

非線形有限要素法：負荷速度・温度依存の 力学挙動を表現する粘弾性構成則の基礎

東北大学大学院工学研究科 土木工学専攻

松原 成志朗

seishiro.matsubara.b7@tohoku.ac.jp

これまでの内容と本講義の位置づけ

- 第一回：6月25日 非線形有限要素法：全体像の理解とFRPそり解析への応用
講師：寺田賢二郎 先生
- 第二回：7月23日 非線形有限要素法：超弾性・弾塑性・弾粘塑性構成則の理論的基礎と数値解析への導入
講師：山川優樹 先生
- 第三回：9月24日 非線形有限要素法：負荷速度・温度依存の力学挙動を表現する粘弾性構成則の基礎
講師：松原成志朗

概要：負荷速度・温度依存の力学挙動を表現するためのレオロジーモデルに基づく粘弾性構成則の基礎を解説する。まずは、最も基礎的な粘弾性レオロジーモデルと実用で多用される一般化Maxwellモデルの特徴や性能を説明する。また、粘弾性の温度依存性を扱うための温度・時間換算則や関連する材料物性の同定方法、さらに粘弾性構成則の数理塑性論的な解釈についても説明する。
- 第四回：10月22日 非線形有限要素法：有限変形理論の枠組みと超弾性体の基礎
講師：渡邊浩志 先生

内容

1 材料構成則の位置づけと分類（4–8頁）

材料の組織・結合状態が応答を左右することを確認し、構成則が力学問題を閉じる役割と、弾性・塑性・粘性・損傷による分類を整理する

2 粘弾性挙動とレオロジーモデル（9–13頁）

負荷速度と温度で変化するクリープ・応力緩和を題材に、バネ・ダッシュポットの連結と Voigt・Maxwellモデルの基礎式を導く

3 基本モデルと一般化Maxwell（14–21頁）

基本モデルのクリープ・緩和・回復性能と限界を比較し、平衡バネと複数のMaxwell要素により、広い時間スケールの応答を表現する

4 動的粘弾性と材料試験（22–24頁）

周期負荷に対する位相差から、貯蔵弾性率・損失弾性率・損失正接を導き、動的粘弾性試験による評価方法を学ぶ

5 温度依存性と時間—温度換算（25–26頁）

緩和時間の温度依存性をシフトファクターで表し、時間—温度重ね合わせ、WLF式・Arrhenius式、マスターカーブ構築を理解する

6 材料パラメータの同定（27頁）

動的弾性率のマスターカーブを一般化Maxwellモデルへフィッティングし、各要素のせん断弾性率と参照緩和時間を同定する

7 数理塑性論との接続（28–29頁）

弾粘性モデルのひずみ分解・降伏関数・流れ則・発展則と対比し、Maxwellモデルを数理塑性論の枠組みから再解釈する

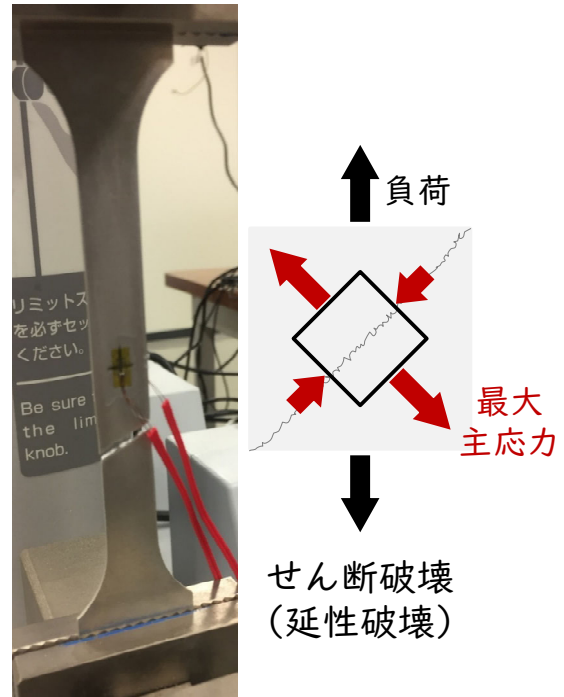
8 降伏応力と非線形粘性（30–32頁）

降伏応力が残留ひずみと不完全緩和を生むことを示し、非線形粘性則におけるshear thinning／thickeningの緩和特性を比較する

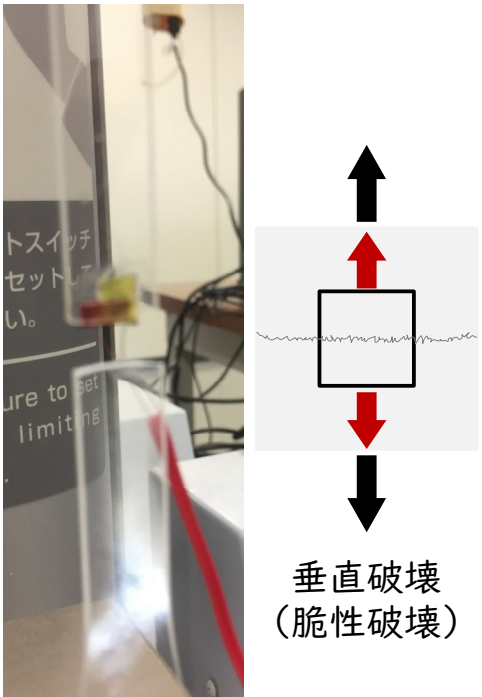
同じ負荷条件でも「材料が違えば」力学挙動は異なる

■ 材料の一軸引張試験

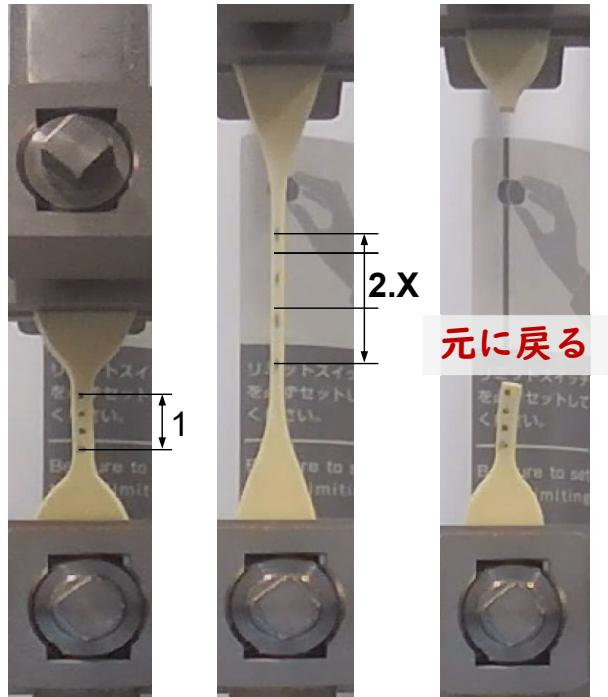
金属試験片の破断面



樹脂試験片の破断面

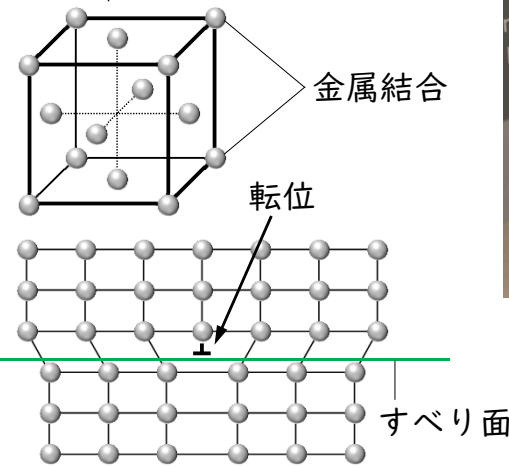
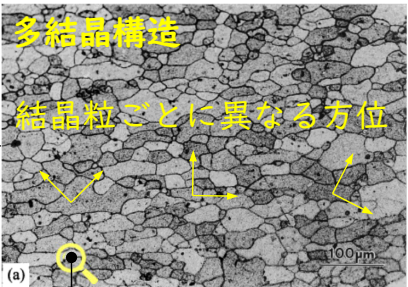
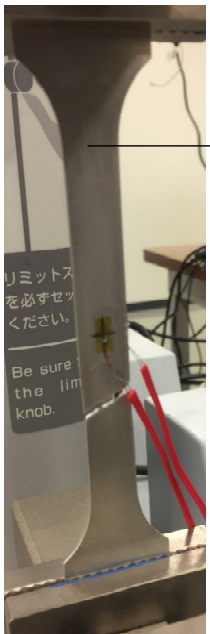


ゴム試験片の大変形と回復

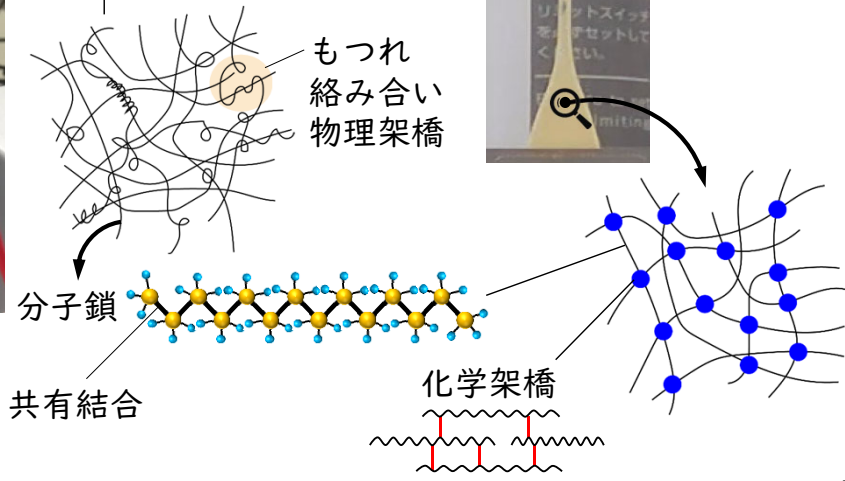
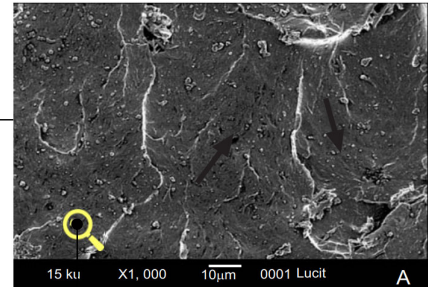
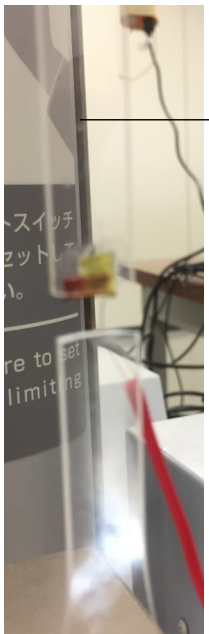


