_0(u = -2L_0), L = L_0(u = 0)$ のとき
- $u > 0$ならば単調増加
- ポアソン比0の単純引張の有限要素解と一致





 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

Part 4. 仮想仕事の原理
1次元の棒の場合（アップデイティッドラグランジュ法）（１）

- トータルラグランジュ法では構成式は

$$S = CE = \frac{C}{2}\left\{\left(\frac{L}{L_0}\right)^2 - 1\right\}$$

- では アップデイティッドラグランジュ法にした時は、単純に以下のように置き換えればよいだろうか？

$$T = CA = \frac{C}{2}\left\{1 - \left(\frac{L_0}{L}\right)^2\right\}$$

- 計算するとわかるが、成立しない
- Sから$T = \frac{1}{J}FSF^T$を用いて計算すると

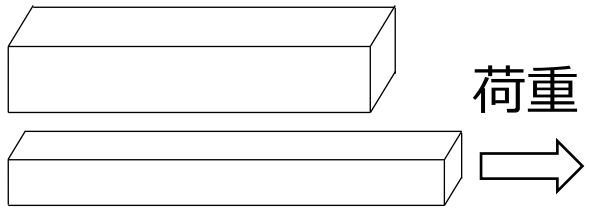
$$T = \frac{L_0}{L}\frac{{H_0}^2}{H^2}\frac{L}{L_0}\left[\frac{C}{2}\left\{\left(\frac{L}{L_0}\right)^2 - 1\right\}\right]\frac{L}{L_0}$$

- 用いる関係式は1次元だと

$$E = F^T AF$$
$$S = JF^{-1}TF^{-T}$$
$$S = CE \rightarrow JF^{-1}TF^{-T} = CF^T AF$$
$$T = \frac{1}{J}(CFFFF)A$$

- 即ちトータルラグランジュ法の構成式$S = CE$に一致させるためには$T = \bar{C}A$として以下のようになる

$$\bar{C} = \frac{1}{J}FFFFC$$



長さ$L_0 \rightarrow L$
断面$H_0 \times H_0 \rightarrow H \times H$

 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

Part 4. 仮想仕事の原理
1次元の棒の場合（アップデイティッドラグランジュ法）（２）

- 慣性力、体積力＝０なので

$$\int_V T_{ij}\delta A_{ij}dV = \int_S t_i \delta u_i dS$$

- $\delta A = \frac{\delta L}{L}$であることを用いて解けるところまで進むことにする

$$\int_V \delta AT\, dV = \frac{\delta L}{L} T(H^2 L)$$

$$\int_S t_i \delta u_i dS = \delta u \frac{P}{h^2} h^2$$

- $\delta L = \delta u$より、$\boldsymbol{T}$を求めることはできる

$$\delta u(TH^2 - P) = 0 \rightarrow T = \frac{P}{H^2}$$

- 線形と同様に、TH^2は内力。また $T = P/H^2$ となるので真応力である。

- 構成式は$T = \frac{1}{J}(CFFFF)A$とする。

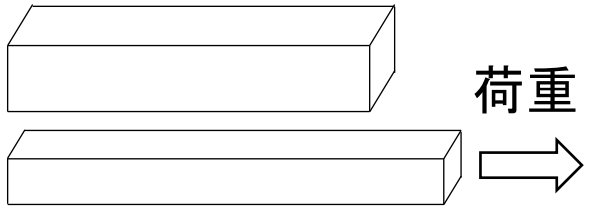
$$\frac{P}{h^2} = \frac{L_0}{L}\frac{{H_0}^2}{H^2}\frac{L}{L_0}\frac{L}{L_0}\frac{L}{L_0}\frac{L}{L_0}\frac{C}{2}\left\{1-\left(\frac{L_0}{L}\right)^2\right\}$$

$$P = \frac{C{H_0}^2}{2}\frac{L}{L_0}\left\{\left(\frac{L}{L_0}\right)^2 - 1\right\}$$

- 当然ながらトータルラグランジュ法の式と一致する

$$\rightarrow P = \frac{C{H_0}^2}{2}\frac{L}{L_0}\left\{\left(\frac{L}{L_0}\right)^2 - 1\right\} = \frac{C{H_0}^2}{2}\frac{L}{L_0}\left(\frac{L}{L_0}+1\right)\left(\frac{L}{L_0}-1\right)$$

- $P = 0$は、$L = 0(u = -L_0), L = -L_0(u = -2L_0), L = L_0(u = 0)$ のとき
- $u > 0$ならば単調増加



荷重 P

長さ$L_0 \rightarrow L$
断面$H_0 \times H_0 \rightarrow H \times H$

 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

Part 4. 仮想仕事の原理
1次元の棒の場合（アップデイティッドラグランジュ法）（３）

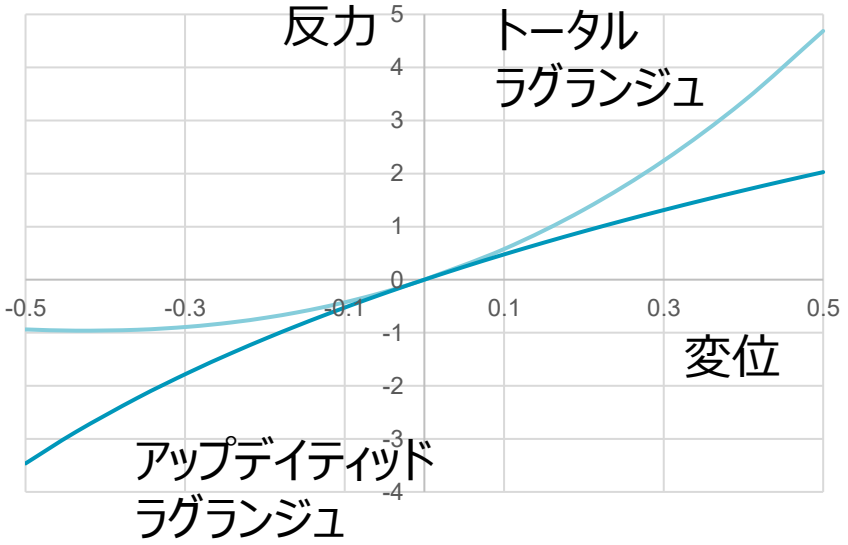
- $\delta L = \delta u$より、$\boldsymbol{T}$を求めることはできる

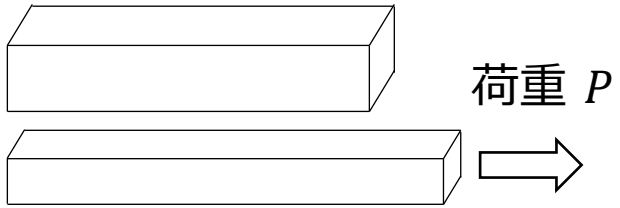
$$\delta u(TH^2 - P) = 0 \rightarrow T = \frac{P}{H^2}$$

- 線形と同様に、TH^2は内力。また $T = P/H^2$ となるので真応力である。
- 構成式を実際のアップデイティッドラグランジュ法で使われている対数ひずみを用いた構成式にすると、ポアソン比0の単純引張の有限要素解と一致する

$$\boldsymbol{T} = C \ln \boldsymbol{V}$$

$$P = TH^2 = Ch^2 \ln \frac{L}{L_0}$$





長さ$L_0 \rightarrow L$
断面$H_0 \times H_0 \rightarrow H \times H$

 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

TECHSPIRE HUMAN 3S & TECHNOLOGY

Part 4. 仮想仕事の原理
仕事共役（１）

- コーシーの第1運動法則の両辺に対して速度$\boldsymbol{v}$と内積を取り物体の領域全体で積分すると前形，後形それぞれ以下のようになる.
  - 前形：

$$\int_V \rho\, a_j v_j \, dV = \int_V \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} + \rho\, g_j \right) v_j dV$$

  - 後形：

$$\int_V \rho\, a_i v_i \, dV = \int_V \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho\, g_i \right) v_i dV$$

- 式展開の詳細は，コーシーの第1運動法則から仮想仕事式を導く場合と同様にして，前形後形関係なく以下のような関係式を得ることができる.

$$\left(\int_V \frac{1}{2} \rho\, v_i v_i \, dV \right)^{\cdot} = \int_V T_{ij} D_{ij} dV + \int_{S_D} t_i \bar{\bar{u}}_i \, dV + \int_{S-S_D} t_i \bar{\bar{u}}_i \, dV + \int_V \rho\, g_i v_i dV$$

 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

Part 4. 仮想仕事の原理
仕事共役（２）

- 関係式

$$\left(\int_V \frac{1}{2}\rho\, v_i v_i\, dV\right)^{\cdot} = \int_V T_{ij} D_{ij} dV + \int_{S_D} t_i \bar{\bar{u}}_i\, dV + \int_{S-S_D} t_i \bar{\bar{u}}_i\, dV + \int_V \rho\, g_i v_i dV$$

- 左辺は物体の運動エネルギーの変化率を表し，右辺第1項は応力のなす仕事率，第2項以降は外力のなす仕事率である．
- これをもとに，変形前配置の単位体積当たりの仕事率は$J = \det F_{ij}$として以下のようにあらわすことができる．

$$\dot{W} = J T_{ij} D_{ij} = J\boldsymbol{T}:\boldsymbol{D} = \mathrm{tr}(J\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{D})$$

- 上式では$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^T$を用いている．この$\dot{W}$はさらに次のような応力とひずみ速度の仕事共役な関係を用いて表すことができる．

$$\dot{W} = \hat{\boldsymbol{T}}:\boldsymbol{D} = \boldsymbol{\Pi}^T:\dot{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{S}:\dot{\boldsymbol{E}}$$

- すなわち，キルヒホッフ応力$\hat{T}_{ij}(= J T_{ij})$とストレッチングテンソルD_{ij}，第1ピオラ・キルヒホッフ応力Π_{ij}と変形こう配の速度$\dot{F}_{ij}$，第2ピオラ・キルヒホッフ応力S_{ij}とグリーン・ラグランジュひずみの速度$\dot{E}_{ij}$が仕事共役である．

 | Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN 3S & TECHNOLOGY TECHSPIRE

Part 4. 仮想仕事の原理
仕事共役（３）

- 一般のテンソルについて以下の関係が成立する.

$$\boldsymbol{A}:\boldsymbol{B} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{B}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}^T) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{B}^T \cdot \boldsymbol{A}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}^T)$$

- これを用いると

$$\dot{W} = \mathrm{tr}(J\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{D}) = \mathrm{tr}\left(J\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{F}^{-T} \cdot \dot{\boldsymbol{E}} \cdot \boldsymbol{F}^{-1}\right)$$
$$= \mathrm{tr}\left(J\boldsymbol{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{F}^{-T} \cdot \dot{\boldsymbol{E}}\right) = \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{S} \cdot \dot{\boldsymbol{E}}\right) = \boldsymbol{S}:\dot{\boldsymbol{E}}$$

$$\dot{W} = \mathrm{tr}(J\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{D}) = \mathrm{tr}(J\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{L}) = \mathrm{tr}\left(J\boldsymbol{T} \cdot \dot{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{F}^{-1}\right)$$
$$= \mathrm{tr}\left(J\boldsymbol{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \dot{\boldsymbol{F}}\right) = \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\Pi} \cdot \dot{\boldsymbol{F}}\right) = \boldsymbol{\Pi}^T:\dot{\boldsymbol{F}}$$

 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN 3S & TECHNOLOGY
TECHSPIRE

Part 4. 仮想仕事の原理

棒の例題：仕事率の意味通り、荷重に変形速度をかけて体積で割っている

- 変形勾配

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \frac{L}{L_0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{H}{H_0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{H}{H_0} \end{bmatrix}$$

- 体積変化率

$$J = \frac{L}{L_0}\frac{H^2}{H_0^2}$$

- コーシー応力

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \frac{P}{H^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 変形勾配の速度

$$\dot{F}_{11} = \frac{\dot{L}}{L_0}$$

- 速度勾配テンソル

$$\boldsymbol{L} = \dot{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{F}^{-1}$$

$$L_{11} = \dot{F}_{11} \cdot F_{11}^{-1} = \frac{\dot{L}}{L_0}\frac{L_0}{L} = \frac{\dot{L}}{L}$$

- ストレッチングテンソル

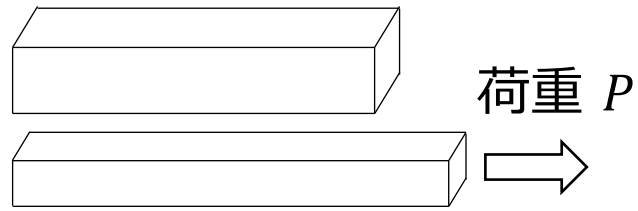
$$\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}^T)$$

$$D_{11} = L_{11} = \frac{\dot{L}}{L}$$

- 仕事率

$$\dot{W} = JT_{11}D_{11}$$

$$= \frac{L}{L_0}\frac{H^2}{H_0^2}\frac{P}{H^2}\frac{\dot{L}}{L} = \frac{P\dot{L}}{L_0H_0^2}$$



長さ$L_0 \rightarrow L$
断面$H_0 \times H_0 \rightarrow H \times H$

 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

Part 4. 仮想仕事の原理

棒の例題：仕事率の意味通り、荷重に変形速度をかけて体積で割っている

- 第２ピオラ・キルヒホッフ応力

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{F}^{-T}$$

$$S_{11} = JF_{11}^{-1} \cdot T_{11} \cdot F_{11}^{-T}$$

$$= \frac{L}{L_0}\frac{H^2}{H_0^2}\frac{L_0}{L}\frac{P}{H^2}\frac{L_0}{L} = \frac{P}{H_0^2}\frac{L_0}{L}$$

- グリーン・ラグランジュひずみの速度

$$\dot{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{F}^T \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{F}$$

$$\dot{E}_{11} = \frac{L}{L_0}\frac{\dot{L}}{L}\frac{L}{L_0} = \frac{L\dot{L}}{L_0^2}$$

- 仕事率は、コーシー応力を用いた場合と一致する

$$\dot{W} = S_{11}\dot{E}_{11}$$

$$= \frac{P}{H_0^2}\frac{L_0}{L}\frac{L\dot{L}}{L_0^2} = \frac{P\dot{L}}{L_0H_0^2}$$

- 第１ピオラ・キルヒホッフ応力

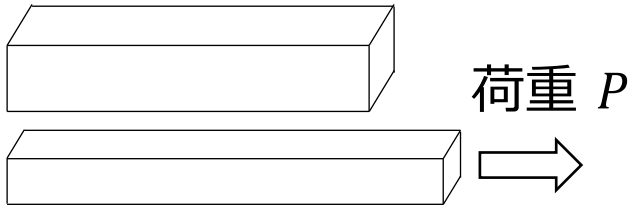
$$\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{T}$$

$$\Pi_{11} = \frac{L}{L_0}\frac{H^2}{H_0^2}\frac{L_0}{L}\frac{P}{H^2} = \frac{P}{H_0^2}$$

- 仕事率は、コーシー応力を用いた場合と一致する

$$\dot{W} = \Pi_{11}\dot{F}_{11}$$

$$= \frac{P}{H_0^2}\frac{\dot{L}}{L_0} = \frac{P\dot{L}}{L_0H_0^2}$$



長さ$L_0 \rightarrow L$

断面$H_0 \times H_0 \rightarrow H \times H$

 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

内容

０．はじめに
１．ひずみ
２．応力
３．コーシーの第１運動法則
４．仮想仕事の原理
５．非線形方程式の解法
６．超弾性体の基礎

 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

Part 5. 非線形方程式の解法

内容

- ひずみは、並進・回転に依存しない変形の尺度。
  - 微小ひずみ、即ち線形のひずみだと、回転で前述のように膨張するという問題を生じる。
  - これを解決するために、有限な回転をしても値を生じない グリーン・ラグランジュひずみ、アルマンジひずみを導入する。
- 応力テンソル (コーシー応力テンソル) は、法線方向を応力ベクトルに変換するテンソル
- コーシー応力テンソルを使って、連続体解析学の基礎式コーシーの第1運動法則を導くが、非線形性が強すぎて扱いづらい。
  - 現配置x_iでの微分を変形前配置X_iでの微分に書き換えると、第1ピオラ・キルヒホッフ応力が導かれる。
  - 第1ピオラ・キルヒホッフ応力は非対称なので、対称にしたものが第2ピオラ・キルヒホッフ応力
- 有限要素法は コーシーの第1運動法則を弱形式に変換してから近似解法で解くもの。
  - コーシー応力で記述された コーシーの第1運動法則を解くものを、アップデイティッドラグランジュ
  - 第2ピオラ・キルヒホッフ応力で記述されたコーシーの第1運動法則を解くものを、トータルラグランジュ法
  - 従って、どちらも数学的には等価。ただし、汎用コードでは内部で異なる定式化を用いる場合があり、別物と考えた方がよい。
- トータルラグランジュ でも アップデイティッドラグランジュ でも、非線形方程式である
  - ニュートン・ラフソン法を用いて非線形方程式を解くと、線形有限要素法の自然な拡張になっている。ただし反復計算が必要。⇒収束しないことがある
  - 剛性マトリックス ⇒ 接線剛性マトリックス
- 以上の定式化を1次元の棒で考えてみる。