構成要素，組織，結合状態などが異なるため統一的な力学モデルはあり得ない

金属試験片



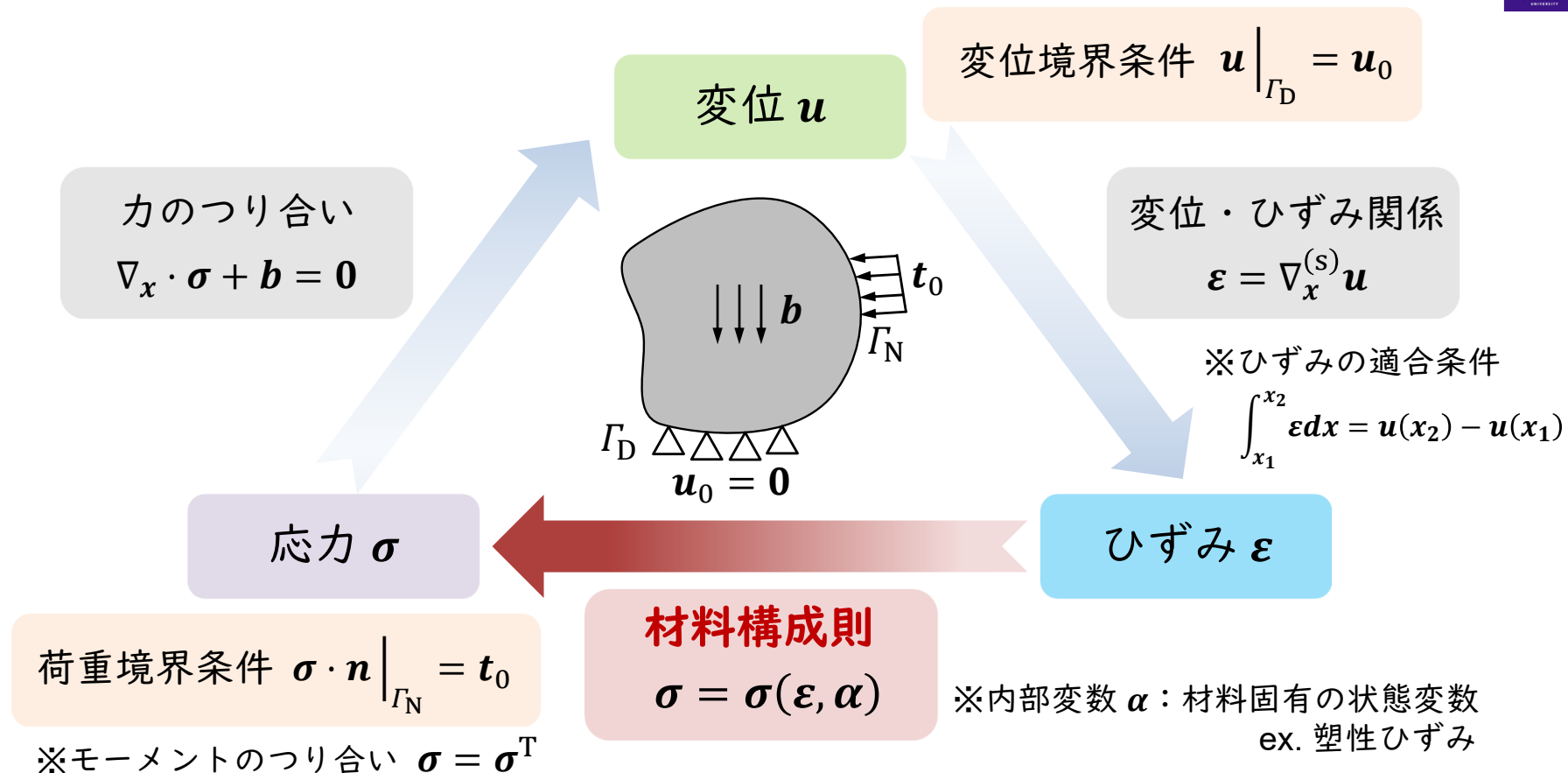
樹脂試験片



ゴム試験片



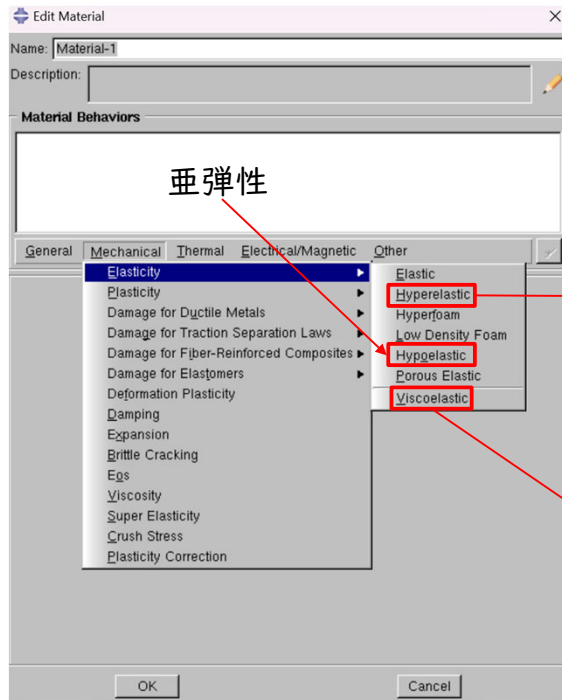
材料の力学モデルは力学問題全体のどこに位置するか？



負荷・環境条件，力学挙動の捉え方・性質に応じて多様な材料構成則が存在

■ CAEソフトウェアAbaqusに標準搭載の材料構成モデル

● 弾性モデル



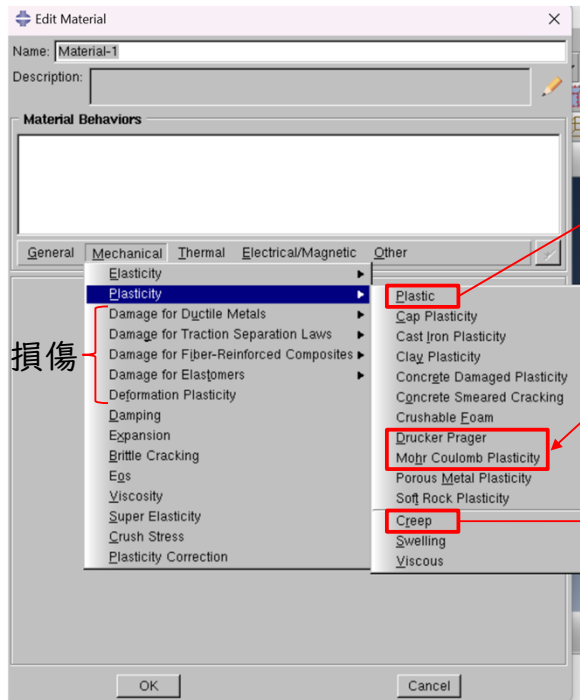
超弾性モデル

Arruda-Boyce
Marlow
Mooney-Rivlin
Neo Hooke
Ogden
Polynomial
Reduced Polynomial
User-defined
Van der Waals
Yeoh
Unknown
Valanis-Landel

粘弾性

Formula
Tabular
Prony
Creep test data
Relaxation test data

● 塑性モデル



硬化則

Isotropic
Kinematic
Multilinear-Kinematic
Johnson-Cook
User
Combined

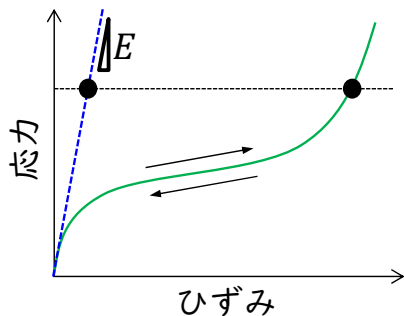
静水圧依存モデル

クリープモデル

Power
Strain-Hardening
Time-Hardening
Time-Power
Hyperbolic-Sine
User-defined
Anand
Darveaux

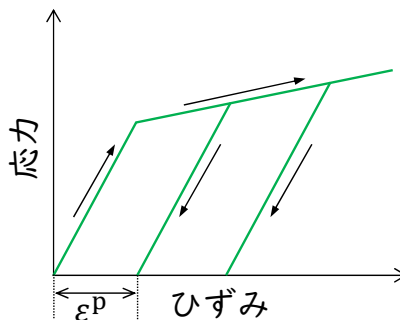
力学挙動の性質の違いによる材料構成則の分類

● 弾性



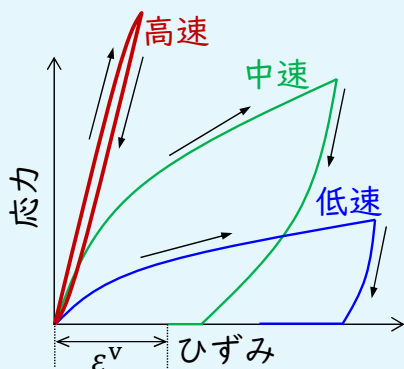
- ・ 応力が負荷経路に非依存
- ・ 応力とひずみが一対一対応
- ・ 微小変形では線形弾性
- ・ 大変形では超弾性
(ゴム・生体材料に多い)

● (速度非依存) 塑性



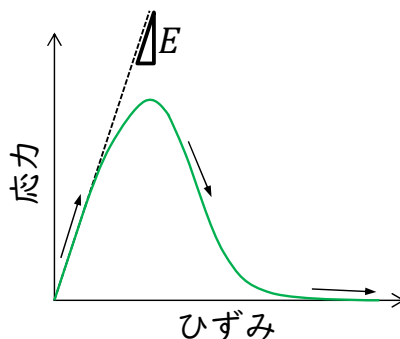
- ・ 応力が負荷経路に依存
- ・ 除荷時にひずみ ε^p が残存
- ・ ε^p は履歴の蓄積による変形
(ひずみ速度に依存しない)
- ・ 環境の影響を受けていない
金属・地盤材料に多い

● 粘性 (粘弾性・粘塑性)



- ・ 応力が負荷経路に依存
- ・ 応力がひずみ速度に依存
- ・ ε^v は実時間に依存する変形
- ・ 環境の変化に敏感
- ・ 高分子材料や環境の影響を受ける金属・地盤材料に多い

● 損傷



- ・ 負荷による材料の劣化に伴って応力が減少
- ・ き裂・破壊と密接に関係

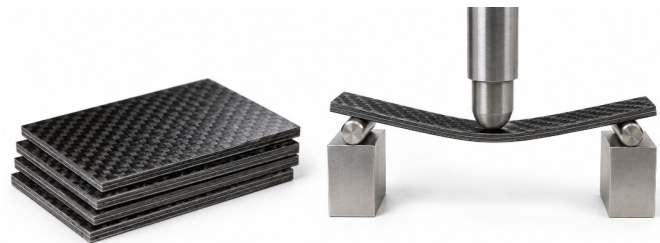
負荷速度や温度などの環境に応じて力学挙動が変化する材料



片栗粉と水の混合物に見られるダイランシー
力学挙動が負荷速度に依存



あめは冷やすと硬くて脆く、加熱すると柔軟に変形
力学挙動が温度に依存

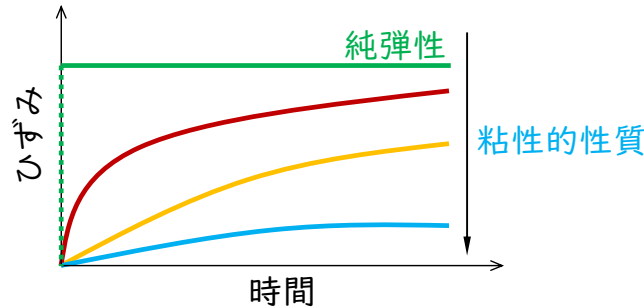
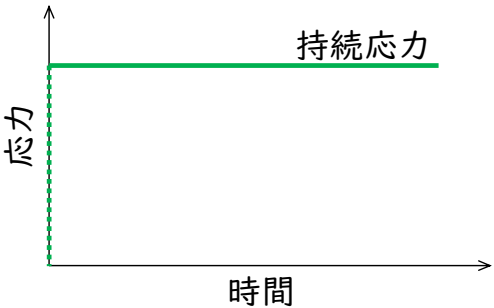


ゴムや樹脂といった**高分子材料・複合材料**は負荷速度や温度環境に応じて多様な力学挙動を示す

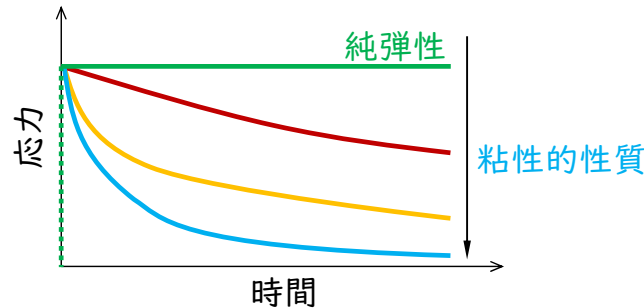
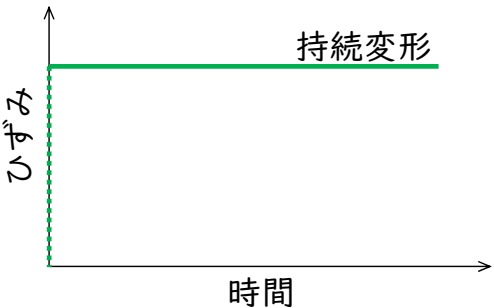
代表的な速度依存の力学挙動：クリープ・応力緩和

負荷速度に応じて**弾性的**または**粘性的**な力学挙動を示す

- **クリープ**：粘性効果の大きさに依存してひずみ応答に遅れが生じる



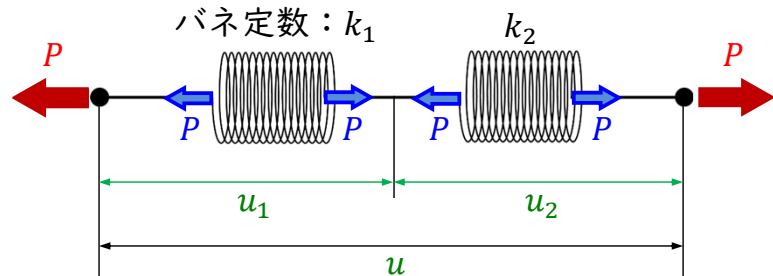
- **応力緩和**：粘性効果の大きさに依存して応力が徐々に減少する



弾性と粘性の複合効果をどのようにモデル化するか

ヒント：連結バネモデル

● 直列バネモデル

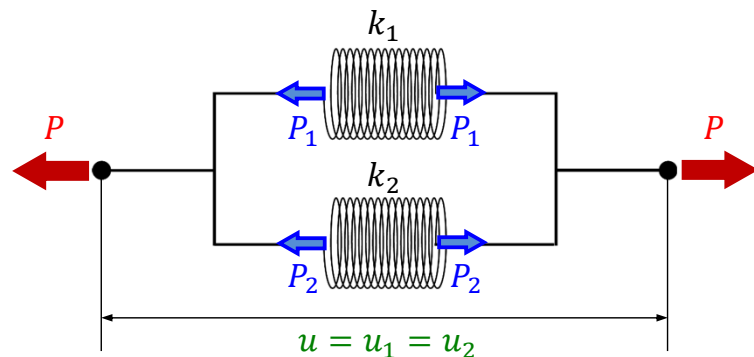


✓ 荷重の関係 $P = P_1 = P_2$

✓ 変位の関係 $u = u_1 + u_2$

□ 荷重変位関係 $P = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} u$

● 並列バネモデル



✓ 荷重の関係 $P = P_1 + P_2$

✓ 変位の関係 $u = u_1 = u_2$

□ 荷重変位関係 $P = (k_1 + k_2) u$

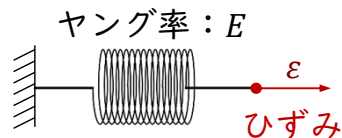
連結バネモデルによって複数の弾性特性の複合効果を表現できる

弾性と粘性の複合効果をどのようにモデル化するか

基礎的な力学的性質を示す要素の連結によって複合効果を表現すればよい

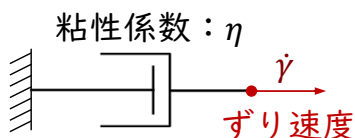
● レオロジー要素

■ バネ要素 (弾性)



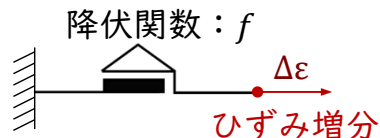
✓ Hooke則: $\sigma = E\varepsilon$

■ ダッシュポット要素 (粘性)



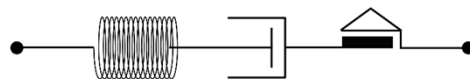
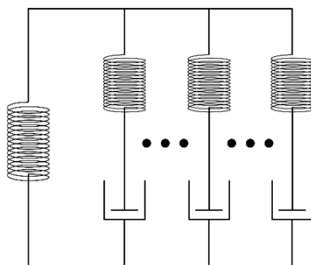
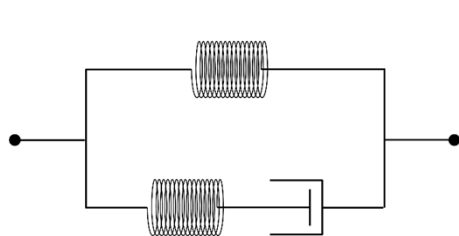
✓ Newton粘性則: $\tau = \eta\dot{\gamma}$

■ スライダー要素 (塑性)



✓ 降伏条件: $f(\sigma) = 0$

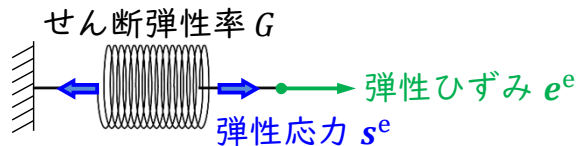
● レオロジーモデル: 高分子材料の力学や流体力学の分野で広く用いられている材料構成則の図的な表現方法



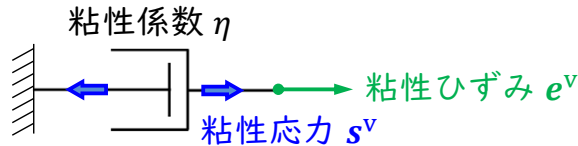
- レオロジーモデルは対象とする材料, 重視する力学挙動によって数多くの形が提案
- 最も基本的な**粘弾性レオロジーモデル (Voigtモデル, Maxwellモデル)**を紹介

粘弾性の基本レオロジーモデル

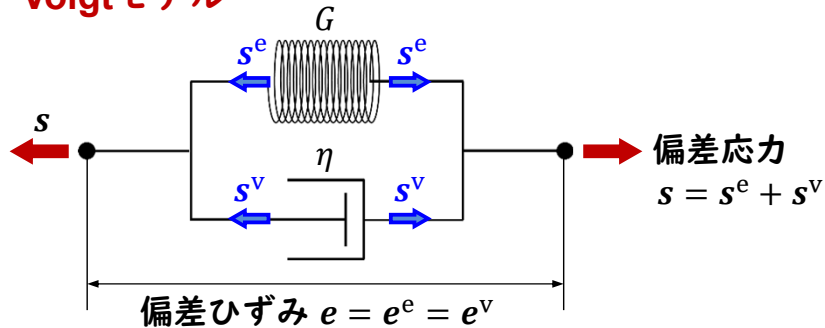
弾性：Hooke則 $s^e = 2Ge^e$



粘性：Newton粘性則 $s^v = \eta \dot{e}^v$



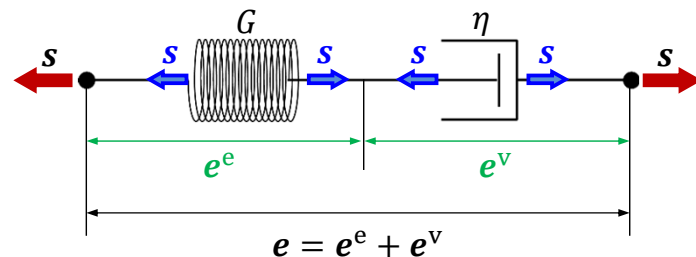
● Voigtモデル



Voigtモデルの微分方程式

$$\dot{e} + \frac{1}{\tau^*} e = \frac{1}{\eta} s \quad \text{遅延時間 } \tau^* = \frac{\eta}{2G}$$

● Maxwellモデル



Maxwellモデルの微分方程式

$$\dot{s} + \frac{1}{\tau} s = 2G \dot{e} \quad \text{緩和時間 } \tau = \frac{\eta}{2G}$$

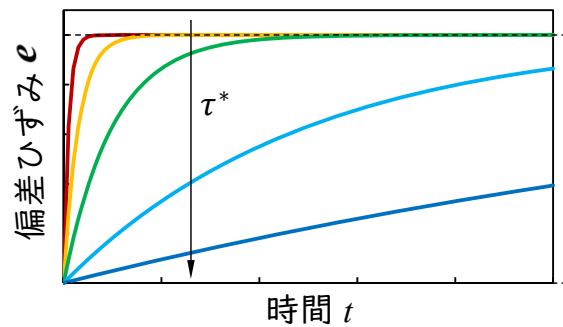
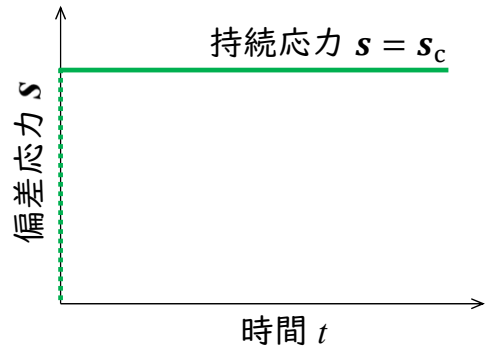
粘性則の影響で応力・ひずみ関係は発展則の形式となる

基本モデルが表現する粘弾性挙動

1. 持続応力 $s = s_c = \text{const.}$ を作用させるときのひずみ応答（クリープ）

Voigtモデルの微分方程式 $\dot{e} + \frac{1}{\tau^*} e = \frac{1}{\eta} s$

初期条件： $e(0) = 0$ として微分方程式を解くと $e(t) = \frac{s_c}{2G} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau^*}\right) \right\}$ 1階の非斉次線形常微分方程式の解