 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN 3S & TECHNOLOGY TECHSPIRE

Part 5. 非線形方程式の解法

非線形解法の特徴

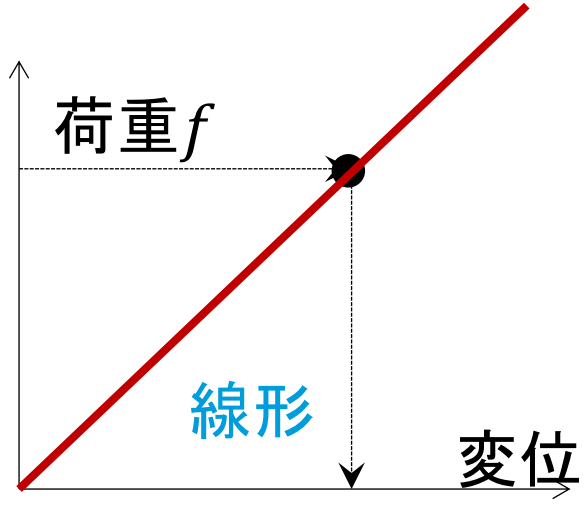
- 線形の方程式は

$$y = ax$$

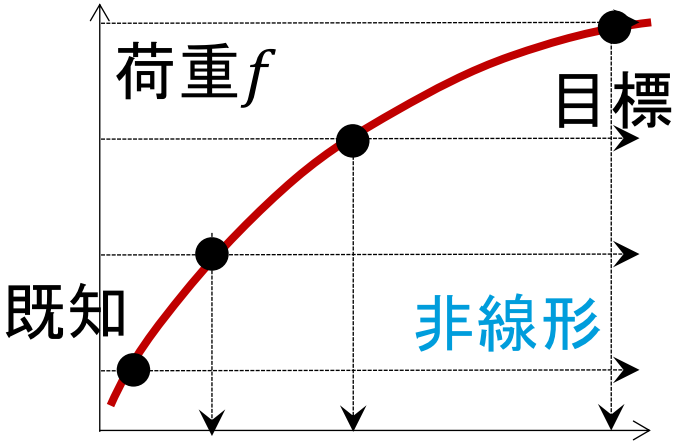
- CAEの問題は、与えられた f について、$f = ax$ を満たす x を求めよ、という形式
- $x = f/a$ ですぐに求められる。（四則演算しか使わない）
- 非線形は例えば

$$y = ax^2$$

- CAEの問題は、与えられた f について、$f = ax^2$を満たす x を求めよ、という形式
- $x = \sqrt{f/a}$ は簡単な四則演算では無理。
- 最終段階の解は、わかっているところからスタートして、段階的に求めていく必要がある。
- 増分解法



1回の計算で解が得られる



段階的に進めるしかない

103| Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

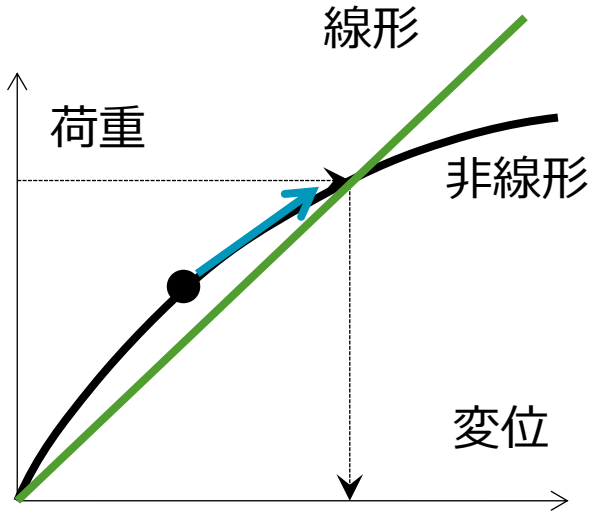
TECHSPIRE

Part 5. 非線形方程式の解法
非線形方程式の解法～ニュートン・ラフソン法

- 非線形の方程式は、変位を与えると対応する荷重がわかる、というタイプ。

$$f(x) = a$$

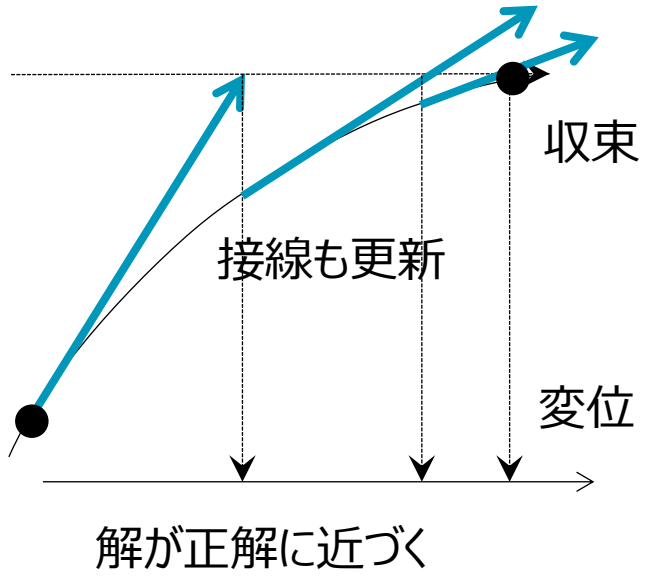
- 解きたい問題は、荷重を与えて対応する変位を求めること。



- 線形なら、連立一次方程式を解くことにより可能
- 基本方針：すでにわかっている変位（初期値は無変形）からスタートして、少しずつ（線形に近い範囲）先に進むこと。
- 数学の言葉だと、Taylor 展開、2項目まで

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{df(x)}{dx}\Delta x + \frac{d^2 f(x)}{dx^2}\Delta x^2 + \cdots$$

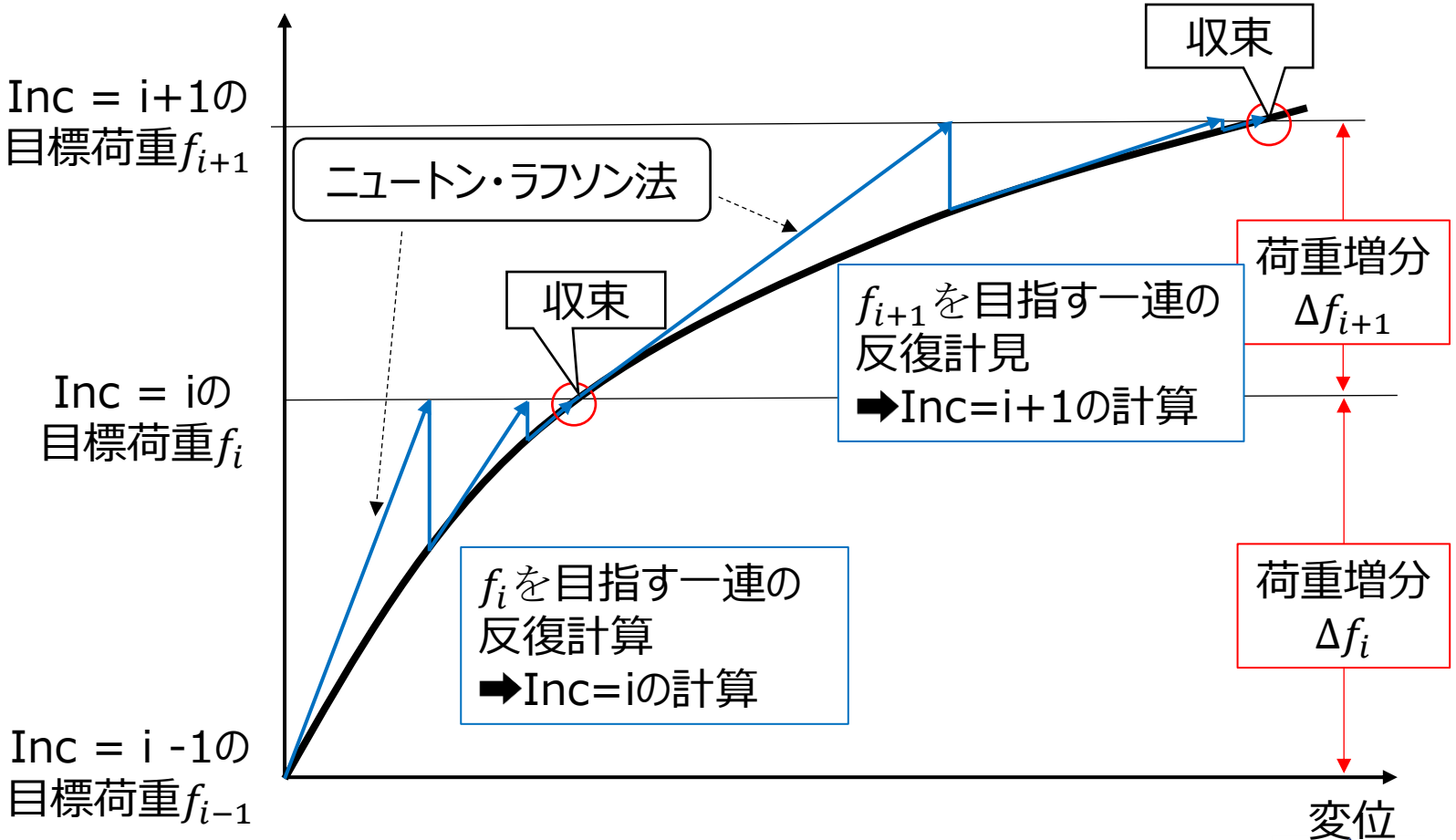
- 新たに必要なものは接線　⇒　接線剛性マトリックス



 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

Part 5. 非線形方程式の解法
荷重増分法とニュートン・ラフソン法の組み合わせ

- 各荷重ステップでニュートン・ラフソン法により、解を求める
- 次の荷重ステップでは、前のステップの収束値を正解として計算する
- 前のステップの収束値に誤差があると、誤差が蓄積する可能性がある。



105| Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

Part 5. 非線形方程式の解法
ニュートン・ラフソン法で$\sqrt{2}$を求める

- ニュートン・ラフソン法の例として、$f(x) = x^2$ として、$f(x) = 2$ を満たす解として$x = \sqrt{2}$ を求める計算を示す。
- 初期値として$x = 1, y = 1$から始める。
- つまり下式で$\Delta x^{(1)}$を求めると、$\sqrt{2}$の近似として、$1 + \Delta x^{(1)}$が得られる。

$$2 = f\left(1 + \Delta x^{(1)}\right) \approx f(1) + \frac{df(1)}{dx}\Delta x^{(1)}$$

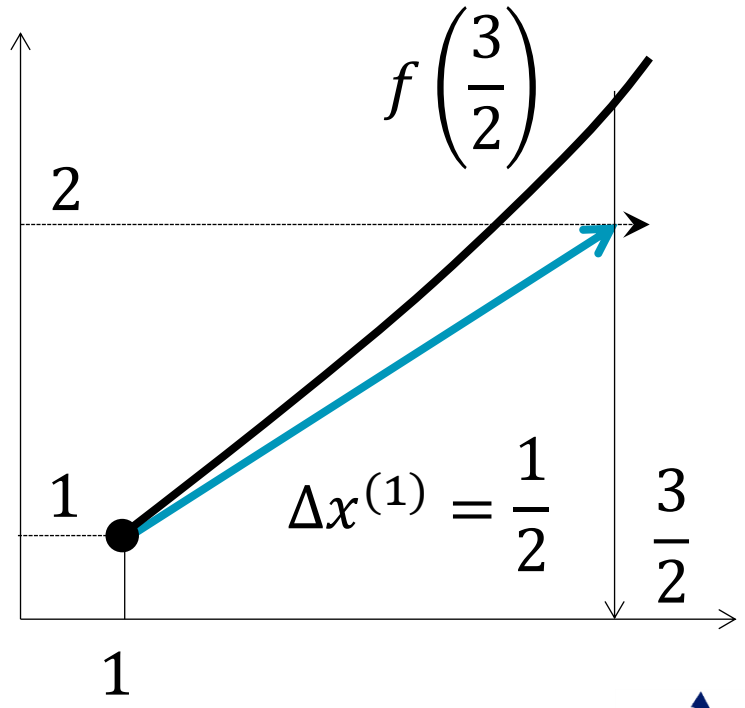
$$\frac{df(1)}{dx}\Delta x^{(1)} = 2 - f(1)$$

- 以下の計算により$x^{(1)} = 1 + \Delta x^{(1)} = \frac{3}{2} = 1.5$ となる。

$$f(x) = x^2, \frac{df(x)}{dx} = 2x \rightarrow \frac{df(1)}{dx} = 2$$

$$\frac{df(1)}{dx}\Delta x^{(1)} = 2 - f(1) \rightarrow 2\Delta x^{(1)} = 2 - 1$$

$$\rightarrow \Delta x^{(1)} = \frac{1}{2}$$



 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN 3S & TECHNOLOGY TECHSPIRE

Part 5. 非線形方程式の解法
近似解の精度を上げる

- 次のステップでは

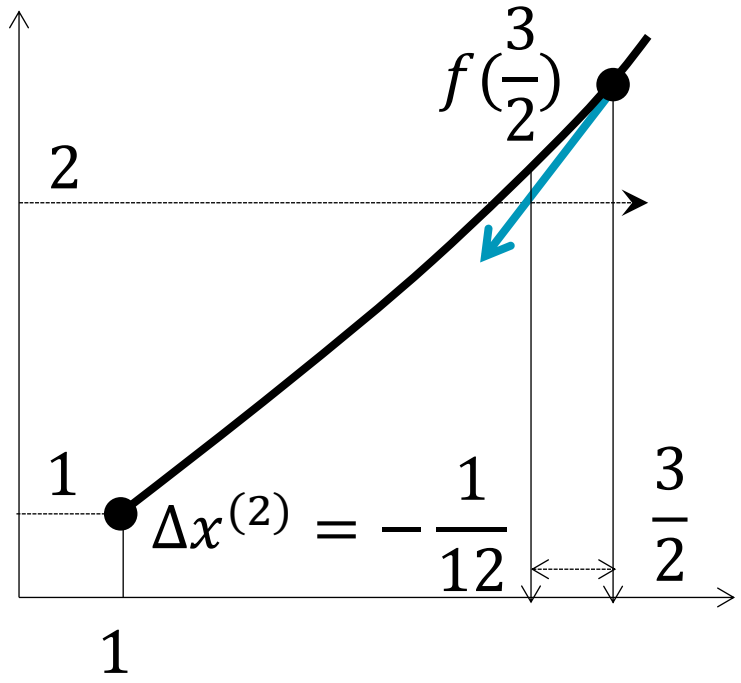
$$2 = f\left(\frac{3}{2} + \Delta x^{(2)}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{df\left(\frac{3}{2}\right)}{dx}\Delta x^{(2)}$$

$$\frac{df\left(\frac{3}{2}\right)}{dx}\Delta x^{(2)} = 2 - f\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}, \frac{df\left(\frac{3}{2}\right)}{dx} = \frac{9}{4}$$

$$\rightarrow 3\Delta x^{(2)} = 2 - \frac{9}{4}$$

$$\rightarrow \Delta x^{(2)} = -\frac{1}{12}$$



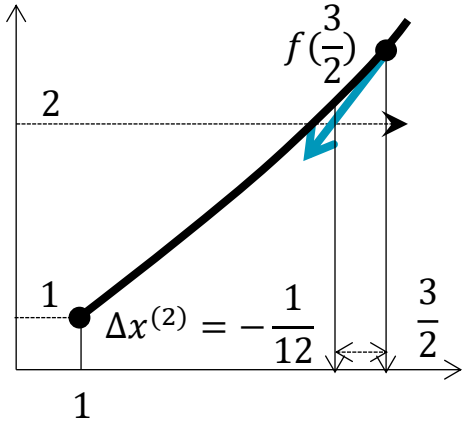
- これより、以下のように近似の精度が上がることがわかる。

$$x^{(2)} = 1 + \Delta x^{(1)} + \Delta x^{(2)} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{17}{12} = 1.4166\cdots$$

107| Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN 3S & TECHNOLOGY TECHSPIRE

Part 5. 非線形方程式の解法
どこで打ち切るか



- この計算を続けると以下のように精度が上がる。

$$\Delta x^{(3)} = -\frac{1}{408}$$

$$x^{(3)} = 1 + \Delta x^{(1)} + \Delta x^{(2)} + \Delta x^{(3)} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{12} - \frac{1}{408} = \frac{577}{408} = 1.4142156\cdots$$

$$\Delta x^{(4)} = -\frac{1}{470832}$$

$$x^{(4)} = 1 + \Delta x^{(1)} + \Delta x^{(2)} + \Delta x^{(3)} + \Delta x^{(4)} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{12} - \frac{1}{408} - \frac{1}{470832}$$

$$= \frac{665857}{470832} = 1.41421356237\cdots$$

- 問題は、どこで打ち切るかであるが、これを収束判定という。
- 基準となる指標としては、以下のようなものが考えられる。これらが十分小さいと考える値を下回れば、収束したと判定する。

$$\left\|a - f(x^{(i)})\right\|, \left\|\Delta x^{(i)}\right\|, \frac{\left\|a - f(x^{(i)})\right\|}{\|\Delta f\|}, \frac{\left\|\Delta x^{(i)}\right\|}{\left\|\Delta x^{(1)}\right\|}, \frac{\left\|(a - f(x^{(i)}))\Delta x^{(i)}\right\|}{\left\|(a - f(x^{(1)}))\Delta x^{(1)}\right\|},$$