$\lim_{\tau^* \rightarrow +0} e = \frac{s_c}{2G}$

✓ 遅延時間 τ^* の増加によって
ひずみ応答が遅れる
➡ クリープの表現に資する

$\lim_{\tau^* \rightarrow +\infty} e \rightarrow 0$

Maxwellモデルの微分方程式 $\dot{s} + \frac{1}{\tau} s = 2G\dot{e}$

$\dot{s} = 0$ より, $\dot{e} = \frac{s_c}{\eta} = \text{const.}$
 $\because \tau = \frac{\eta}{2G}$

✓ ひずみはいつまでも線形的に増加
➡ 固体的なクリープの表現に不適

基本モデルが表現する粘弾性挙動

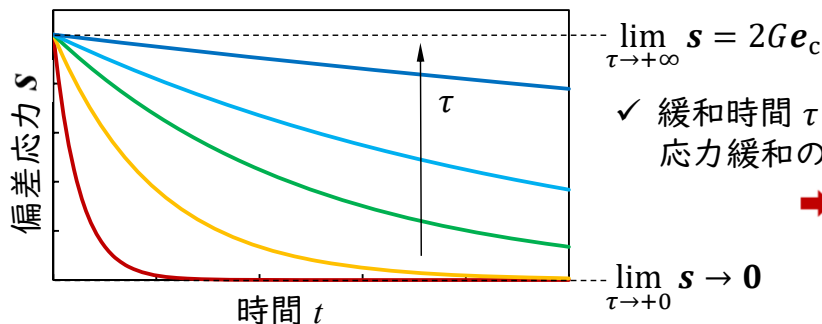
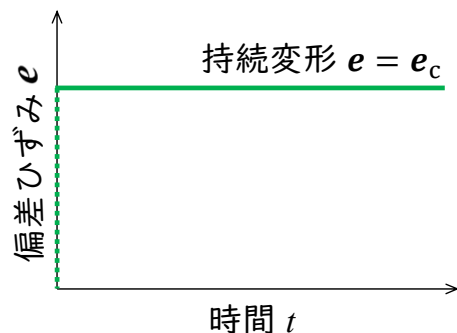
2. 持続変形 $e = e_c = \text{const.}$ を作用させるときの応力応答（応力緩和）

Voigtモデルの微分方程式 $\dot{e} + \frac{1}{\tau^*} e = \frac{1}{\eta} s$ $\dot{e} = 0$ より, $s = 2Ge_c = \text{const.}$ ✓ 応力は常に一定を保つ（純弾性）

➡ 応力緩和の表現に不適

Maxwellモデルの微分方程式 $\dot{s} + \frac{1}{\tau} s = 2G\dot{e}$

初期条件： $s(0) = 2Ge_c$ として微分方程式を解くと $s = 2Ge_c \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ 1階の斉次線形常微分方程式の解



✓ 緩和時間 τ の増加によって
応力緩和の進展が遅くなる

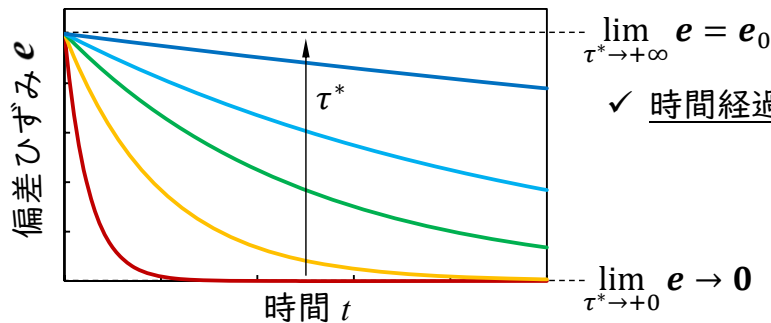
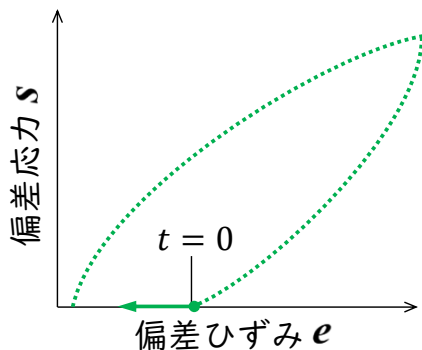
➡ 応力緩和の表現に資する

基本モデルが表現する粘弾性挙動

3. 無負荷保持過程 $s = 0$, $e(0) \neq 0$ におけるひずみ挙動 (ひずみ回復)

Voigtモデルの微分方程式 $\dot{e} + \frac{1}{\tau^*} e = \frac{1}{\eta} s$

初期条件: $e(0) = e_0$ として微分方程式を解くと $e(t) = e_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau^*}\right)$ 1階の斉次線形常微分方程式の解



$$\lim_{\tau^* \rightarrow +\infty} e = e_0$$

✓ 時間経過とともに偏差ひずみが減少し,

(ひずみ回復挙動)

最終的に未変形状態に達する

(塑性的ではない)

$$\lim_{\tau^* \rightarrow +0} e \rightarrow 0$$

Maxwellモデルの微分方程式 $\dot{s} + \frac{1}{\tau} s = 2G\dot{e}$

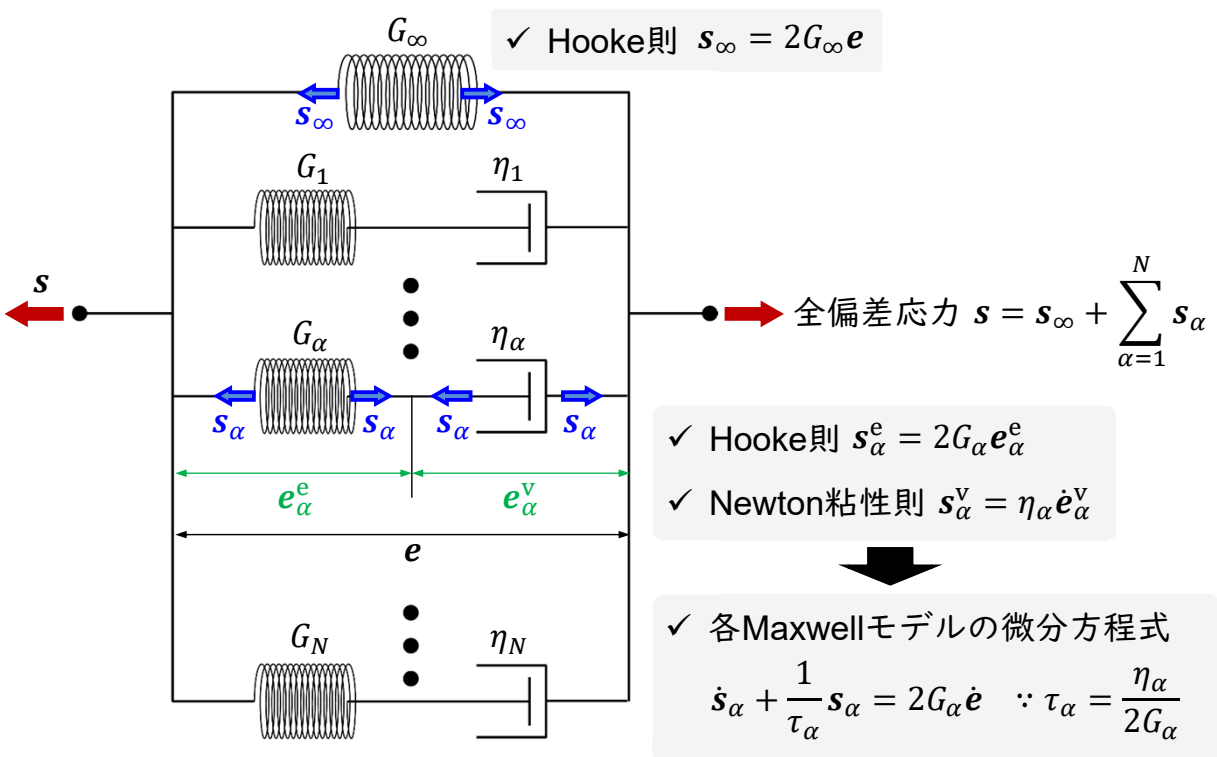
$s = 0$, $\dot{s} = 0$ より, $e = e_0 = \text{const.}$

✓ 蓄積した粘性変形の解放が生じず, 塑性的な挙動を示す

➤ Maxwellモデルは必ずしも「弾性的」ではない

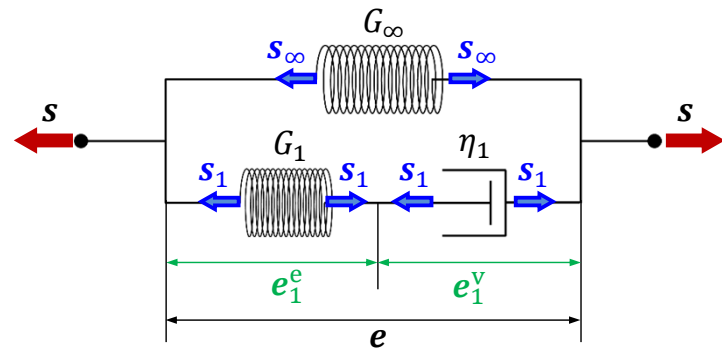
一般化Maxwellモデル

複数のMaxwell要素を並列に並べることで多様な粘弾性挙動を表現可能なモデル



一般化Maxwellモデルはクリープを表現できるか

■ 純弾性要素とMaxwell要素の2要素モデル



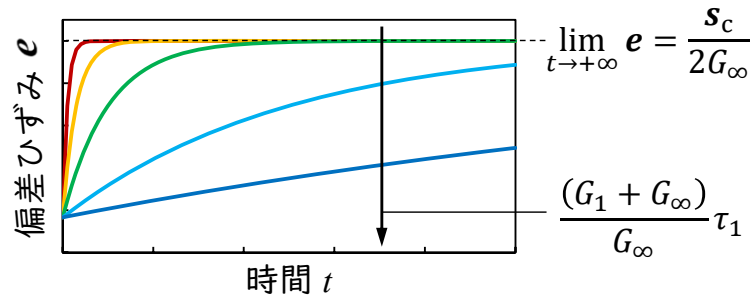
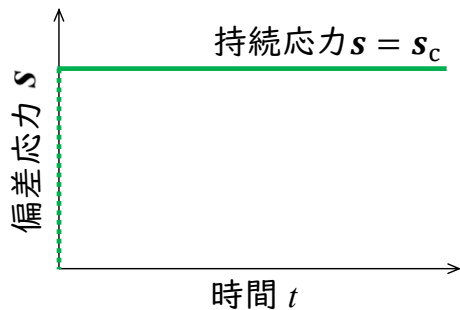
✓ 全応力 $s = 2G_{\infty}e + s_1$

✓ Maxwellモデルの微分方程式 $\dot{s}_1 + \frac{1}{\tau_1}s_1 = 2G_1\dot{e} \quad \because \tau_1 = \frac{\eta_1}{2G_1}$

✓ 持続応力 $s = s_c = \text{const.}$

$s_1 = s_c - 2G_{\infty}e, \quad \dot{s}_1 = -2G_{\infty}\dot{e}$ をMaxwellモデルの微分方程式に代入して整理 $\dot{e} + \frac{1}{\tau_1} \frac{G_{\infty}}{(G_1 + G_{\infty})} e = \frac{1}{\tau_1} \frac{s_c}{2(G_1 + G_{\infty})}$

初期条件： $e(0) = \frac{s_c}{2(G_{\infty} + G_1)}$ として微分方程式を解くと $e(t) = \frac{s_c}{2G_{\infty}} \left\{ 1 - \frac{G_1}{(G_1 + G_{\infty})} \exp\left(-\frac{G_{\infty}}{(G_1 + G_{\infty})} \frac{t}{\tau_1}\right) \right\}$

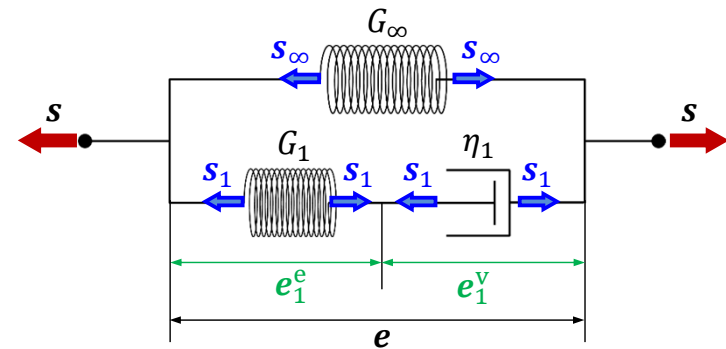


✓ $t = 0$ で瞬時ひずみが生じ、
特性時間が大きいほど応答が遅れる

➡ クリープの表現に資する

一般化Maxwellモデルはひずみ回復を表現できるか

■ 純弾性要素とMaxwell要素の2要素モデル



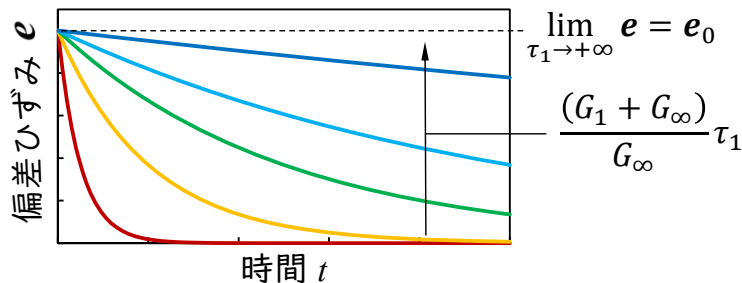
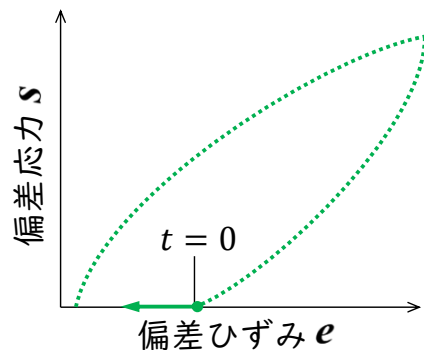
✓ 全応力 $s = 2G_\infty e + s_1$

✓ Maxwellモデルの微分方程式 $\dot{s}_1 + \frac{1}{\tau_1} s_1 = 2G_1 \dot{e} \quad \because \tau_1 = \frac{\eta_1}{2G_1}$

✓ 無負荷保持過程 $s = 0, e(0) \neq 0$

$s_1 = -2G_\infty e, \dot{s}_1 = -2G_\infty \dot{e}$ をMaxwellモデルの微分方程式に代入して整理 $\dot{e} + \frac{1}{\tau_1} \frac{G_\infty}{(G_1 + G_\infty)} e = 0$

初期条件： $e(0) = e_0$ として微分方程式を解くと $e(t) = e_0 \exp\left(-\frac{G_\infty}{(G_1 + G_\infty)} \frac{t}{\tau_1}\right)$



✓ 純弾性要素の応力を駆動力として
ひずみ回復挙動を表現できる

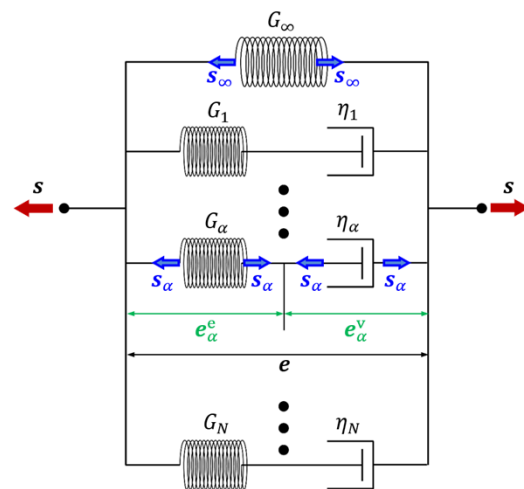
✓ 緩和時間の増加によって
ひずみ回復が遅れる

複雑な緩和挙動の表現

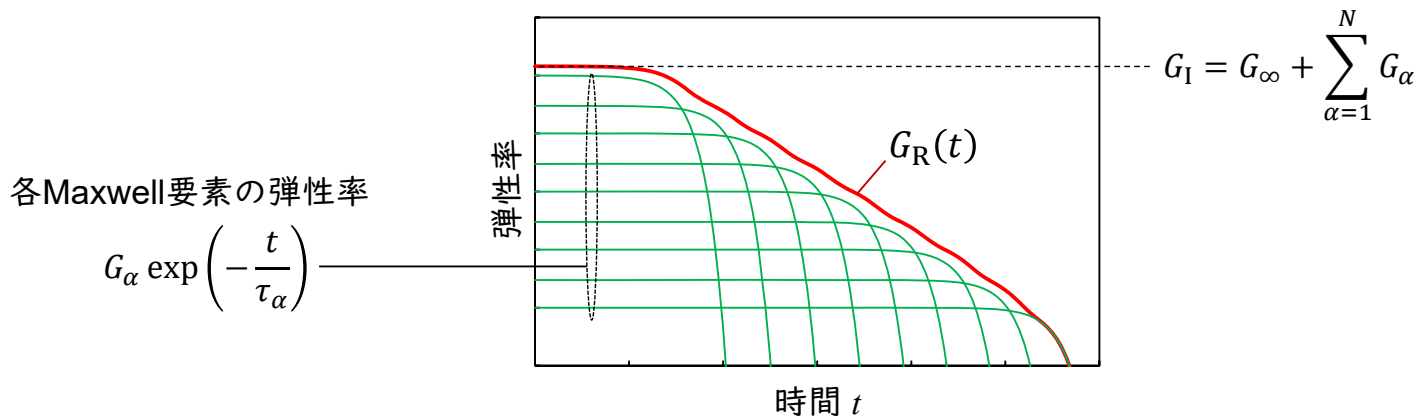
✓ 持続変形 $e = e_c = \text{const.}$ を作用させたときの全応力

$$s = s_\infty + \sum_{\alpha=1}^N s_\alpha = 2 \left[G_\infty + \sum_{\alpha=1}^N G_\alpha \exp\left(-\frac{t}{\tau_\alpha}\right) \right] e_c = 2G_R(t)e_c$$

緩和弾性率: $G_R(t) = G_\infty + \sum_{\alpha=1}^N G_\alpha \exp\left(-\frac{t}{\tau_\alpha}\right)$



■ 様々な緩和時間を有するMaxwellモデルを連結することで複雑な緩和現象を再現可能



複雑な緩和挙動の表現

■ 緩和弾性率から高分子材料の多様な状態がみえてくる

[A] ガラス状態

剛性は高いが比較的脆い．多くの樹脂は常温でこの状態

[B] ガラス転移状態

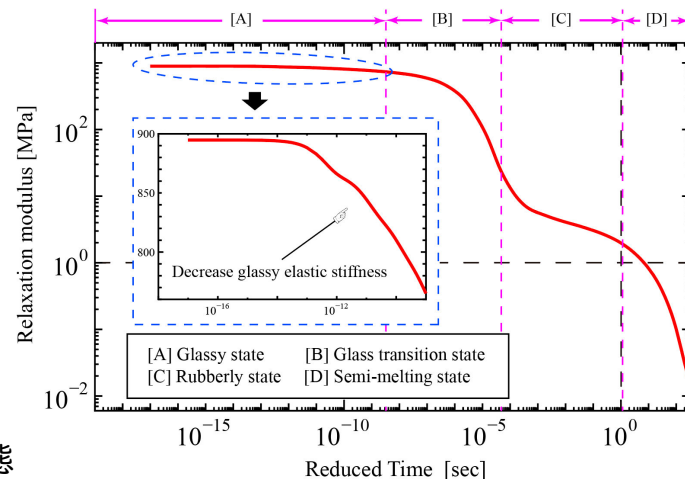
剛性は急激に減少し，エネルギー散逸が最も大きくなる状態

[C] ゴム状態

非常に柔らかいが伸び性能に富む．多くのゴムは常温でこの状態

[D] (準) 熔融状態

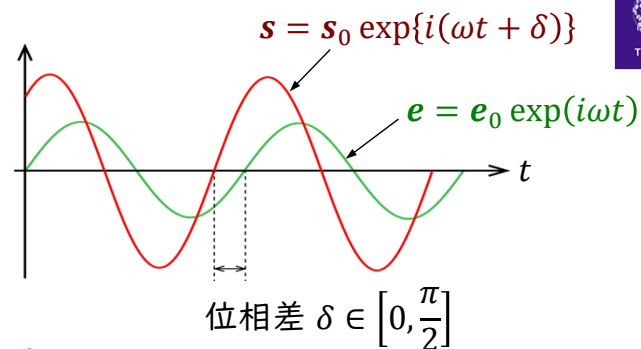
単純に溶ける状態で剛性はほとんどゼロ



Matsubara et al., EC, (2020)

Maxwellモデルが表現する動的粘弾性挙動

動的なひずみ入力 $e = e_0 \exp(i\omega t) = e_0 \cos(\omega t) + ie_0 \sin(\omega t)$ に対して
動的な応力 $s = s_0 \exp\{i(\omega t + \delta)\}$ が生じると仮定



◆ 粘性効果によって応力はひずみに対して位相差 δ だけ進んでいると考える

応力速度 $\dot{s} = i\omega s$ とひずみ速度 $\dot{e} = i\omega e$ をMaxwellモデルの微分方程式： $\dot{s} + \frac{1}{\tau}s = 2G\dot{e}$ に代入すると

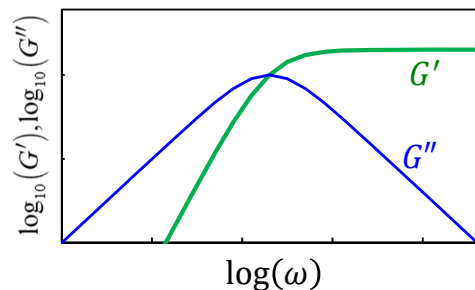
$$\left(i\omega + \frac{1}{\tau}\right)s = 2Gi\omega e \Leftrightarrow s = 2\left(\frac{\tau^2\omega^2}{1 + \tau^2\omega^2}G + i\frac{\tau\omega}{1 + \tau^2\omega^2}G\right)e = 2(G' + iG'')e$$