 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN 3S & TECHNOLOGY TECHSPIRE

Part 5. 非線形方程式の解法
接線剛性マトリックス

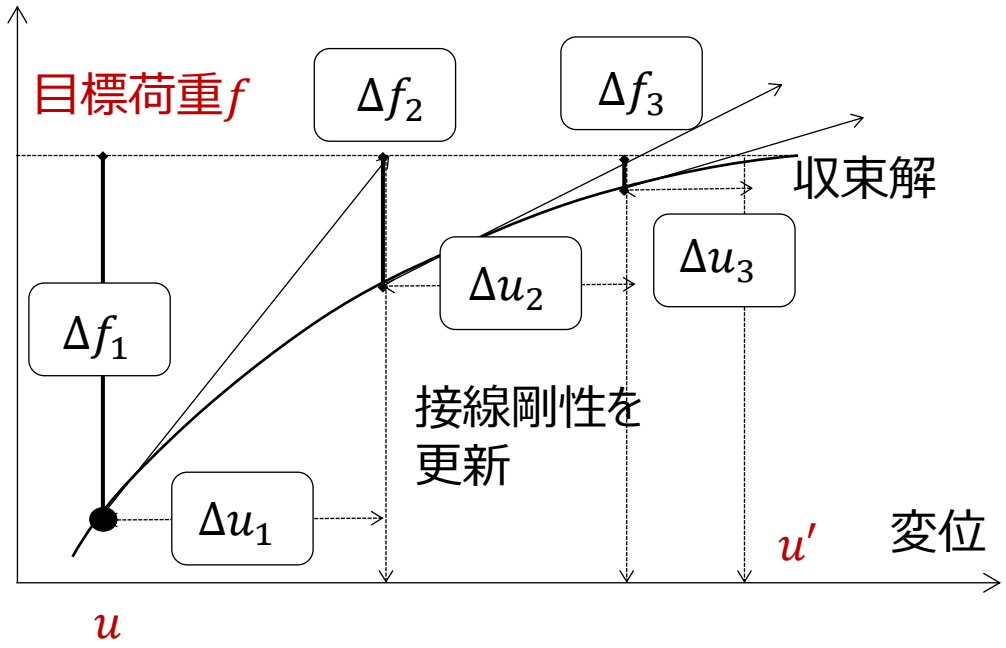
- ニュートン・ラフソン法では微係数（接線の傾き）$\frac{\partial f(u)}{\partial u}$を必要とする。
- 非線形有限要素法の場合は、接線剛性マトリックスという。
- 弱形式$\int_{V_0} S_{ij}\delta E_{ij}dV$ を変位 u で微分すれば得られるが、直接計算することは困難
- ある種の便法として、内力を $\boldsymbol{Q}$ と置くと、接線剛性マトリックス$\tilde{\boldsymbol{K}}$は

$$\tilde{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{u}) = \frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{u}}$$

- この微分を、方向微分、フレッシュ微分、ガトー微分、増分分解と呼ぶことがあるが、本質的に違いはない。
- これを計算するに当たり、下式（速度型の仮想仕事式）を用いる。

$$\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \tilde{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{u})\cdot\dot{\boldsymbol{u}}$$

- なお、線形の場合、$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{u}$とあらわすことができるので、剛性マトリックス$\boldsymbol{K}$と、内力を微分して得られた接線剛性マトリックス$\tilde{\boldsymbol{K}}$は一致することがわかる。



 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

Part 5. 非線形方程式の解法
トータルラグランジュ法の接線剛性マトリックス

- 構成則が以下のように与えられるとする。

$$S_{ij} = C_{ijkl}E_{kl}$$

- フック 則の場合、C_{ijkl}は一定の値を取るので

$$\dot{S}_{ij} = C_{ijkl}\dot{E}_{kl}$$

- 弱形式$\int_{V_0} S_{ij}\delta E_{ij}dV$ を時間微分する

$$\left(\int_{V_0} S_{ij}\delta E_{ij}dV\right)^{\cdot} = \int_{V_0} \dot{S}_{ij}\delta E_{ij} + S_{ij}\delta\dot{E}_{ij}dV$$

- $\dot{F}_{ij} = \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial X_j}$, $\delta F_{ij} = \frac{\partial \delta u_i}{\partial X_j}$であることを用いて、計算すると以下のようになる。
- 右辺第1項を初期変位項（材料剛性）、第2項を初期応力項（幾何剛性）と呼ぶ

$$\left(\int_{V_0} S_{ij}\delta E_{ij}dV\right)^{\cdot} = \int_{V_0} \dot{S}_{ij}\delta E_{ij} + \delta F_{ki}S_{ij}\dot{F}_{kj}dV$$

 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN 3S & TECHNOLOGY TECHSPIRE

Part 5. 非線形方程式の解法
1次元の棒の場合

- $S = CE, \dot{S} = C\dot{E}$とする
- 弱形式は$\dot{E} = \frac{L \cdot \dot{L}}{{L_0}^2}$ を用いて

$$\int_{V_0} \delta E S \, dV = \frac{\delta L \cdot L}{{L_0}^2} S\left({H_0}^2 L_0\right)$$

- 初期変位項

$$\int_{V_0} \delta E \dot{S} \, dV = C \frac{\delta L \cdot L}{{L_0}^2} \frac{L \cdot \dot{L}}{{L_0}^2} \left({H_0}^2 L_0\right)$$

- 初期応力項

$$\int_{V_0} \delta F S \dot{F} \, dV = \frac{\delta L}{L_0} S \frac{\dot{L}}{L_0} \left({H_0}^2 L_0\right)$$

- 合わせて、接線剛性マトリックス

$$\delta L \left\{ \left(\frac{C L^2}{{L_0}^4} + \frac{S}{{L_0}^2} \right) {H_0}^2 L_0 \right\} \dot{L}$$

- 一方、内力$\frac{L}{{L_0}^2} S\left({H_0}^2 L_0\right)$を微分すると

$$\left(\frac{L}{{L_0}^2} S\left({H_0}^2 L_0\right) \right)^{\cdot} = \left(\frac{\dot{S} L}{{L_0}^2} + \frac{S \dot{L}}{{L_0}^2} \right) \left({H_0}^2 L_0\right)$$

- ここで

$$S = \frac{C}{2} \left\{ \left(\frac{L}{L_0} \right)^2 - 1 \right\} \rightarrow \dot{S} = \frac{C L}{{L_0}^2} \cdot \dot{L}$$

- これより、

$$\left(\frac{L}{{L_0}^2} S\left({H_0}^2 L_0\right) \right)^{\cdot} = \left(\frac{C L^2}{{L_0}^4} + \frac{S}{{L_0}^2} \right) \left({H_0}^2 L_0\right) \cdot \dot{L}$$

- 当然ながら、両者は一致することがわかる

$$\left(\frac{C L^2}{{L_0}^4} + \frac{S}{{L_0}^2} \right) {H_0}^2 L_0$$

 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN 3S & TECHNOLOGY TECHSPIRE

Part 5. 非線形方程式の解法
1次元の接線剛性マトリックスからわかること

- 微小変形を仮定すると、初期変位項は、微小変形の剛性マトリックスに一致、初期応力項は消滅
- 初期変位項

$$\int_{V_0} \delta E \dot{S}\, dV = C \frac{\delta L \cdot L}{{L_0}^2} \frac{L \cdot \dot{L}}{{L_0}^2} \left({H_0}^2 L_0\right) \rightarrow \delta L \left\{ \frac{C {H_0}^2}{L_0} \right\} \dot{L}$$

- トラスの剛性は $\frac{EA}{L_0}$
- 初期応力項

$$\int_{V_0} \delta F S \dot{F}\, dV = \frac{\delta L}{L_0} S \frac{\dot{L}}{L_0} \left({H_0}^2 L_0\right) \rightarrow 0$$

- どういう事か？

$$\delta L \left\{ \left(\frac{C L^2}{{L_0}^4} + \frac{S}{{L_0}^2} \right) {H_0}^2 L_0 \right\} \dot{L}$$

- 例えば、柔らかいプラスチックより、剛な鉄の方が高い音が出るが、これは C が変化して剛性が変化する。
- 例えば、弦を引っ張ると高い音が出るが、Cが変わるわけではない。
- 何が剛性を変化させているのか？
- ほとんど伸びないので、初期変位項は微小変形と同じ
- 応力 S により剛性（＝接線剛性）が上がったと考えられる。

 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN 3S & TECHNOLOGY TECHSPIRE

Part 5. 非線形方程式の解法
アップデイティッドラグランジュ法の接線剛性マトリックス

- トータルラグランジュ法では、弱形式を時間微分して接線剛性マトリックスを求めた。

$$\left(\int_{V_0} S_{ij}\delta E_{ij} dV\right)^{\cdot} = \int_{V_0} \dot{S}_{ij}\delta E_{ij} + \delta F_{ki} S_{ij} \dot{F}_{kj} dV$$

- アップデイティッドラグランジュ法でも、弱形式を直接時間微分すればよいのだが、計算が困難。そのため、トータルラグランジュ法の初期変位項、初期応力項それぞれ、テンソルの関係式を使って書き換える。

$$\left(\int_{V} T_{ij}\delta A_{ij} dV\right)^{\cdot} \quad \cdots \text{直接計算は困難}$$

$$\int_{V_0} \dot{S}_{ij}\delta E_{ij} dV$$

$$\int_{V_0} \delta F_{ki} S_{ij} \dot{F}_{kj} dV$$

 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

Part 5. 非線形方程式の解法
トゥルーズデル応力速度

- 領域の積分の関係が$J = \mathbf{det}\,\boldsymbol{F}$ として

$$\int_{V_0} dV = \int_V J\, dV$$

- 初期変位項の被積分関数は以下のように変換される

$$\delta \boldsymbol{E} : \dot{\boldsymbol{S}} = (F^T \cdot \delta A \cdot F) : (JF^{-1} \cdot \dot{S}_t(t) \cdot F^{-T})$$
$$= J\delta A : \dot{S}_t(t)$$

- この$\dot{S}_t(t)$はトゥルーズデル応力速度と呼ばれる。相対キルヒホッフ応力のオルドロイド速度で客観性がある。
- 物理的な意味はないと考えた方がよい。
- 逆に数学的には アップデイティッドラグランジュ法ではトゥルーズデル応力速度以外を使うことはできない。

$$\int_{V_0} \dot{S}_{ij}\delta E_{ij} dV = \int_V \delta A_{ij}\dot{S}_t(t)_{ij} dV$$

 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN 3S & TECHNOLOGY
TECHSPIRE

Part 5. 非線形方程式の解法
初期応力項も書き換える

- 初期応力項は、応力がS_{ij}からT_{ij}に置き換えるように変換する

$$\int_{V_0} \delta F_{ki} S_{ij} \dot{F}_{kj} dV$$

- 詳しい式の導出は省略するが$\dot{x} = \dot{u}, \delta x = \delta u$であることを用いて

$$\dot{\boldsymbol{F}} = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial X_j} \rightarrow \boldsymbol{L} = \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j}$$

- ここで$\frac{\partial \delta \dot{u}_k}{\partial x_i}$を$\delta F_t(t)$と表記すると初期応力項は以下のように変換される

$$\int_{V_0} \delta F_{ki} S_{ij} \dot{F}_{kj} dV = \int_{V} \delta F_t(t)_{ki} T_{ij} L_{kj} dV$$

- これらをまとめると　アップデイティッドラグランジュ法の接線剛性は

$$\int_{V} \delta A_{ij} \dot{S}_t(t)_{ij} dV + \int_{V} \delta F_t(t)_{ki} T_{ij} L_{kj} dV$$

 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN 3S & TECHNOLOGY
TECHSPIRE

Part 5. 非線形方程式の解法
1次元の棒の場合

- 弱形式は

$$\int_V \delta A T \, dV = \frac{\delta L}{L} T (H^2 L)$$

- 諸量の計算

$$\delta A = F^{-1} \delta E F^{-1} = \frac{L_0}{L} \frac{\delta L \cdot L}{{L_0}^2} \frac{L_0}{L} = \frac{\delta L}{L}$$

$$L_0 = \frac{\dot{L}}{L}$$

$$\delta F_t(t) = \frac{\delta L}{L}$$

$$D = \frac{\dot{L}}{L}$$

- 構成式は$\dot{S} = C\dot{E}$と一致させるため以下のようにする

$$\dot{S}_t(t) = \bar{C} D$$

$$\bar{C} = \frac{1}{J} FFFFC$$

- 初期変位項

$$\int_V \delta A \dot{S}_t(t) dV = \bar{C} \frac{\delta L}{L} \frac{\dot{L}}{L} (H^2 L)$$

- 初期応力項

$$\int_V \delta F_t(t) T L_0 dV = \frac{\delta L}{L} T \frac{\dot{L}}{L} (H^2 L)$$

- 合わせて、接線剛性マトリックス

$$\delta L \left\{ \left(\frac{\bar{C}}{L^2} + \frac{T}{L^2} \right) H^2 L \right\} \dot{L}$$

- $\bar{C}$とTを書き換えると、トータルラグランジュの場合と一致する

$$T = \frac{1}{J} FSF^T \rightarrow T = \frac{L_0}{L} \frac{{H_0}^2}{H^2} \frac{L}{L_0} S \frac{L}{L_0}$$

$$\delta L \left\{ \left(\frac{C}{L^2} \frac{L_0}{L} \frac{{H_0}^2}{H^2} \frac{L}{L_0} \frac{L}{L_0} \frac{L}{L_0} \frac{L}{L_0} \frac{L}{L_0} + \frac{S}{L^2} \frac{L_0}{L} \frac{{H_0}^2}{H^2} \frac{L}{L_0} \frac{L}{L_0} \right) H^2 L \right\} \dot{L} = \left(\frac{C L^2}{{L_0}^4} + \frac{S}{{L_0}^2} \right) {H_0}^2 L_0$$

 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN 3S & TECHNOLOGY TECHSPIRE

Part 5. 非線形方程式の解法
初期変位項についての補足

- ここでは トータルラグランジュ法の初期変位項を以下右辺第1項のように定義している

$$\left(\int_{V_0} S_{ij}\delta E_{ij}dV\right)^{\cdot} = \int_{V_0} \dot{S}_{ij}\delta E_{ij} + \delta F_{ki}S_{ij}\dot{F}_{kj}dV$$

- 用語の問題だけだが以下の式において、$\frac{C{H_0}^2}{L_0}$を増分剛性マトリックス、$\frac{C{H_0}^2}{L_0}\left(\frac{2u}{L_0}+\left(\frac{u}{L_0}\right)^2\right)$を初期変位マトリックスと呼ぶものもある。増分剛性マトリックスは微小変形の剛性マトリックスと同一。（一般にテンソル表記をメインに記述する場合は前者、マトリックス表記をメインに記述する場合は後者）

$$\int_{V_0} \delta E\dot{S}\, dV = C\frac{\delta L\cdot L}{{L_0}^2}\frac{L\cdot\dot{L}}{{L_0}^2}\left({H_0}^2L_0\right) = C\frac{\delta u}{L_0}\frac{L_0+u}{L_0}\frac{L_0+u}{L_0}\frac{\dot{u}}{L_0}\left({H_0}^2L_0\right)$$

$$= C\frac{\delta u}{L_0}\left(1+\frac{u}{L_0}\right)^2\frac{\dot{L}}{L_0}\left({H_0}^2L_0\right) = \delta u\left\{\frac{C{H_0}^2}{L_0}+\frac{C{H_0}^2}{L_0}\left(\frac{2u}{L_0}+\left(\frac{u}{L_0}\right)^2\right)\right\}\dot{u}$$

- この定義では、アップデイティッドラグランジュ法の場合は初期変位項に相当する項はない

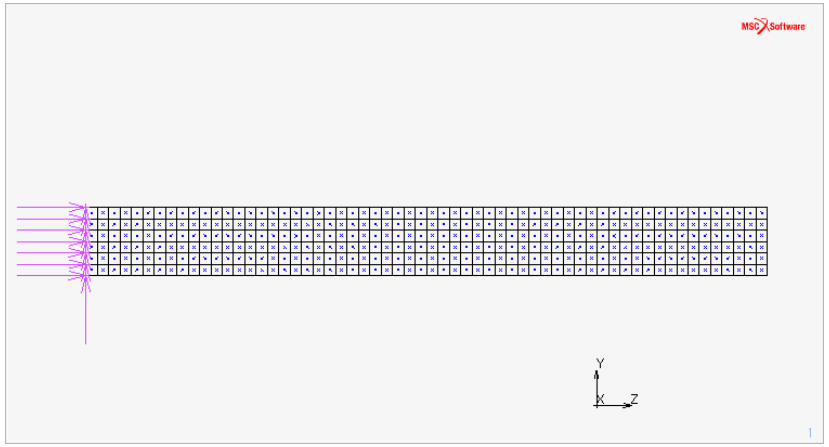
$$\bar{C}\frac{\delta L}{L}\frac{\dot{L}}{L}(H^2L) = \delta u\left\{\frac{\bar{C}H^2}{L}\right\}\dot{u}$$