複素弾性率 $G^* = G' + iG''$ について

- 貯蔵弾性率： G' ・・・弾性特性に関わる動的な弾性率
- 損失弾性率： G'' ・・・粘性特性に関わる動的な弾性率

(例) 弾性と貯蔵弾性率

l'Hospitalの定理より, $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} s = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \left(2\frac{\tau^2\omega^2}{1 + \tau^2\omega^2}G + i2\frac{\tau\omega}{1 + \tau^2\omega^2}G\right)e = 2Ge$



- 速度が速いと弾性的な振る舞い
- 速度が遅いと粘性的な振る舞い

Maxwellモデルが表現する動的粘弾性挙動

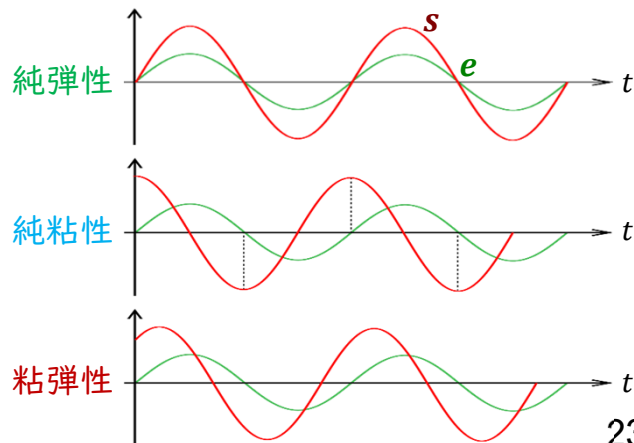
✓ さらに $s = 2(G' + iG'')e$ を式展開する

$$s = 2\sqrt{(G')^2 + (G'')^2} \left(\underbrace{\frac{G'}{\sqrt{(G')^2 + (G'')^2}}}_{=\cos\delta} + i \underbrace{\frac{G''}{\sqrt{(G')^2 + (G'')^2}}}_{=\sin\delta} \right) e = 2\sqrt{(G')^2 + (G'')^2} \underbrace{\exp(i\delta)}_{=\cos\delta + i\sin\delta} e_0 \exp(i\omega t)$$

$$s = 2\sqrt{(G')^2 + (G'')^2} e_0 \exp\{i(\omega t + \delta)\}, \quad \text{where} \quad \cos\delta = \frac{G'}{\sqrt{(G')^2 + (G'')^2}}, \quad \sin\delta = \frac{G''}{\sqrt{(G')^2 + (G'')^2}}$$

- **位相差 δ** は貯蔵弾性率と損失弾性率の比： $\tan\delta = \frac{G''}{G'}$ (**損失正接**) として得られ、
粘性効果によるエネルギー散逸を評価するための指標となる

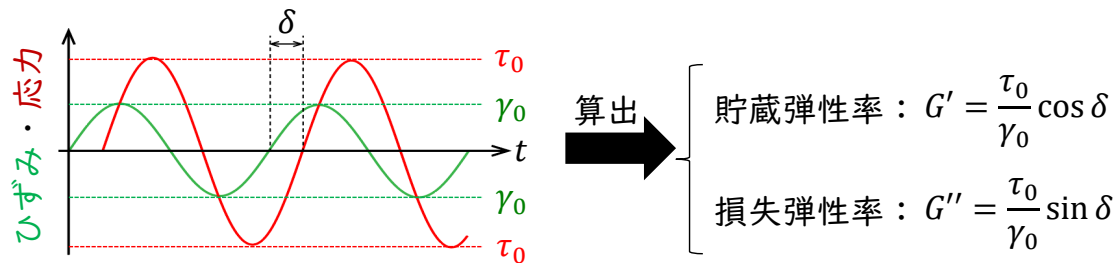
- 純弾性 $\delta = 0$ 応力・ひずみが同位相であり、遅れが一切生じない
- 純粘性 $\delta = \frac{\pi}{2}$ 両者が直交しており、完全に散逸
- 粘弾性 $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$ 両者に位相差があり、弾性と粘性が混在



動的粘弾性試験

一般化Maxwellモデルを構成する複数の弾性率と緩和時間を同定するための一方法

■ 物体に動的ひずみ： $\gamma = \gamma_0 \exp(i\omega t)$ を与えたときの動的応答を計測



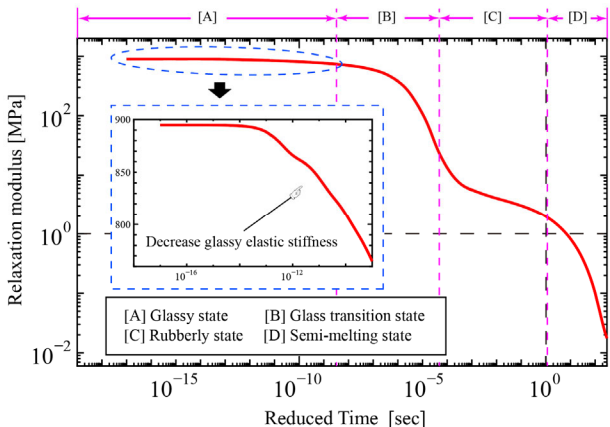
レオメータ

しかし

高分子材料の粘弾性特性は広範囲の時間スケールで観察するときに明確となる
(例えば常温の樹脂の時間スケールは 10^{-8} [sec]以下)



角速度を変化させるだけの試験では明らかに限界が生じる



時間-温度重ね合わせの原理

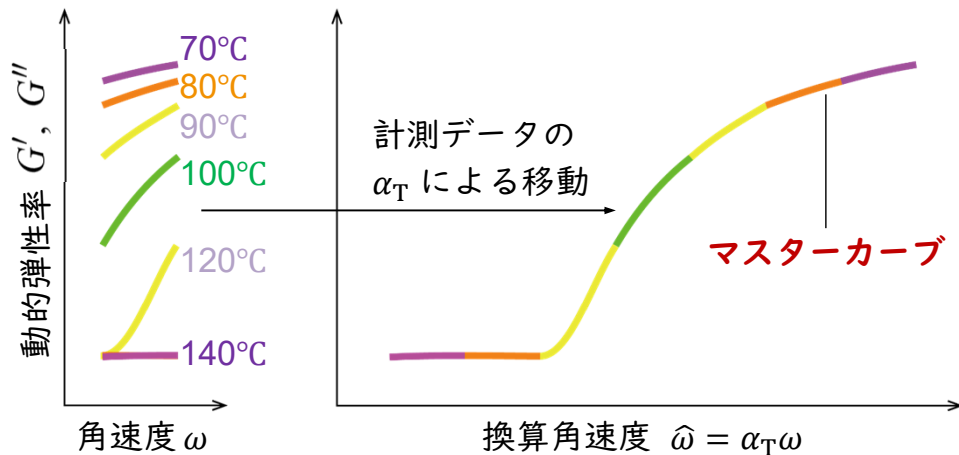
温度依存の緩和時間が参照温度： T_R での緩和時間： τ_R^α （参照緩和時間）と次の関係が成り立つと仮定

$$\tau^\alpha(T) = \alpha_T(T, T_R) \tau_R^\alpha \quad \text{シフトファクター: } \alpha_T(T, T_R)$$

このとき、一般化Maxwellモデルの貯蔵弾性率と損失弾性率は参照温度の緩和時間を用いて次のように表せる

$$G' = G_\infty + \sum_{\alpha=1}^N \frac{\tau_\alpha^2 \omega^2}{1 + \tau_\alpha^2 \omega^2} G_\alpha = G_\infty + \sum_{\alpha=1}^N \frac{(\tau_R^\alpha)^2 \hat{\omega}^2}{1 + (\tau_R^\alpha)^2 \hat{\omega}^2} G_\alpha, \quad G'' = \sum_{\alpha=1}^N \frac{\tau_\alpha \omega}{1 + \tau_\alpha^2 \omega^2} G_\alpha = \sum_{\alpha=1}^N \frac{\tau_R^\alpha \hat{\omega}}{1 + (\tau_R^\alpha)^2 \hat{\omega}^2} G_\alpha$$

換算角速度： $\hat{\omega} = \alpha_T \omega$



- 異なる温度ごとに計測された動的弾性率をシフトファクター α_T を用いて変換してマスターカーブを作成
- シフトファクターによる変換でマスターカーブを描画できる材料を熱レオロジー的に単純と呼ぶ
- 剛性の温度依存性を考慮した縦シフトファクターによる変換が必要な場合もある

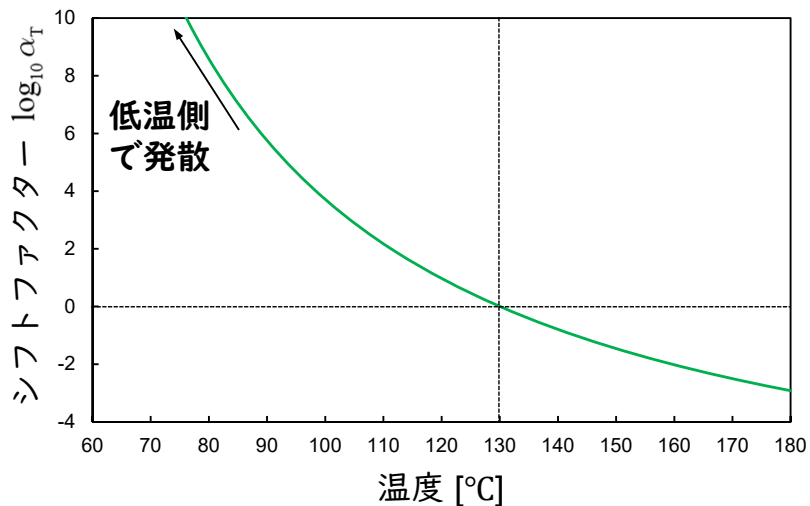
代表的な温度・時間換算則

● Williams-Landel-Ferry (WLF)式

$$\log_{10} \alpha_T = \frac{-C_1(T - T_R)}{C_2 + (T - T_R)}$$

材料パラメータ： C_1, C_2

軟質なゴム性の材料などに適合



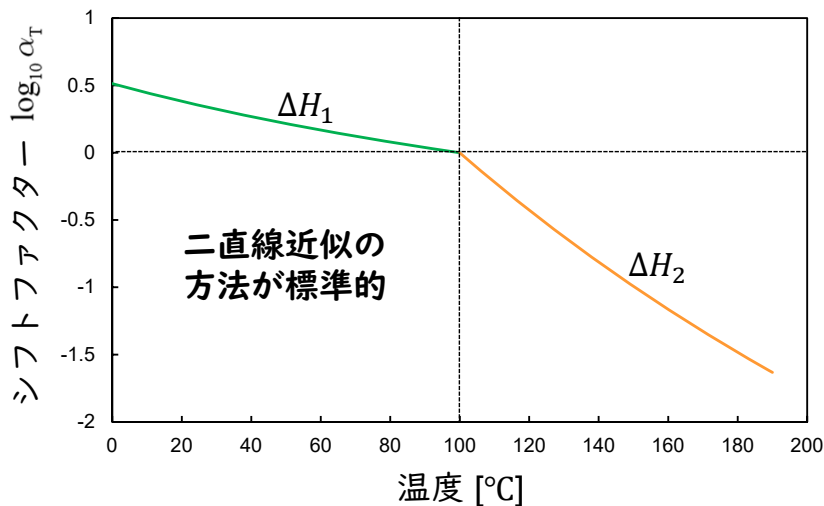
● Arrhenius式

$$\log_{10} \alpha_T = \frac{\Delta H}{2.303R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_R} \right)$$

活性化エネルギー： ΔH

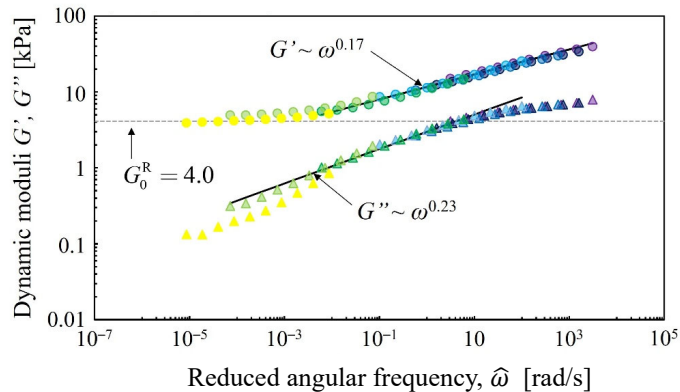
気体定数： $R = 8.31$

硬質なガラス性の材料（熱可塑性樹脂）などに適合

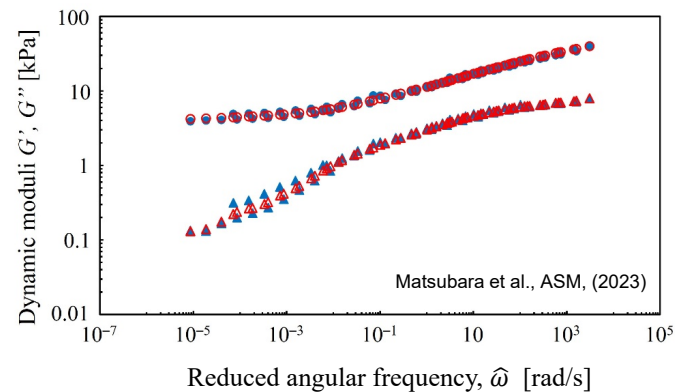


参照緩和時間とせん断弾性係数の同定

■ 動的弾性率のマスターカーブ



■ マスターカーブのフィッティング



■ 一般化Maxwellモデルの動的弾性率： $G'_{\text{model}}(\hat{\omega}) = G_{\infty} + \sum_{\alpha=1}^N \frac{(\tau_R^{\alpha})^2 \hat{\omega}^2}{1 + (\tau_R^{\alpha})^2 \hat{\omega}^2} G_{\alpha}$, $G''_{\text{model}}(\hat{\omega}) = \sum_{\alpha=1}^N \frac{\tau_R^{\alpha} \hat{\omega}}{1 + (\tau_R^{\alpha})^2 \hat{\omega}^2} G_{\alpha}$

■ $G_{\infty}, G_{\alpha}, \tau_R^{\alpha}$ を決めるためのカーブフィット：
$$\min_{G_{\infty}, G_{\alpha}, \tau_R^{\alpha}} \left[\sum_{i=1}^M \left\{ \frac{\|G'(\hat{\omega}_i) - G'_{\text{model}}(\hat{\omega}_i)\|^2}{\|G'(\hat{\omega}_i)\|^2} + \frac{\|G''(\hat{\omega}_i) - G''_{\text{model}}(\hat{\omega}_i)\|^2}{\|G''(\hat{\omega}_i)\|^2} \right\} \right]$$

計測点の換算角速度： $\hat{\omega}_i$

➡ パラメータの同定は、Excelのソルバー機能やその他のメタヒューリスティックな方法の利用が考えられる

弾粘性モデル (復習)

■ 3次元等方von-Mises型弾粘性モデル

- ひずみの加算分解 $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon^{\text{vol}} \mathbf{1} + \mathbf{e}^e + \mathbf{e}^v$ 体積ひずみ : $\varepsilon^{\text{vol}} = \frac{\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})}{3}$

- 弾性構成則 $\boldsymbol{\sigma} = 3K\varepsilon^{\text{vol}} \mathbf{1} + \mathbf{s}^e$ 偏差弾性応力 : $\mathbf{s}^e = 2G\mathbf{e}^e$

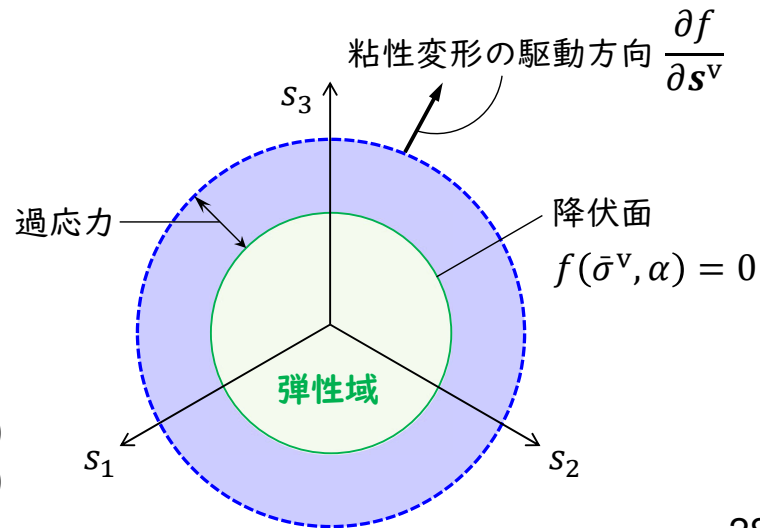
- 降伏関数 $f(\bar{\sigma}^v, \alpha) = \bar{\sigma}^v - q - \sigma_{Y0}$ 相当応力 : $\bar{\sigma}^v = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s}^v : \mathbf{s}^v}$ 初期降伏応力 : σ_{Y0}

- ・ 等方硬化力 $q = q(\alpha)$ 硬化変数 : α

- ・ 粘性駆動力 (偏差粘性応力) $\mathbf{s}^v = \mathbf{s}^e$

- 粘性ひずみの流れ則 $\dot{\mathbf{e}}^v = \dot{\gamma}^v \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}^v} = \dot{\gamma}^v \frac{3}{2} \frac{\mathbf{s}^v}{\bar{\sigma}^v}$

- 粘性ひずみの発展則 $\dot{\gamma}^v = \begin{cases} g(\bar{\sigma}^v, \alpha) \geq 0 & \text{if } f(\bar{\sigma}^v, \alpha) \geq 0 \\ 0 & \text{if } f(\bar{\sigma}^v, \alpha) \leq 0 \end{cases}$



Maxwellモデルの弾粘性モデル的な見方

■ 3次元等方von-Mises型弾粘性モデル

- ひずみの加算分解 $\varepsilon = \varepsilon^{\text{vol}} \mathbf{1} + \mathbf{e}^e + \mathbf{e}^v$

- 弾性構成則 $\sigma = 3K\varepsilon^{\text{vol}} \mathbf{1} + \mathbf{s}^e$, $\mathbf{s}^e = 2G\mathbf{e}^e$

- 粘性駆動力（偏差粘性応力） $\mathbf{s}^v = \mathbf{s}^e$

- 降伏関数 $f(\bar{\sigma}^v) = \bar{\sigma}^v = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s}^v : \mathbf{s}^v}$ 等方硬化力と初期降伏応力をゼロにする： $q = 0, \sigma_Y = 0$

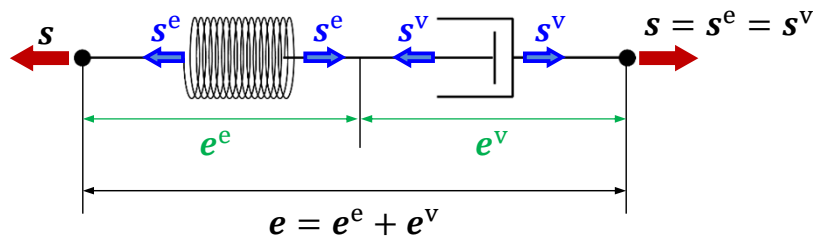
- 粘性ひずみの流れ則 $\dot{\mathbf{e}}^v = \dot{\gamma}^v \frac{3 \mathbf{s}^v}{2 \bar{\sigma}^v} \quad \because \bar{\sigma}^v > 0$

➤ 発展則を流れ則に代入 $\dot{\mathbf{e}}^v = \frac{3 \mathbf{s}^v}{2 \bar{\sigma}^v} \times \frac{2 \bar{\sigma}^v}{3 \eta} = \frac{\mathbf{s}^v}{\eta}$

- 粘性ひずみの発展則 $\dot{\gamma}^v = g(\bar{\sigma}^v) = \frac{2 f(\bar{\sigma}^v)}{3 \eta} = \frac{2 \bar{\sigma}^v}{3 \eta}$