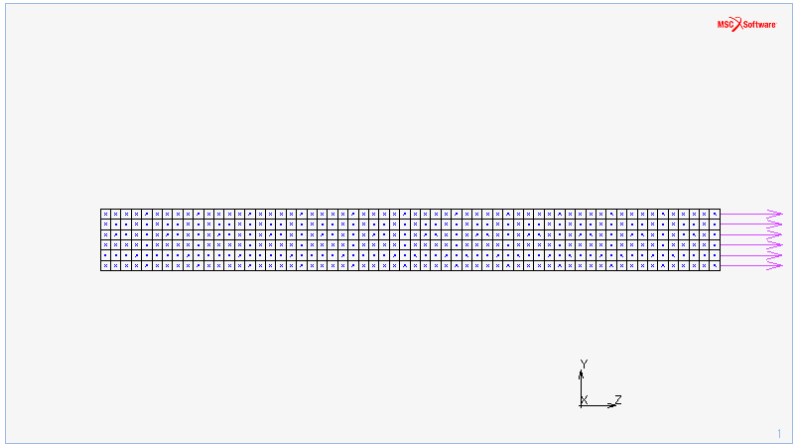
 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN 3S & TECHNOLOGY TECHSPIRE

Part 5. 非線形方程式の解法
試に固有値解析をしてみました

- 最低次の固有値が1.0になるように調整した、ヤング率 1000MPa、ポアソン比 0、密度 2.61×10^{9}Kg/m^{3}を使用
- 寸法は、1X1X10mm
- 固定端の逆の端部に 5MPaで引張った状態での固有値を求める。（ひずみで 0.5%）
- 曲げの最低次は、1.710Hzになった。
- 逆に同じ絶対値の圧縮力を与えると、固有値は0.4688Hzに下がる（応力-5.0MPa, ひずみ0.498%）





 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

Part 5. 非線形方程式の解法

汎用有限要素法ソフトの構造（非線形の場合）

Parasolid などのCADデータ

CAD

形状、材料、境界条件などのデータベース

GUIのソフト

プリプロセッサー
メッシュ生成
材料の定義
境界条件の定義

通常プリとポストは同一プログラム

CAD に、プリポストの機能がついたものがある。

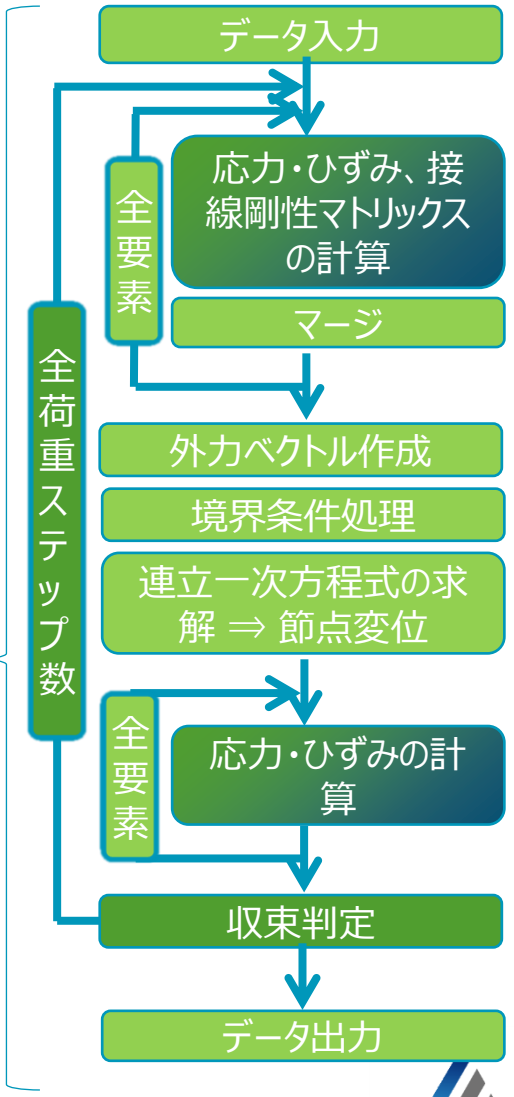
ポストプロセッサー
結果の表示
表示データの計算
設計基準に基づく評価計算

特定の解析で必要な、形状、材料、境界条件などのデータ
→インプットファイル

Nastran, Marc など

ソルバー
データ入力
要素剛性の計算
連立一次方程式求解
応力計算など

→アウトプットファイル
変位、応力などの解析結果

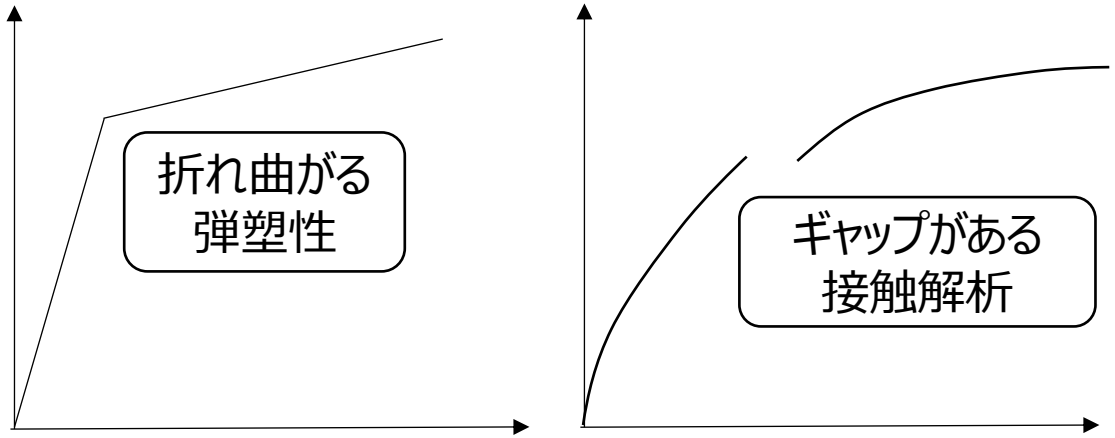


 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

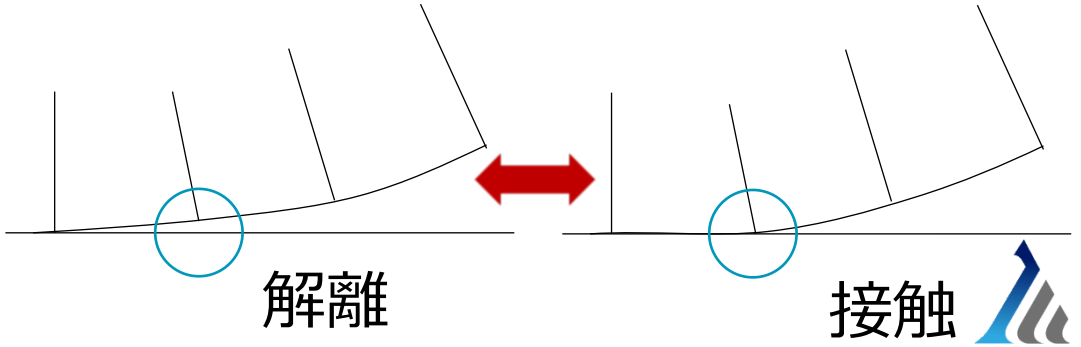
TECHSPIRE

Part 5. 非線形方程式の解法
収束しない時はどうするのか？（１）

- 最初から「連立一次方程式が解けません。」というエラーで停止
  - 原因：固定の境界条件が不足、あるいは材料物性、荷重が間違っていて、過大な変位が生じている。
  - 対策：汎用コードであれば、誤差を気にせず「無理やり解く」というオプションがあるので、解けた答えを見て考える。
- 変形が進んだ段階で解けなくなる。
  - 原因：接触でチャタリングが生じている
  - 対策：確実に解決するわけではないが接触アルゴリズムを変更したり、構わず先に進むというオプションを試す。しかしこれは、別の問題を解いている時すらある。
  - 原因：非圧縮性のゴムを大きな荷重で圧縮している。
  - 対策：実験と比較してモデル化を見直す。圧縮性を導入する。



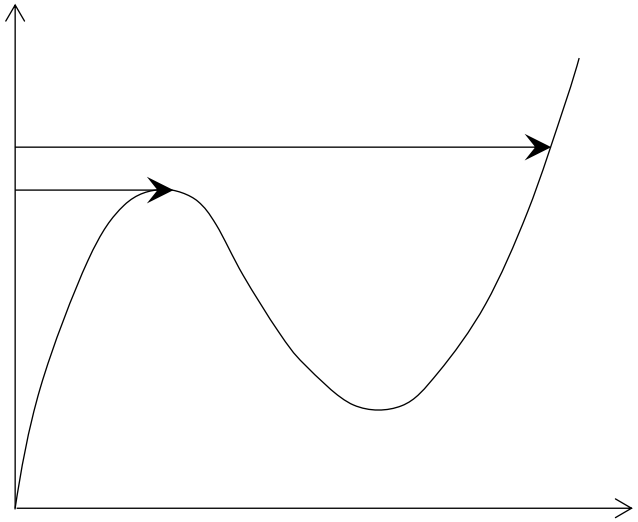
ニュートン・ラフソン法は強力だが、扱っている関数は滑らかなものではなく、折れ曲がる、ギャップがあるなど、想定以上に、非線形性が高い

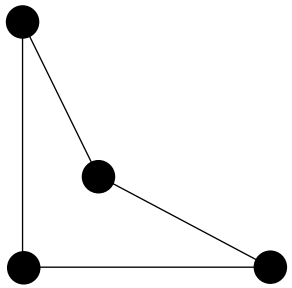


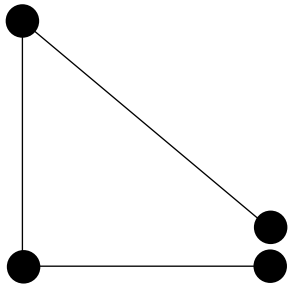
 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

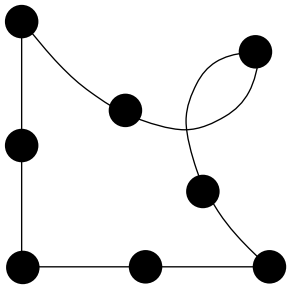
Part 5. 非線形方程式の解法
収束しない時はどうするのか？（２）

- 変形が進んだ段階で解けなくなる。
  - 原因：解けないので、荷重ステップ数を変えたら、解も変わった
  - 対策：収束判定条件を厳しめに設定する。
  - 原因：飛び移り座屈が生じている。
  - 対策：弧長増分法、動的緩和法などを試す。
  - 原因：局所的に大きなひずみが生じている時は、一部の要素が許容できないほど大きな変形をしている。
  - 対策：確実に解決するわけではないが、リメッシュを試す。









 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

有限変形理論

まとめ

- ひずみは、並進・回転に依存しない変形の尺度。
  - 微小ひずみ、即ち線形のひずみだと、回転で前述のように膨張するという問題を生じる。
  - これを解決するために、有限な回転をしても値を生じない グリーン・ラグランジュひずみ、アルマンジひずみを導入する。
- 応力テンソル (コーシー応力テンソル) は、法線方向を応力ベクトルに変換するテンソル
- コーシー応力テンソルを使って、連続体解析学の基礎式コーシーの第1運動法則を導くが、非線形性が強すぎて扱いづらい。
  - 現配置x_iでの微分を変形前配置X_iでの微分に書き換えると、第1ピオラ・キルヒホッフ応力が導かれる。
  - 第1ピオラ・キルヒホッフ応力は非対称なので、対称にしたものが第2ピオラ・キルヒホッフ応力
- 有限要素法は コーシーの第1運動法則を弱形式に変換してから近似解法で解くもの。
  - コーシー応力で記述された コーシーの第1運動法則を解くものを、アップデイティッドラグランジュ
  - 第2ピオラ・キルヒホッフ応力で記述されたコーシーの第1運動法則を解くものを、トータルラグランジュ法
  - 従って、どちらも数学的には等価。ただし、汎用コードでは内部で異なる定式化を用いる場合があり、別物と考えた方がよい。
- トータルラグランジュ でも アップデイティッドラグランジュ でも、非線形方程式である
  - ニュートン・ラフソン法を用いて非線形方程式を解くと、線形有限要素法の自然な拡張になっている。ただし反復計算が必要。⇒収束しないことがある
  - 剛性マトリックス ⇒ 接線剛性マトリックス
- 以上の定式化を1次元の棒で考えてみる。

 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN DS & TECHNOLOGY TECHSPIRE

内容

０．はじめに
１．ひずみ
２．応力
３．コーシーの第１運動法則
４．仮想仕事の原理
５．非線形方程式の解法
６．超弾性体の基礎

 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

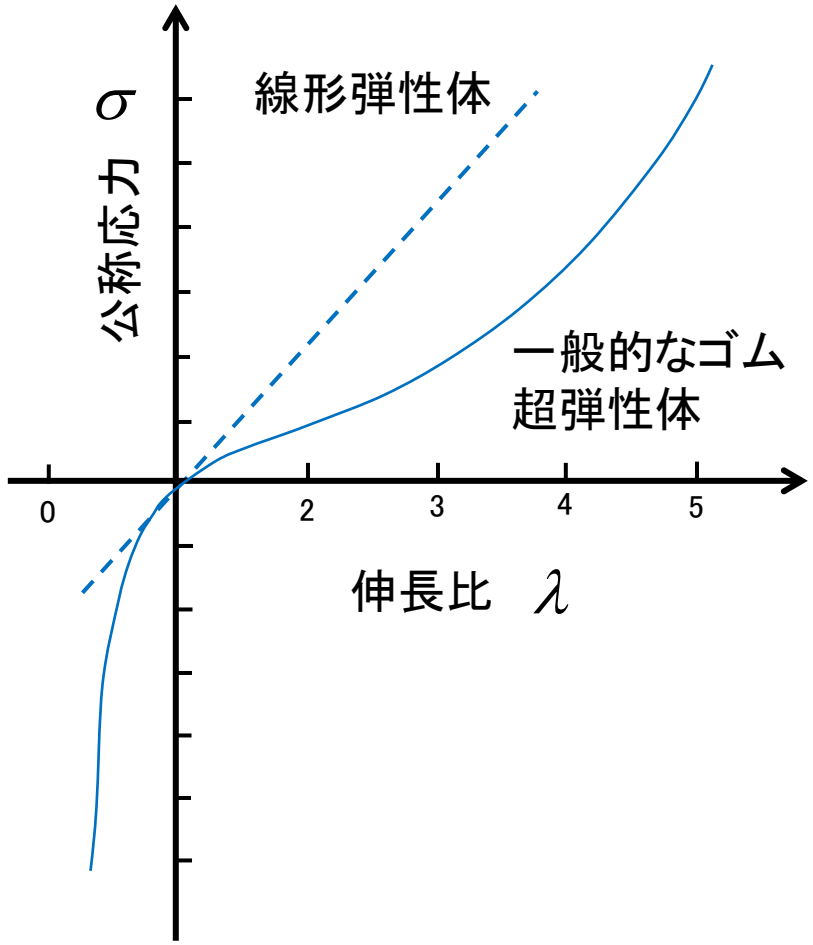
HUMAN 3S & TECHNOLOGY
TECHSPIRE

Part 6. ゴムのCAEの難しさ
機械材料としての高分子（ゴム）の特徴（1）　大ひずみ

- 一般的な充填ゴムの応力-ひずみ曲線の例
- 応力とひずみが非線形な関係。
- 大ひずみを受けても、除荷すると元の状態に戻る。
- 金属で用いられる線形弾性体（左図の破線）では材料挙動を表現できない。