if $f(\bar{\sigma}^v) \geq 0$ 粘性係数： η

$$\therefore \mathbf{s}^v = \eta \dot{\mathbf{e}}^v$$



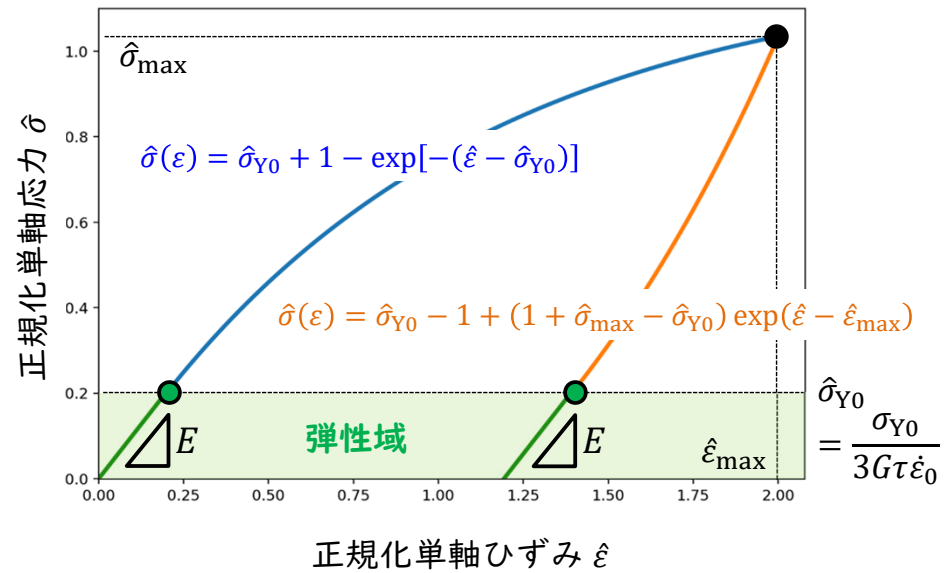
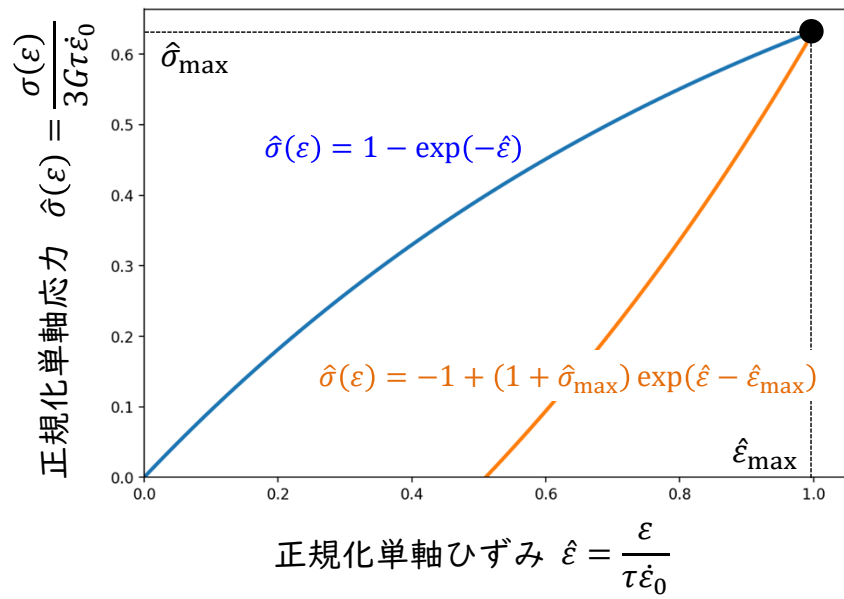
降伏応力の考慮：単軸引張・除荷応答

仮定：非圧縮性（ポアソン比=0.5）材料の単軸変形

降伏関数 $f(\bar{\sigma}^v) = \bar{\sigma}^v$

$f(\bar{\sigma}^v) = \bar{\sigma}^v - \sigma_{Y0}$

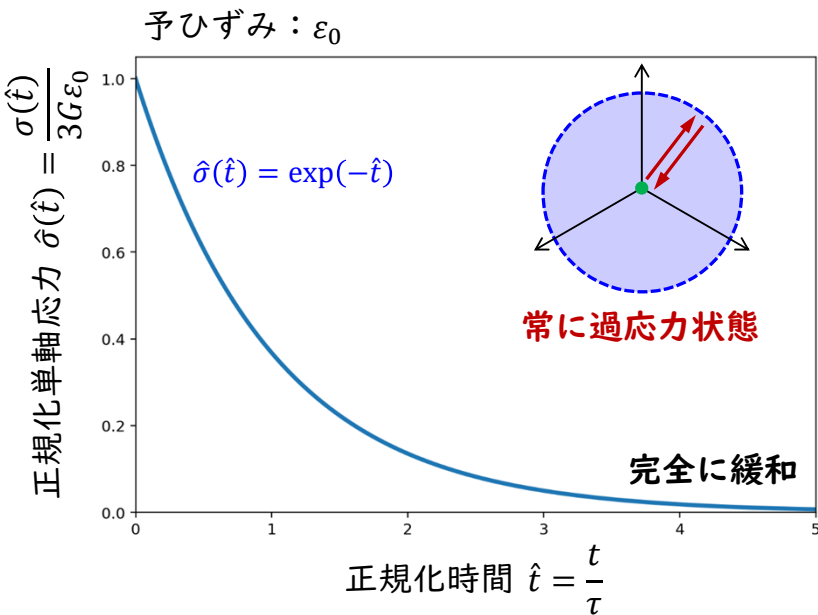
定速ひずみ速度： $\dot{\varepsilon}_0$



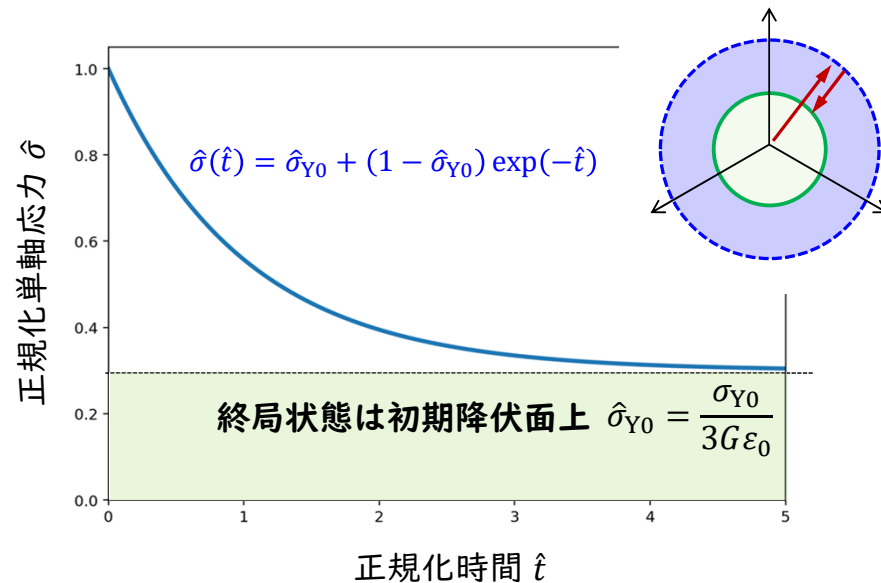
降伏応力の考慮：応力緩和応答

仮定：非圧縮性（ポアソン比=0.5）材料の単軸変形

降伏関数 $f(\bar{\sigma}^v) = \bar{\sigma}^v$



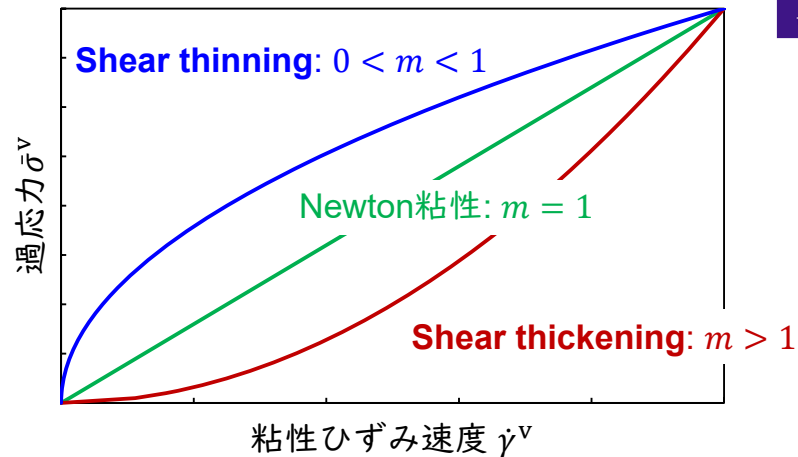
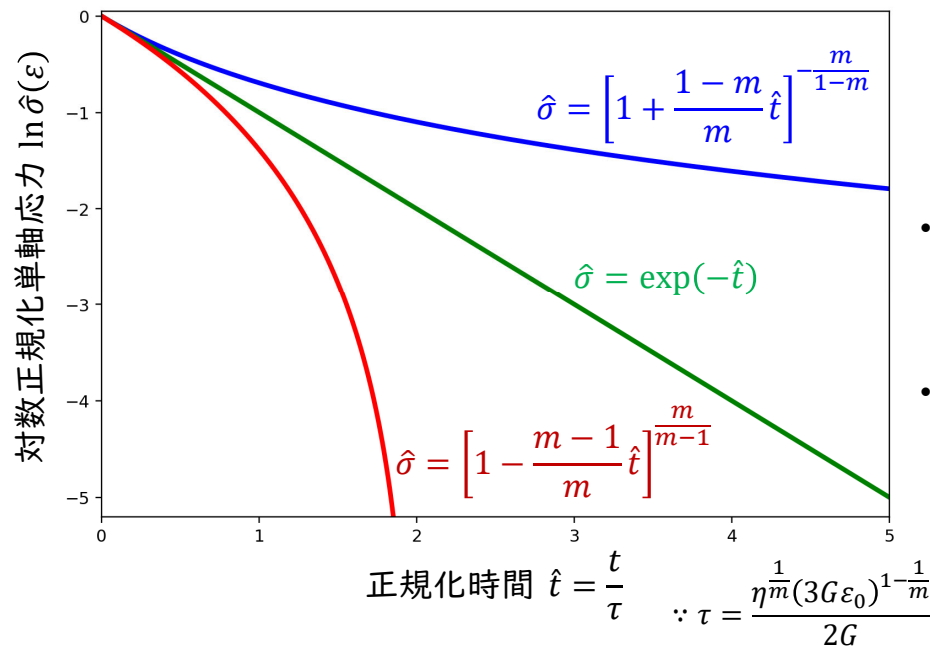
降伏関数 $f(\bar{\sigma}^v) = \bar{\sigma}^v - \sigma_{Y0}$



非線形粘性則：応力緩和と応答

仮定：非圧縮性（ポアソン比=0.5）材料の単軸変形

$$\text{非線形粘性則} \quad \dot{\gamma}^v = \frac{2}{3} \left(\frac{\bar{\sigma}^v}{\eta} \right)^{\frac{1}{m}} \Leftrightarrow \bar{\sigma}^v = \eta \left(\frac{3}{2} \dot{\gamma}^v \right)^m$$



- **Shear thinning** ($0 < m < 1$) :
相対緩和速度が時間とともに低下することで、
応力が長く残る長時間緩和を示す
- **Shear thickening** ($m > 1$) :
相対緩和速度が時間とともに増大し、最終的には
有限時間で応力がゼロに到達する急速な緩和を示す

まとめ

- **材料構成則**

材料の組織・結合状態が異なるため普遍的な単一モデルはなく、構成則は目的と負荷・環境条件に応じて選択する。
- **時間スケール依存**

粘弾性応答は観測時間と緩和時間の比で決まり、高速・低温では弾性的、低速・高温では粘性的な挙動が優勢となる。
- **基本モデルの限界**

Voigtモデルは遅延変形と回復を、Maxwellモデルは応力緩和を表すが、単一要素では全ての履歴応答を表現できない。
- **一般化Maxwell**

平衡バネと複数のMaxwell要素を並列化し、長期剛性と多様な緩和時間を同時に表現することで、複雑な粘弾性応答を再現する。
- **動的粘弾性**

貯蔵弾性率、損失弾性率、損失正接は、エネルギーの貯蔵・散逸と周波数依存性を定量化する。
- **温度換算と同定**

時間—温度重ね合わせとWLF/Arrhenius式でマスターカーブを構築し、各弾性率と参照緩和時間を同定する。
- **塑性論との接続**

Maxwellモデルは降伏応力と硬化力をゼロとした弾粘性モデルとして導出でき、両者は内部変数と発展則の枠組みで接続する。
- **非線形化の効果**

降伏応力は残留ひずみと不完全緩和を生み、非線形粘性指数は長時間緩和か有限時間緩和かを決定する。