	弾性域のひずみ	弾性領域のSSカーブ
金属	**<< 1%**	**ほぼ直線**
ゴム	**数百%**	**曲線（S字を描く）**

超弾性（Hyper-elastic）材料モデル



 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

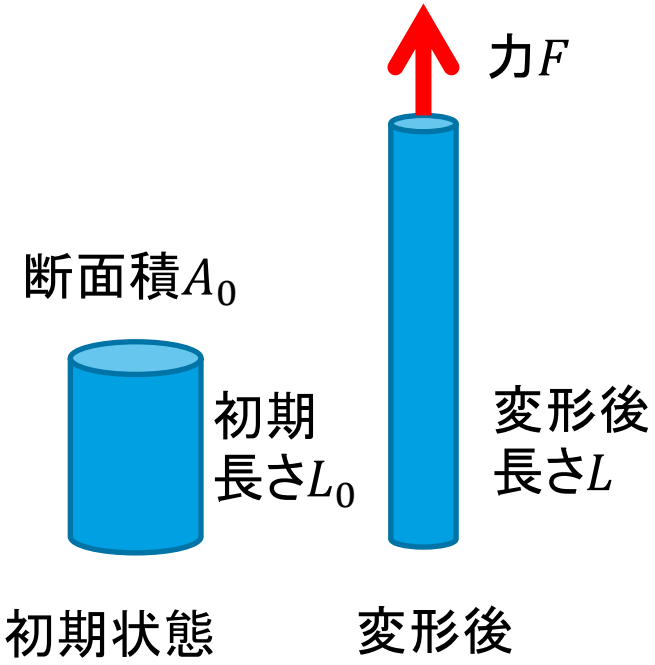
Part 6. ゴムのCAEの難しさ
ゴム材料実験データの応力と変形の尺度

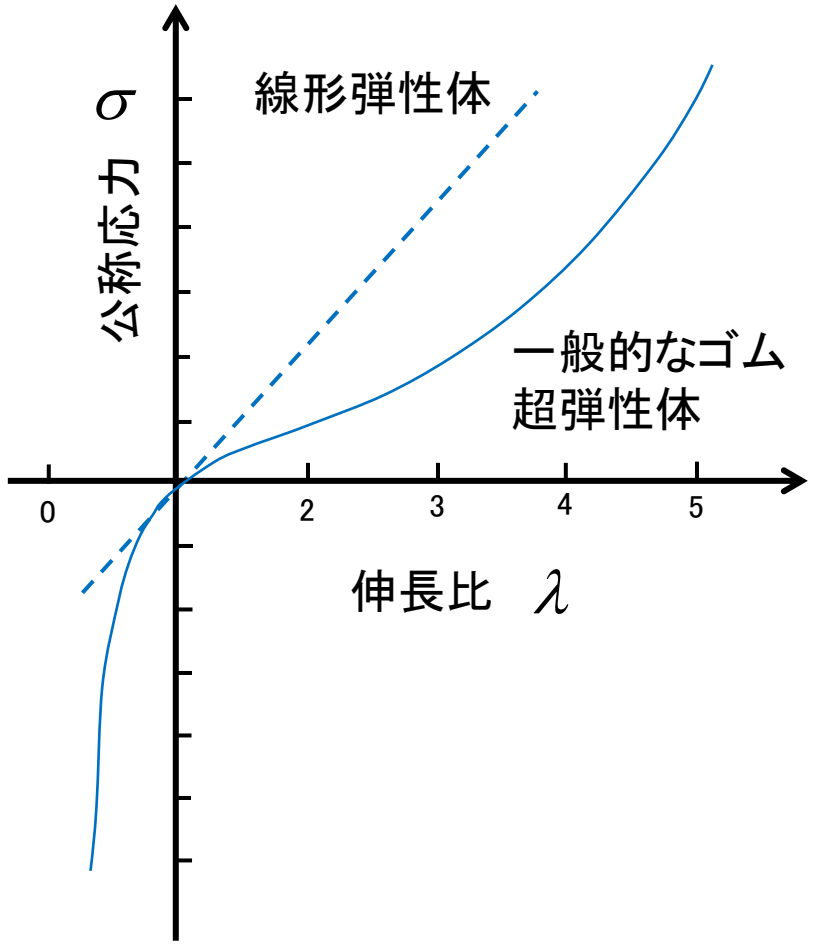
- 応力：公称応力＝力／初期断面積

$$\sigma = F/A_0$$

- 変形：　伸長比=変形後長さ／初期長さ

$$\lambda = L/L_0$$

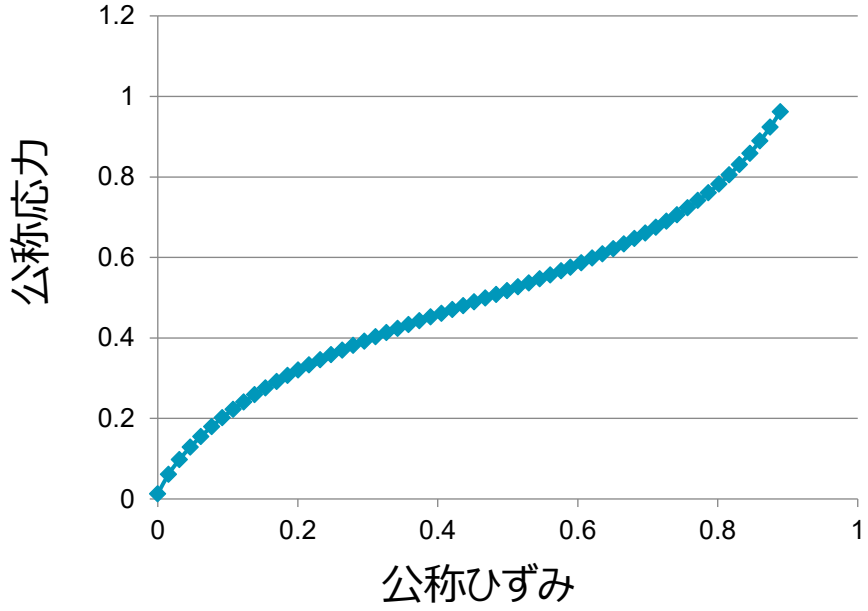


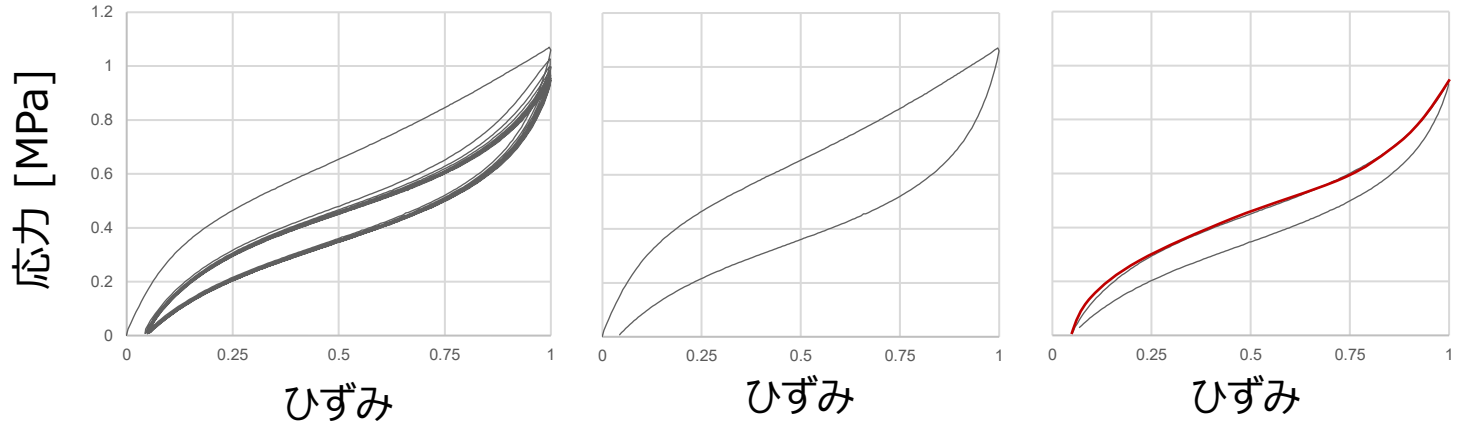


 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

Part 6. ゴムのCAEの難しさ
高分子材料の応力ひずみ曲線

- 大きなひずみを生じても、除荷すると無変形状態に戻る。
- ゴムの単純引張の実験データ：低・中ひずみ領域では徐々に軟化する、高ひずみ領域では硬化する
- 実際には１サイクル目とその後は異なるループを描く。（マリンス効果）基本的に２サイクル目以降の負荷側をSSカーブとする





(A) 10サイクル　(B) 第1サイクル　(C) 第10サイクル

126| Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

Part 6. 超弾性とカーブフィット

ひずみの復習

- 変形勾配 $\boldsymbol{F}$：多重積分のヤコビマトリックスを思い出すとよい

$$d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{X}$$

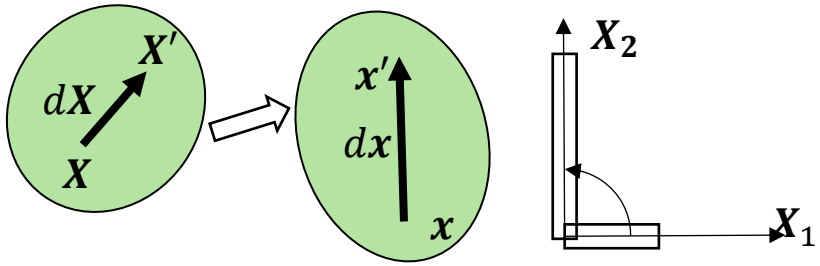
$$\begin{Bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial X_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial X_2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial X_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial X_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{Bmatrix}$$

- 変形勾配の極分解、ストレッチテンソルと回転テンソル:回転を分離したものが本質的な変形。$\boldsymbol{U}$、$\boldsymbol{V}$の固有値 λ_i は主ストレッチ。一次元だと l/L

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{U} = \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{R}$$

- Cauchy-Green 変形テンソル：都合よく $\boldsymbol{R}$ を相殺する。

$$\boldsymbol{F^T} \cdot \boldsymbol{F} = \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{R^T} \cdot \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{U} = \boldsymbol{U^2} = \boldsymbol{C}$$
$$\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{F^T} = \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{R^T} \cdot \boldsymbol{V} = \boldsymbol{V^2} = \boldsymbol{B}$$



- ひずみを以下のように定義する
  - Green-Lagrange ひずみ $\boldsymbol{E}$

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{I}) = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\left(\boldsymbol{U^2} - \boldsymbol{I}\right)$$
$$= \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\left(\lambda_i^2 - 1\right)\hat{\boldsymbol{e}}_i \otimes \hat{\boldsymbol{e}}_i$$

  - Almansi ひずみ A

$$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B^{-1}}\right) = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{V^{-2}}\right)$$
$$= \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\left(1 - \lambda_i^{-2}\right)\check{\boldsymbol{e}}_i \otimes \check{\boldsymbol{e}}_i$$

 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

TECHSPIRE HUMAN 3S & TECHNOLOGY

Part 6. 超弾性とカーブフィット
ひずみエネルギーポテンシャル

- 数学的に矛盾なく、大きなひずみを生じる弾性材料の挙動を表現することは、困難。
- 超弾性体を用いる。
- ひずみで微分すると応力が得られるようなポテンシャルWが存在する。

$$S_{ij} = \frac{\partial W}{\partial E_{ij}}$$

  - S_{ij} 第2ピオラ・キルヒホッフ応力
  - E_{ij} グリーン・ラグランジュひずみ
- 具体的に計算すると、S_{ij}はE_{ij} の関数としてあらわされる。

$$S_{ij} = \phi_0 \delta_{ij} + \phi_1 E_{ij} + \phi_2 E_{ik} E_{kj}$$
$$\boldsymbol{S} = \phi_0 \boldsymbol{I} + \phi_1 \boldsymbol{E} + \phi_2 \boldsymbol{E}^{\,2}$$

- 等方性を仮定すると、弾性ポテンシャルWは、右コーシー・グリーン変形テンソル $\boldsymbol{C}$ の主不変量 I_1, I_2, I_3 あるいは右ストレッチテンソル$\boldsymbol{U}$ の固有値 λ_1, λ_2, λ_3の関数になる。

$$I_1 = \mathrm{tr}\boldsymbol{C} = {\lambda_1}^2 + {\lambda_2}^2 + {\lambda_3}^2$$
$$I_2 = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left\{(\mathrm{tr}\boldsymbol{C})^{\mathbf{2}} - \mathrm{tr}\boldsymbol{C}^{\mathbf{2}}\right\}$$
$$= (\lambda_1\lambda_2)^2 + (\lambda_2\lambda_3)^2 + (\lambda_3\lambda_1)^2$$
$$I_3 = \det\boldsymbol{C} = {\lambda_1}^2{\lambda_2}^2{\lambda_3}^2$$

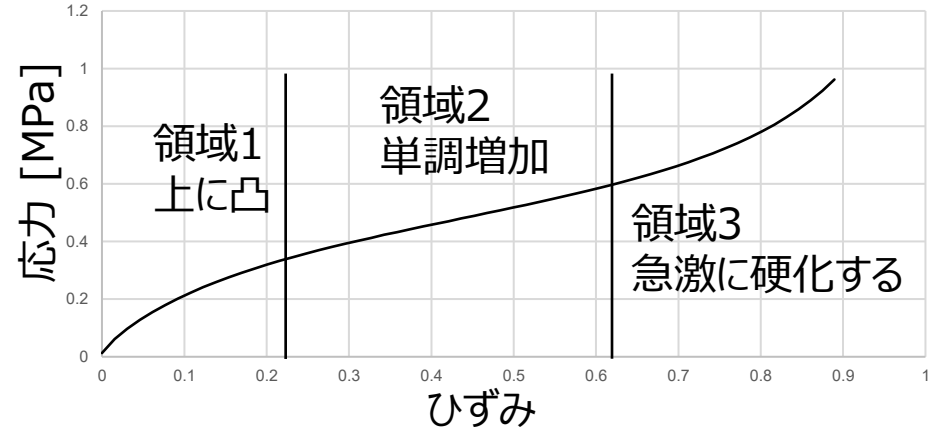
- 非圧縮だと

$$\det\boldsymbol{F} = J = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$$
$$I_2 = \frac{1}{{\lambda_1}^2} + \frac{1}{{\lambda_2}^2} + \frac{1}{{\lambda_3}^2}$$

 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN 3S & TECHNOLOGY TECHSPIRE

Part 6. 超弾性とカーブフィット
代表的なポテンシャル（１）

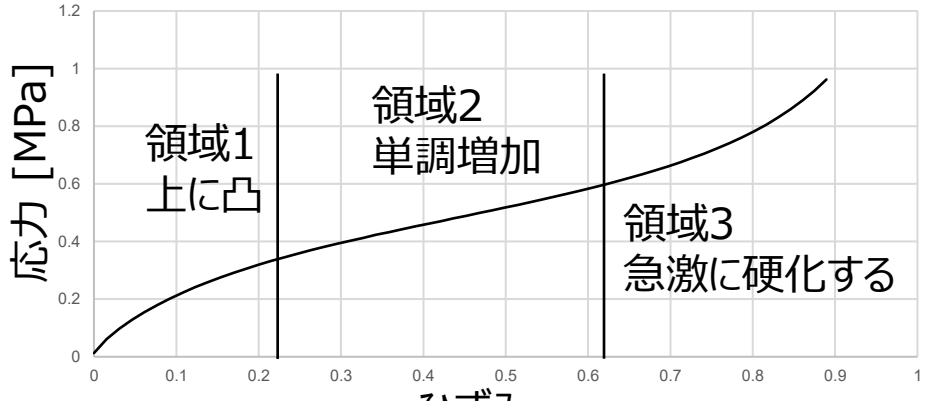


- ムーニー・リブリンモデル：右コーシー・グリーン変形テンソルの主値の関数であらわす。
- 様々なムーニー・リブリンモデルの形式
  - ネオフック形式（分子論的考察に基づくモデル）
    - $W = C_{10}(I_1 - 3)$
  - ムーニー・リブリン（2項形式）（数学的近似に基づくモデル）
    - $W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3)$
  - 2次の不変量形式（数学的近似に基づくモデル）
    - $W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2$
  - 3次の不変量形式（数学的近似に基づくモデル）
    - $W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3$
  - Yoah形式（数学的近似に基づくモデル）
    - $W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3$

- 基本的に多項式（物理的な根拠なし）
- たくさん係数があるが、どうするのか
- → カーブフィット

 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

Part 6. 超弾性とカーブフィット
代表的なポテンシャル（２）



- 主ストレッチタイプ
  - オグデン体：ポテンシャルを主ストレッチの関数であらわす。

$$W = \sum_{n=1}^{N} \frac{\mu_n}{\alpha_n}\left({\lambda_1}^{\alpha_n} + {\lambda_2}^{\alpha_n} + {\lambda_3}^{\alpha_n} - 3\right)$$

ネオフック

アルーダ・ボイス

オグデン
3次変形

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ：C の固有値の平方根

- 物理モデル：高分子物理から関数形を設定
  - アルーダ・ボイス（I_1の５次まで考慮するが、材料定数は２つ）

$$W = nk\theta\left\{\frac{1}{2}(I_1 - 3) + \frac{1}{20N}\left({I_1}^2 - 9\right) + \frac{11}{1050N^2}\left({I_1}^3 - 27\right) + \frac{19}{7000N^3}\left({I_1}^4 - 81\right) + \frac{511}{673750N^4}\left({I_1}^5 - 243\right)\right\}$$

  - ジェント

$$W = -\frac{E}{6}(I_m - 3)\,log\left(1 - \frac{I_1 - 3}{I_m - 3}\right)$$

 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN 3S & TECHNOLOGY
TECHSPIRE

Part 6. 超弾性とカーブフィット
主ストレッチの関数

- Ogden 体：ポテンシャルを主ストレッチの関数であらわす。

$$W = \sum_{n=1}^{N} \frac{\mu_n}{\alpha_n}\left({\lambda_1}^{\alpha_n} + {\lambda_2}^{\alpha_n} + {\lambda_3}^{\alpha_n} - 3\right)$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ：C の固有値の平方根

- NEO-HOOKEAN形式（分子論的考察に基づくモデル）

$$W = C_{10}(I_1 - 3)$$

- MOONEY-RIVLIN（2項形式）（数学的近似に基づくモデル）

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3)$$

$$= C_{10}\left({\lambda_1}^2 + {\lambda_2}^2 + {\lambda_3}^2 - 3\right) + C_{01}\left(\frac{1}{{\lambda_1}^2} + \frac{1}{{\lambda_2}^2} + \frac{1}{{\lambda_3}^2} - 3\right)$$

$\mu_1 = C_{10}, \alpha_1 = 2, \mu_2 = C_{01}, \alpha_2 = -2$とおくと、Ogden体として表すことができる。

 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN 3S & TECHNOLOGY TECHSPIRE

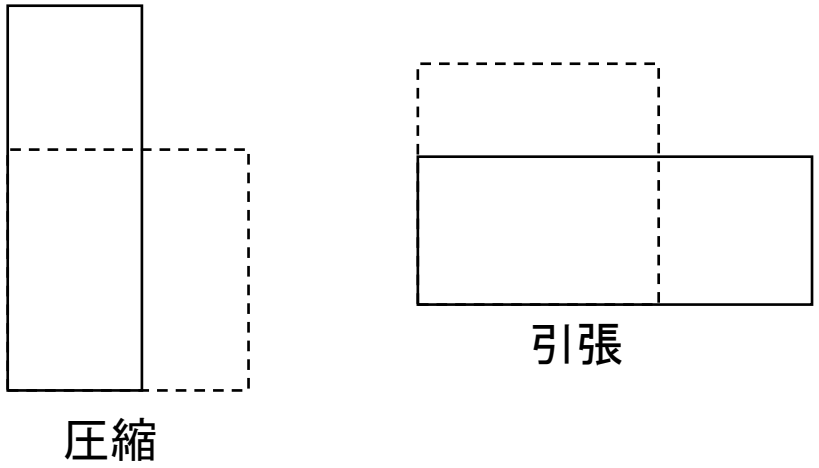
Part 6. 超弾性とカーブフィット

解析例

- 超弾性体の最も簡単な構成式ネオフックと線形弾性体を比較する。

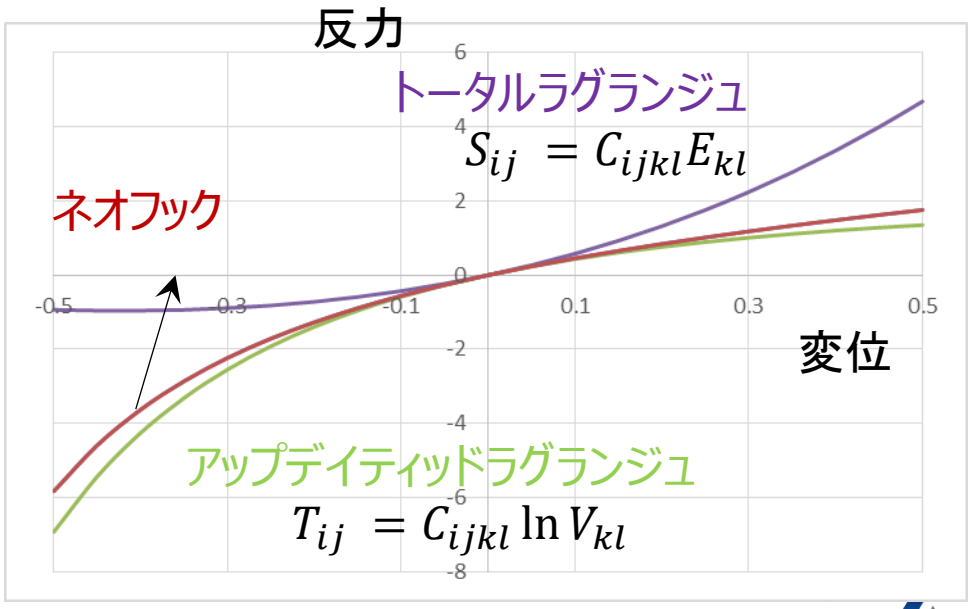
$$W = C_{10}(I_1 - 3)$$

- 1辺が1の立方体の引っ張りと圧縮



- 線形弾性体は、ヤング率5MPa、ポアソン比 0.49 とする。（超弾性体ネオフックは非圧縮性を考慮した構成式なので）
- トータルラグランジュとアップデイティッドラグランジュで解析する
- このときの、変位と反力を比較する。
- ヤング率 E に対して $E = 6C_{10}$

$$P = 2C_{10}\left(L - \frac{1}{L^2}\right)$$

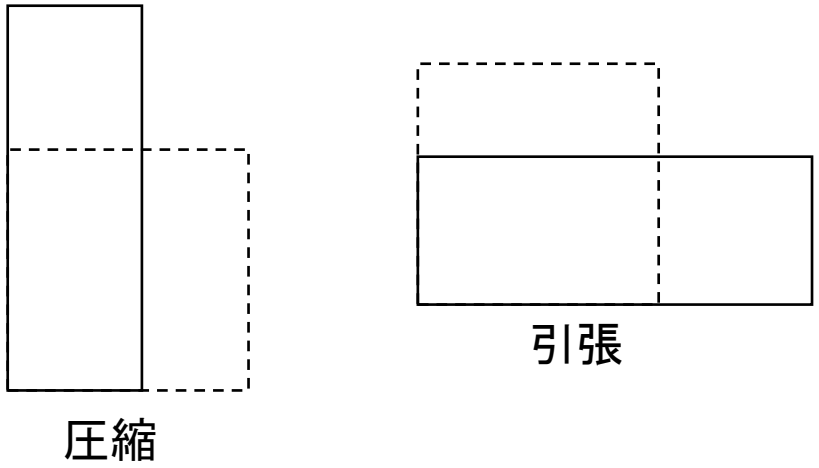


 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

Part 6. 超弾性とカーブフィット

解析結果

- NeoHookean はtotal-Lagrange、updated-Lagrangeを問わず一致する。線形弾性体はポアソン比が変わっても、やはり同じ傾向。
- 線形弾性体のupdated-Lagrangeと Neo-Hookean の挙動は類似
- この傾向は、高次のモデルでも同じ



- Mooney-Rivlin体 (Neo-Hookeanの場合は、$C_{01}=0$)

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3)$$

- ヤング率 E に対して $E = 6(C_{10}+C_{01})$
- 応力とLの関係

$$T_{11} = 2C_{10}\left(L^2 - \frac{1}{L}\right) + 2C_{01}\left(L - \frac{1}{L^2}\right)$$

- 反力とLの関係は$P = T_{11}/L$(面積が$1/L$なので)

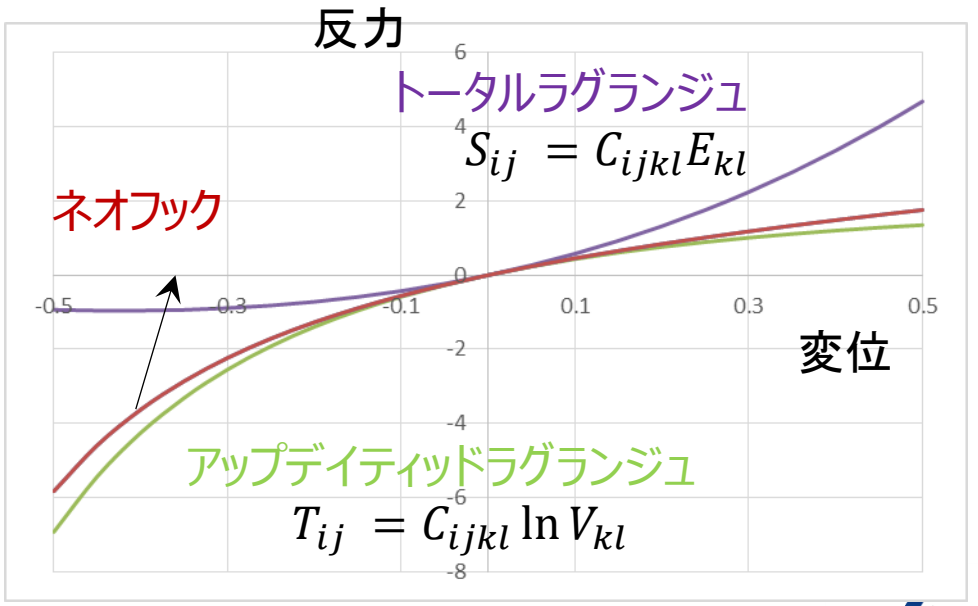
$$P = 2C_{10}\left(L - \frac{1}{L^2}\right) + 2C_{01}\left(1 - \frac{1}{L^3}\right)$$

- 微小変形を仮定すると$L = 1+\varepsilon$

$$T_{11} = 2C_{10}\left(L^2 - \frac{1}{L}\right) + 2C_{01}\left(L - \frac{1}{L^2}\right)$$
$$\approx 2C_{10}\left((1+\varepsilon)^2 - \frac{(1+\varepsilon)-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)$$
$$+2C_{01}\left((1+\varepsilon) - \left(\frac{(1+\varepsilon)-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2\right)$$
$$\approx 2C_{10}\big(1+2\varepsilon-(1-\varepsilon)\big)$$
$$+2C_{01}\big((1+\varepsilon)-(1-2\varepsilon)\big)$$
$$= 6(C_{10}+C_{01})\varepsilon$$

- ここで

$$\frac{(1+\varepsilon)-\varepsilon}{1+\varepsilon} = \frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \approx 1 - \frac{\varepsilon}{1}$$
$$\approx 1-\varepsilon$$

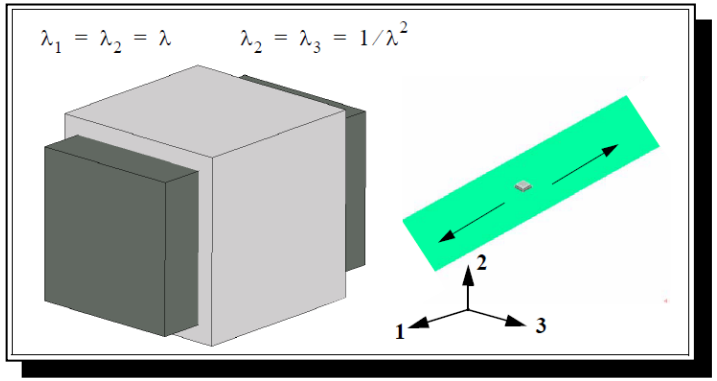


 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

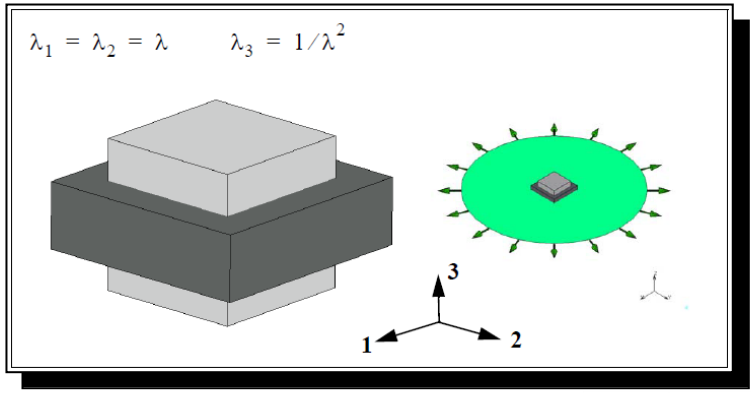
Part 6. 超弾性とカーブフィット
実験可能なデータとは

- 連続体解析学的には、基本的な変形モードは以下のとおり
  - **単純引張**
  - **単純せん断**
  - **均等二軸引張**
- このうち、単純せん断は実験が困難
- かわりに平面せん断（一軸拘束二軸引張）をおこなう。





単純引張



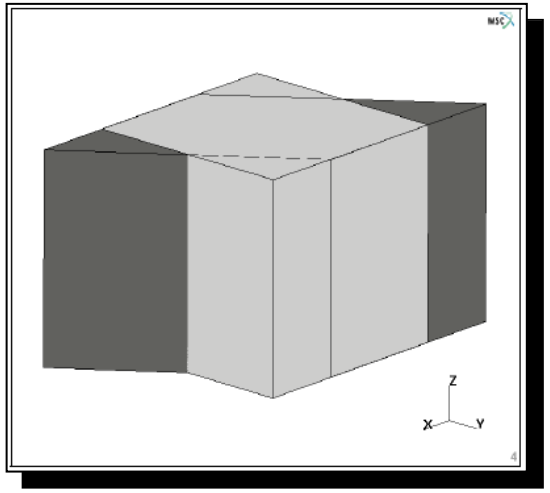
均等二軸引張

 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

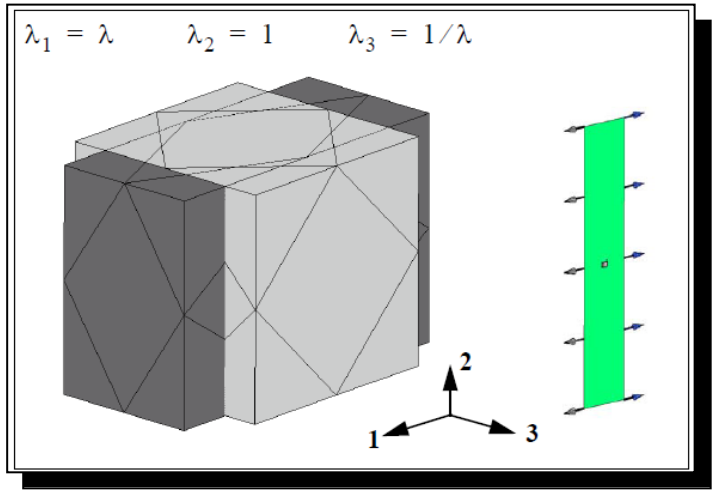
HUMAN 3S & TECHNOLOGY
TECHSPIRE

Part 6. 超弾性とカーブフィット
せん断と平面せん断

- 試験片の幅を固定して引張を与える変形を平面せん断と呼ぶ。
- 変形だけを眺めても等価であるようには見えないが、主ひずみ（ひずみの固有値）を計算すると一致する。
- 一般に単純せん断の試験を実施することは非常に困難だが、平面せん断なら、実現可能

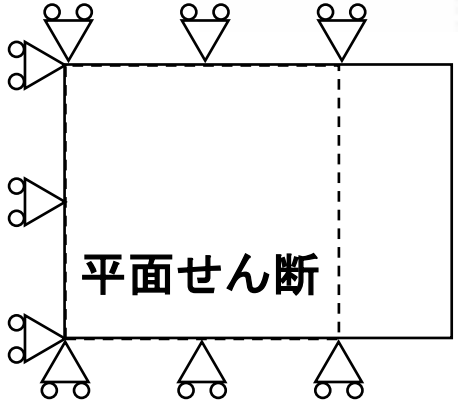


せん断



平面せん断



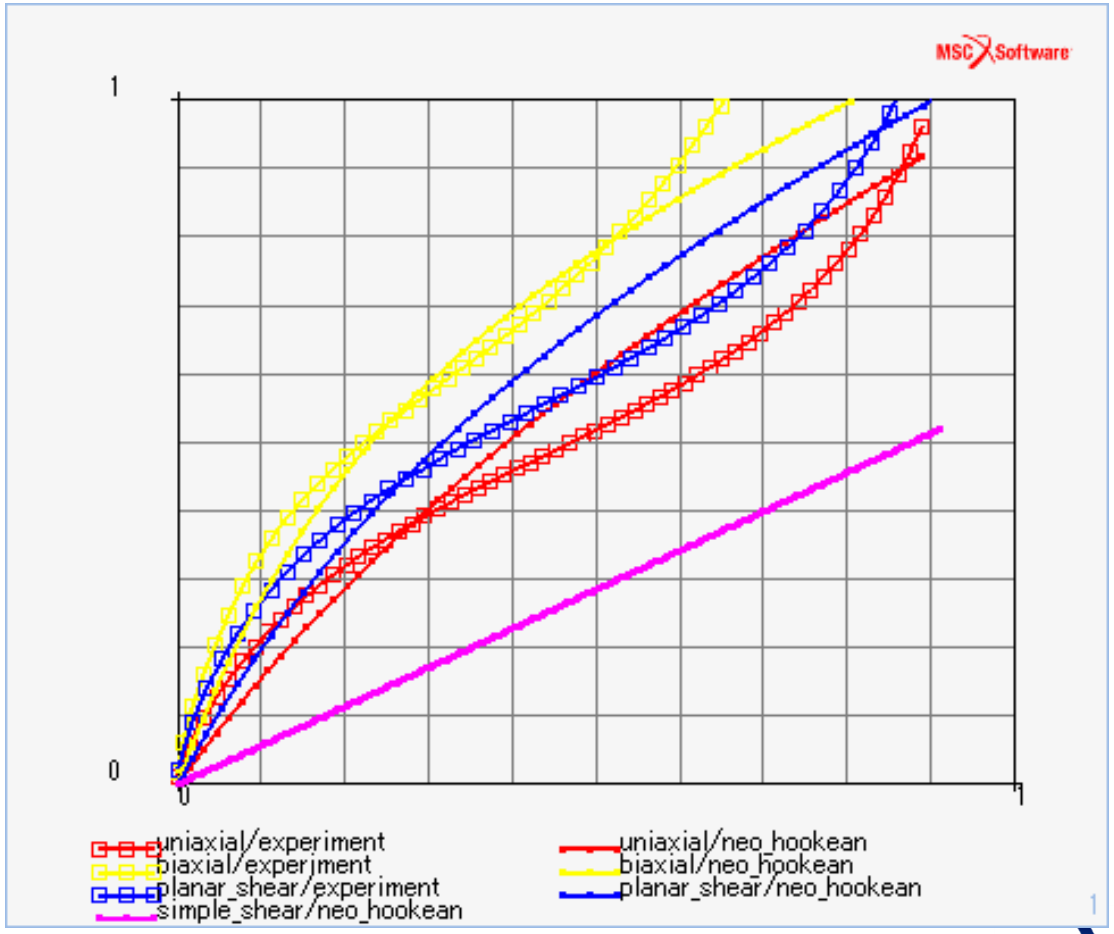


平面せん断:
横幅を固定して引張を与える。試験片は薄くなる。

135| Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

Part 6. 超弾性とカーブフィット
単軸、二軸、せん断のデータでカーブフィットする

- Neo-Hookean を使った結果。どれかのグラフを厳密に再現するということはなく、おおむねすべてに近いようになる。（図は標準的な結果）
- ポテンシャルの次数を上げても基本的な傾向は変わらない。



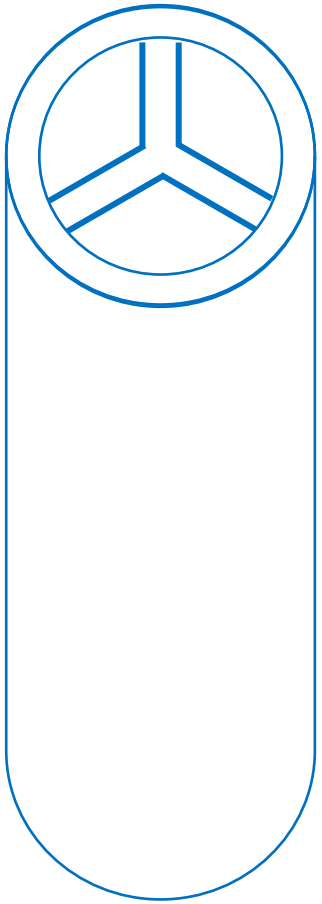
 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

TECHSPIRE HUMAN 3S & TECHNOLOGY

Part 6. 超弾性とカーブフィット
超弾性体の例題：フレキシブルマイクロアクチュエータとは

- https://www.youtube.com/watch?v=kHGLYRUKWeM

- シリコンゴム製で、円筒内部が3室に分かれており、独立に内圧を制御することにより、曲がる。
- オリジナルは、周方向に繊維強化されているのでコストが高い。
- 医療用に使い捨てにできるように繊維強化が無いモデルを作成した。
- 超弾性体ムーニーリブリン体で解析する。

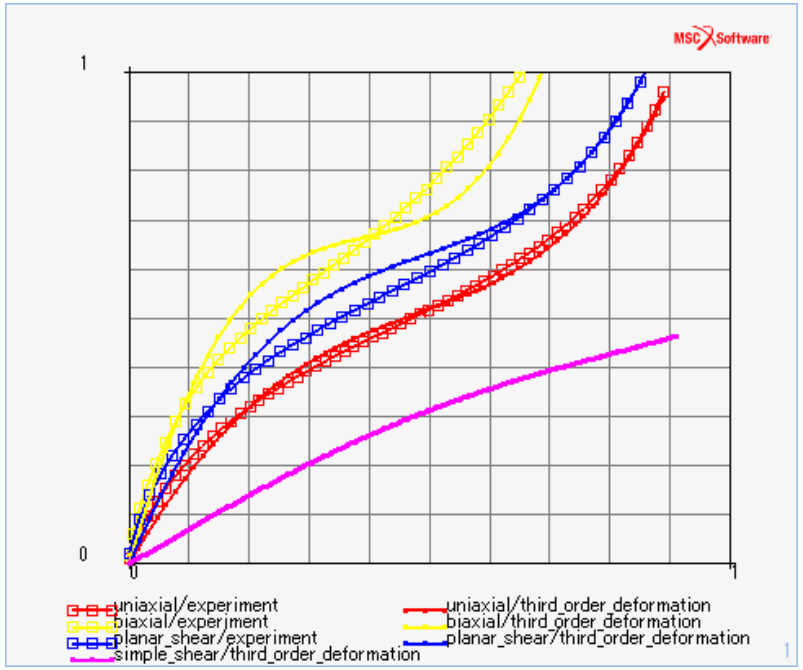


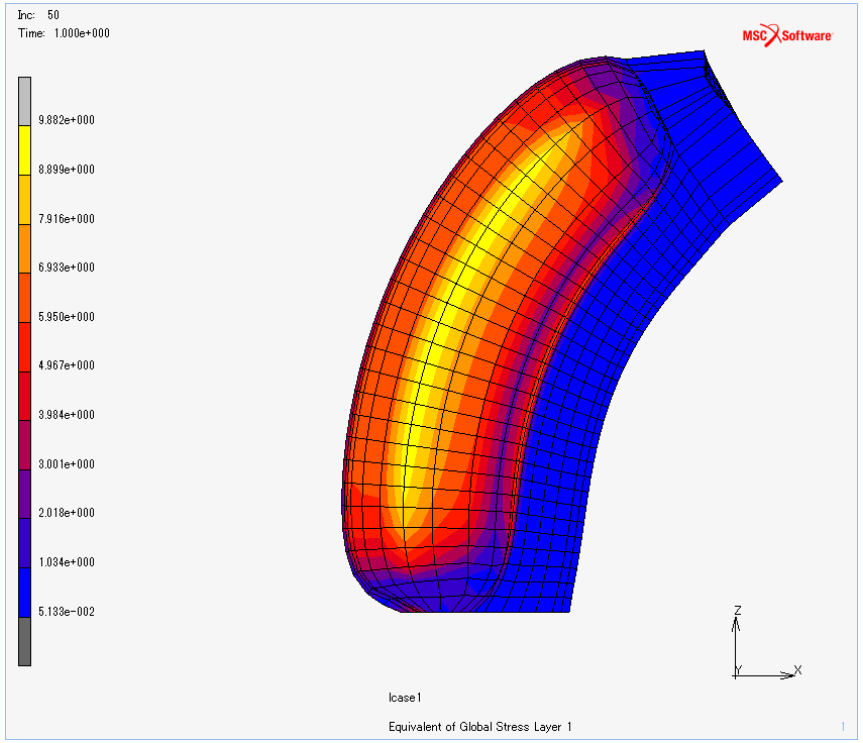
 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN 3S & TECHNOLOGY
TECHSPIRE

Part 6. 超弾性とカーブフィット
単純引張、せん断、均等二軸でカーブフィットを行った場合

- 応力ひずみ線図が一致しているわけではないが、大局的な変形は良好に一致している。





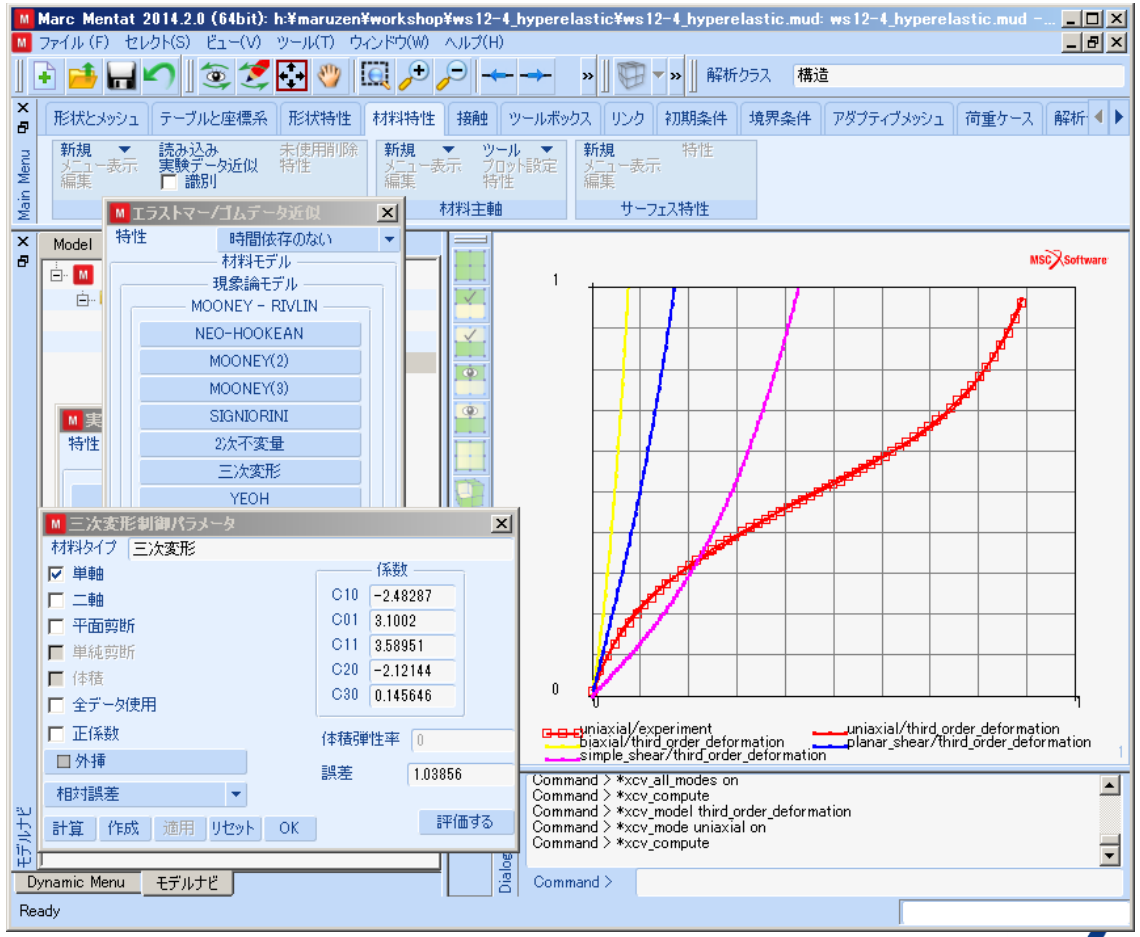
 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

TECHSPIRE HUMAN 3S & TECHNOLOGY

Part 6. 超弾性とカーブフィット

カーブフィットにおいて、やってはいけないこと

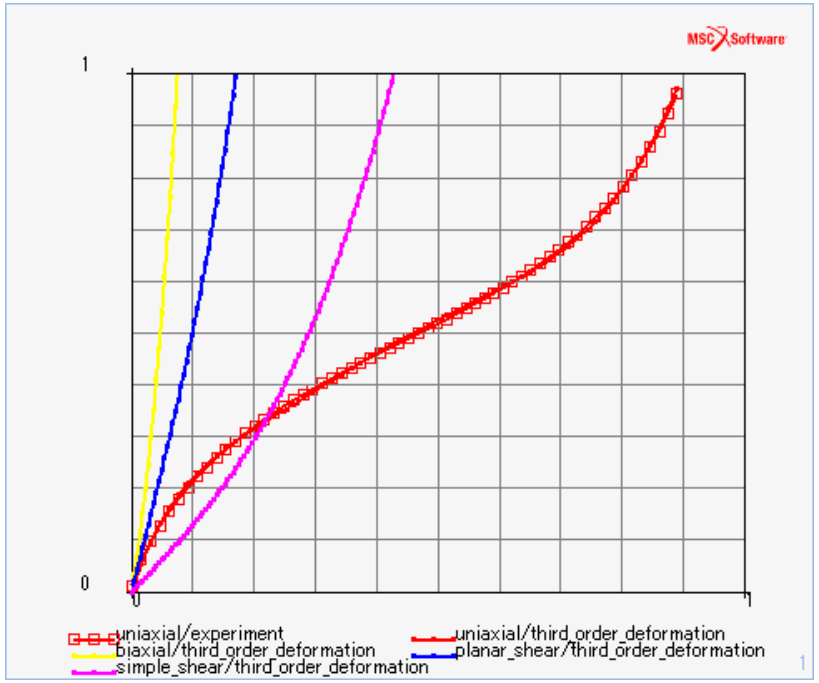
- 一般に、単軸のみのデータで計算すると、単軸は非常に精度よくフィットされる。
- しかし、この係数を用いて解析すると、現実から大きく外れた結果になる場合も多い。
- これは、短軸以外のせん断や二軸の挙動が大きく外れるから。
- 内圧が作用する問題や圧縮の問題で誤差が大きい

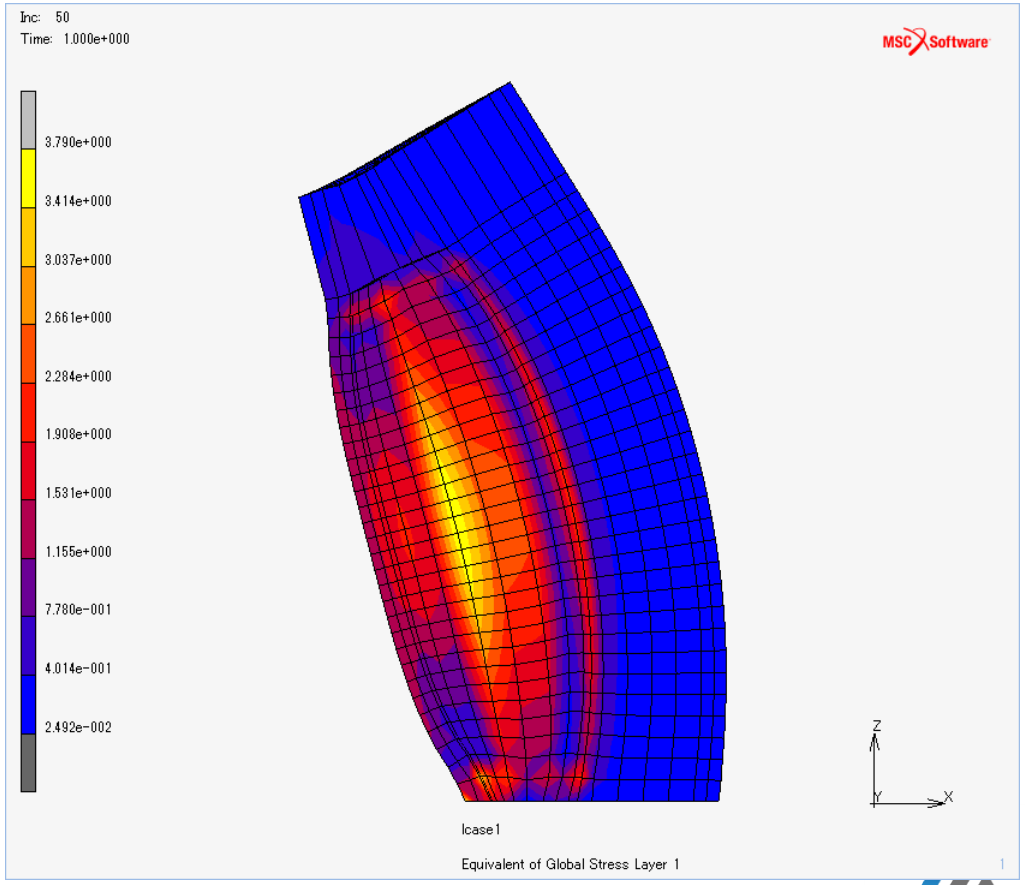


 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

Part 6. 超弾性とカーブフィット
単軸の実験結果のみにカーブフィットした材料物性

- 加圧したほうに曲がる。実験結果と大きく異なり、明らかにおかしい
- 単純引張のカーブは再現しているが、均等２軸、平面せん断は大きく外れる





 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

Part 6. 超弾性とカーブフィット
カーブフィットのポイント

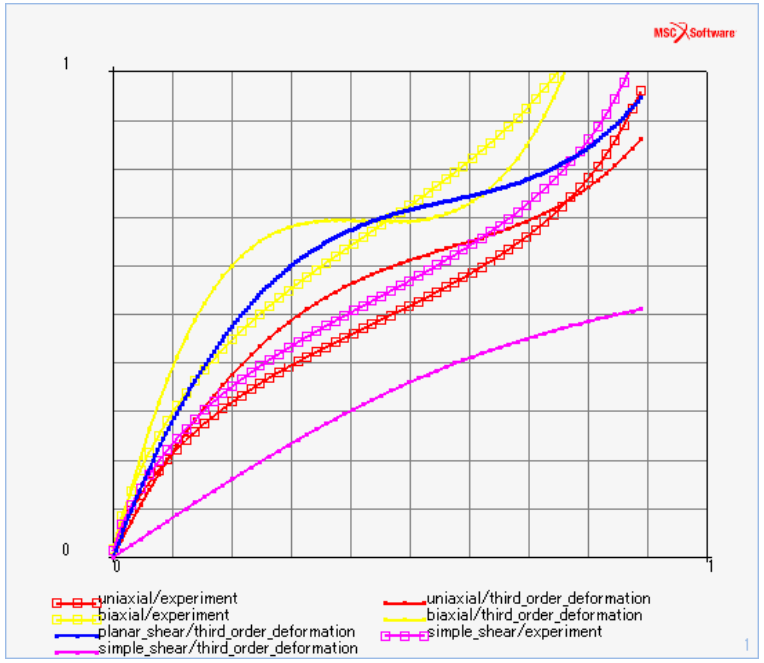
- 基本的に単軸、均等二軸、せん断のデータがそろっていることが望ましい。
- ただし、単軸以外はJIS規格もなく、実験機を持っているところも限られるので、計測が困難。
- 代用データ、単軸：単純せん断：均等二軸はおおよそ1.0：1.1：1.4 になることが知られているので、単軸のグラフを加工して単純せん断と、均等二軸のデータの代用にすると、かなりに良い近似になる場合がある。
  - 永田孝弘（メカニカルデザイン），小林卓哉（メカニカルデザイン），山下義裕（滋賀県立大学），一軸試験による二軸伸張ゴム材料モデルの推定, 日本機械学会 第14回計算力学講演会, No.128, p55, (2001)
- 実例は、フレキシブルマイクロアクチュエータの例題で紹介する。

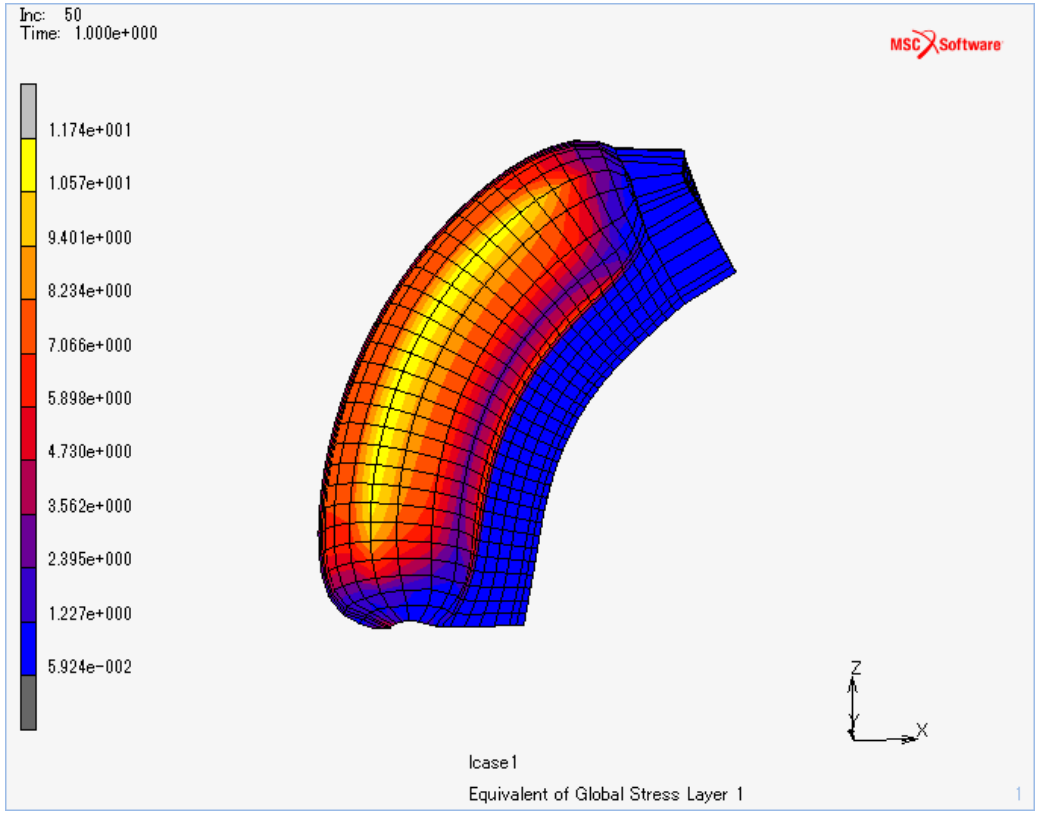
 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN 3S & TECHNOLOGY
TECHSPIRE

Part 6. 超弾性とカーブフィット
代用データによる材料物性

- 若干やわらかい印象があるが、間違った結果には至らない。



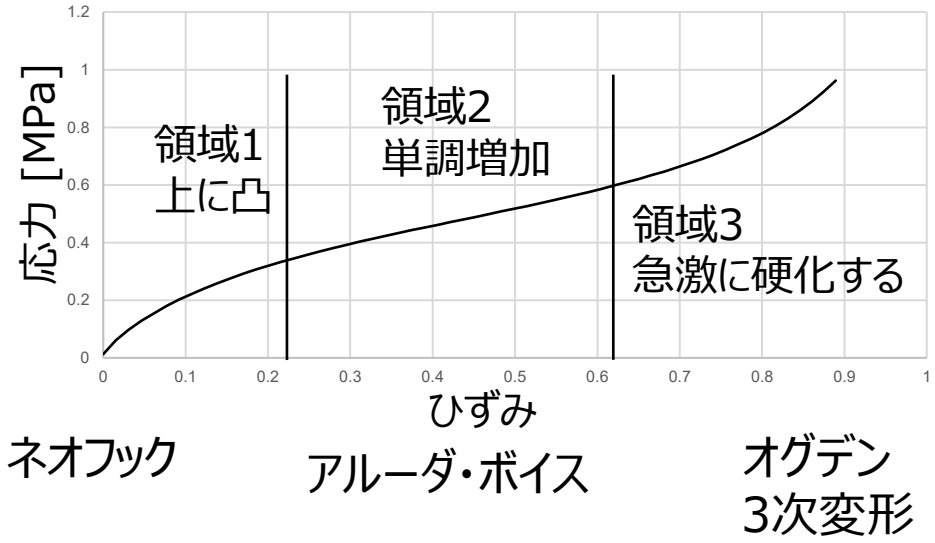


 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

TECHSPIRE

Part 6. 超弾性とカーブフィット
全てのモデルで単軸のみでカーブフィットした結果

- 簡単にまとめると、すべて現実と一致せず



	形式	結果
Neo-Hookean	Mooney	やわらかすぎる
Mooney(2)	Mooney	ほぼ変形しない
Mooney(3)	Mooney	逆に曲がる
Signorini	Mooney	逆に曲がる
2次不変量	Mooney	逆に曲がる
3次変形	Mooney	逆に曲がる
Yeoh	Mooney	逆に曲がる
Ogden	主値	逆に曲がる
Arruda-Boyce	高分子	やわらかすぎる
Gent	高分子	やわらかすぎる

 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

TECHSPIRE

Part 6. フック則の超弾性体表現

- すべての弾性体が超弾性体として表現できるわけではないが、まずフック則を超弾性体で表す
- 微小ひずみテンソルを ε_{ij} とすると、単位体積当たりのひずみエネルギー W は、ひずみの二次式で表される。

$$W(\varepsilon_{ij}) = \frac{\lambda}{2}(\mathrm{tr}\ \varepsilon_{ij})^2 + G\ \varepsilon_{kl}\varepsilon_{kl}$$

- これをε_{ij}で微分すると通常のフック則が得られる

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} = \lambda(\mathrm{tr}\ \varepsilon_{ij})\delta_{ij} + 2G\ \varepsilon_{ij}$$

- 有限変形に拡張する場合は、ひずみを入れ替える
- グリーン・ラグランジュひずみE_{ij}に置き換えるとサンブナン・キルヒホッフモデル

$$W(E_{ij}) = \frac{\lambda}{2}(\mathrm{tr}\ E_{ij})^2 + G\ E_{kl}E_{kl}$$

-

- 真ひずみ$\ln \boldsymbol{V}$に置き換えるとヘンキーモデル

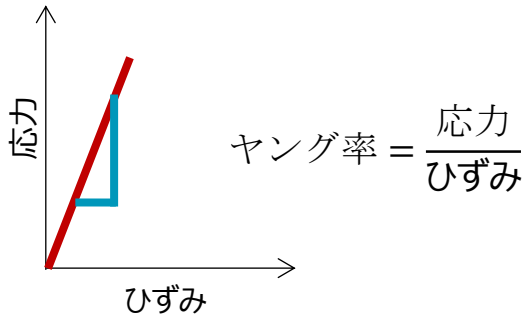
$$W(\ln V_{ij}) = \frac{\lambda}{2}(\mathrm{tr}\ \ln V_{ij})^2 + G\ \ln V_{kl}\ \ln V_{kl}$$

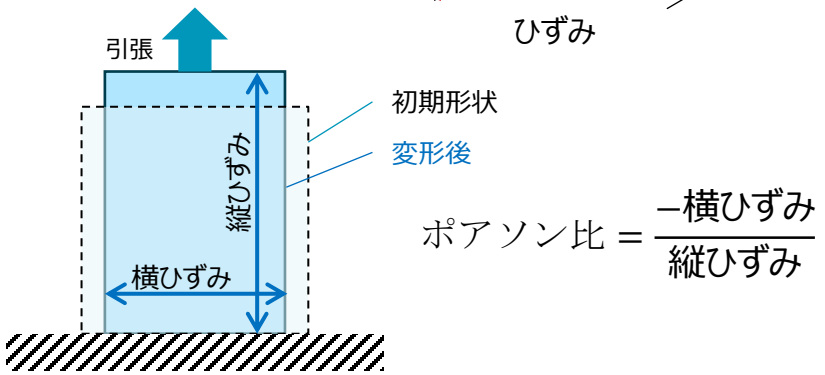
-

 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN 3S & TECHNOLOGY
TECHSPIRE

Part 6. 異方性と超弾性体
等方性材料のヤング率とポアソン比





- いかなる材料も変形が小さい範囲では、応力とひずみは比例する。
- ヤング率は応力とひずみの間の比例定数として定義される。
- 引っ張り方向に生じるひずみを縦ひずみ、直交する方向のひずみを横ひずみとして、その比をポアソン比という。
- また、空間的にどの方向に引っ張っても同じ挙動になるような材料を等方性材料と呼ぶ。
- 等方性材料は、その名の通り、ヤング率、ポアソン比に方向性はない
- 以下のように工学ひずみを定義する（せん断ひずみを2倍にする）

$\varepsilon_x = \varepsilon_{11}, \varepsilon_y = \varepsilon_{22}, \varepsilon_z = \varepsilon_{33}, \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{12}, \gamma_{yz} = 2\varepsilon_{23}, \gamma_{zx} = 2\varepsilon_{31}$

- また応力も以下のように表記する

$\sigma_x = \sigma_{11}, \sigma_y = \sigma_{22}, \sigma_z = \sigma_{33}, \tau_{xy} = \sigma_{12}, \tau_{yz} = \sigma_{23}, \tau_{zx} = \sigma_{31}$

- 応力とひずみの関係を表すマトリックスは、
- $\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$として、$[D]$を応力ひずみマトリックスなどと呼ぶ。
- $\{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\}$ として、$[S]$をコンプライアンスマトリックスなどと呼ぶ。
- $[S]$の具体的な成分表示は以下のようになる

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & & & \\ & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & & 0 & \\ & & \frac{1}{E} & & & \\ & & & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ & sym. & & & \frac{1}{G} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}$$

 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

Part 6. 異方性と超弾性体

直交異方性材料の弾性定数

- 材料の直交する主軸を1、2、3とし、ヤング率を E_i、せん断弾性係数を G_{ij} とするポアソン比は、方向 i のみの単軸応力に対して、次のように定義する

$$\nu_{ij} = -\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i}$$

- コンプライアンスマトリックス$[S]$は以下のようになる。

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{Bmatrix}$$

- 非対角成分を比較すると、次の相反関係が得られる

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}$$
$$\frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3}$$
$$\frac{\nu_{31}}{E_3} = \frac{\nu_{13}}{E_1}$$

- 実は、これが異方性弾性体が超弾性体になる条件
- 弾性ポテンシャルが存在すれば、その二階微分の対称性から剛性行列とコンプライアンス行列は対称になる

$$\dot{S}_{ij} = \frac{\partial^2 W}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} \dot{E}_{ij}$$

$$C_{ijkl} = \frac{\partial^2 W}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}}$$

- 偏微分は順番によらないので、 ij, kl は可換になる

$$C_{ijkl} = \frac{\partial^2 W}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} = \frac{\partial^2 W}{\partial E_{kl} \partial E_{ij}} = C_{klij}$$

HUMAN 3S & TECHNOLOGY TECHSPIRE

（参考）コンプライアンスマトリックスに逆行列が存在する条件

- コンプライアンスマトリックス $[S]$に逆行列が存在する条件は、せん断弾性係数$G_{ij} \neq 0\ (i,j = 1,2,3)$であれば

$$\det\begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} \end{bmatrix} \neq 0$$

- 実際に計算すると

$$\det[\bar{S}] = \frac{1}{E_1}\frac{1}{E_2}\frac{1}{E_3} - \frac{\nu_{12}}{E_1}\frac{\nu_{23}}{E_2}\frac{\nu_{31}}{E_3} - \frac{\nu_{21}}{E_2}\frac{\nu_{32}}{E_3}\frac{\nu_{13}}{E_1} - \frac{\nu_{12}}{E_1}\frac{\nu_{21}}{E_2} - \frac{\nu_{23}}{E_2}\frac{\nu_{32}}{E_3} - \frac{\nu_{31}}{E_3}\frac{\nu_{13}}{E_1}$$

- 相反関係$\nu_{12}/E_1 = \nu_{21}/E_2$, $\nu_{23}/E_2 = \nu_{32}/E_3$, $\nu_{31}/E_3 = \nu_{13}/E_1$ を用いて整理すると、

$$\det[\bar{S}] = \frac{1}{E_1E_2E_3}(1 - 2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31} - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13})$$

- 以上から

$$1 - 2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31} - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} \neq 0$$

 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN 3S & TECHNOLOGY TECHSPIRE

（参考）ひずみエネルギーが非負になる条件

- 通常の線形弾性材料であれば、ひずみエネルギーは非負になる

$$W = \frac{1}{2}\{\varepsilon\}^T[D]\{\varepsilon\} > 0 \qquad (\{\varepsilon\} \neq \{0\})$$

- これは$[S](=[D]^{-1})$ が正定値であることと同値である。
- シルベスターの判定法を用いると以下のようになる。

$$\frac{1}{E_1} > 0$$

$$\begin{vmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 \end{vmatrix} = \frac{1-\nu_{12}\nu_{21}}{E_1E_2} > 0$$

$$\det[\bar{S}] > 0$$

- 直交異方性材料を扱うので、方向１，２，３に関する式の対称性を利用すると、以下の関係式が得られる。

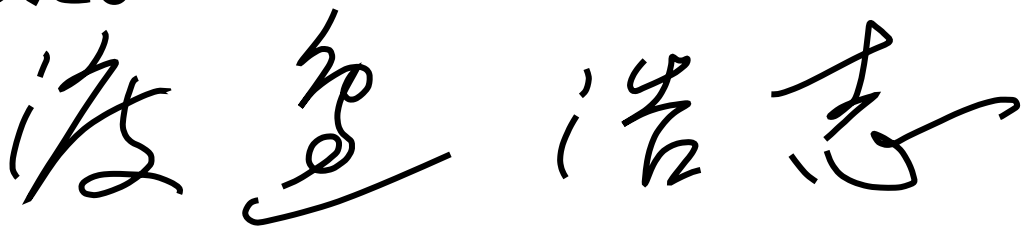
$$E_1, E_2, E_3 > 0$$
$$G_{12}, G_{23}, G_{31} > 0$$
$$1-\nu_{12}\nu_{21} > 0$$
$$1-\nu_{23}\nu_{32} > 0$$
$$1-\nu_{31}\nu_{13} > 0$$
$$1-2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31}-\nu_{12}\nu_{21}-\nu_{23}\nu_{32}-\nu_{31}\nu_{13} > 0$$

 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.

HUMAN 3S & TECHNOLOGY TECHSPIRE

NEDO特別講座
先進複合材料の製造における
高度デジタル人材育成に関する特別講座
第４回　有限変形理論の枠組みと超弾性体の基礎

ご清聴ありがとうございました。



渡邉 浩志（株式会社テクスパイア）

 Copyright 2026 Techspire All Rights Reserved.