

NEDO特別講座：

先端複合材料の製造における高度デジタル人材育成に関する特別講座（第2回）

非線形有限要素法：超弾性・弾塑性・弾粘塑性 構成則の理論的基礎と数値解析への導入

山川 優樹 (Yuki Yamakawa)

東北大学 大学院工学研究科 土木工学専攻

Department of Civil and Environmental Engineering, Tohoku University

E-mail: yuki.yamakawa.c7@tohoku.ac.jp

第1回～第4回：固体材料の構成則理論 + 非線形有限要素法

- 第1回 (2026/6/25)：全体像の理解とFRPそり解析への応用

担当：寺田 賢二郎 先生（東北大学）

- 第2回 (2026/7/23)：超弾性・弾塑性・弾粘塑性構成則の理論的基礎と数値解析への導入

担当：山川 優樹（東北大学）

概要：超弾性，弾塑性，弾粘塑性などの各種材料構成則を理解するために必要な理論的基礎を解説するとともに，代表的な構成モデルについてそれぞれの特徴や適用性を比較しながら紹介する．成形解析への適用を念頭に，異方性を含む構成モデルの数値解析への導入についても解説する．

- 第3回 (2026/9/24)：負荷速度・温度依存の力学挙動を表現する粘弾性構成則の基礎

担当：松原 成志朗 先生（東北大学）

- 第4回 (2026/10/22)：有限変形理論の枠組みと超弾性体の基礎

担当：渡邊 浩志 先生（株式会社テクスパイア）

講義スライド中の図の一部（図番号が付いているもの）は下記の参考書籍から引用しております。
寺田賢二郎 監訳：非線形有限要素法—弾塑性解析の理論と実践，森北出版，2012. [ISBN: 978-4627920217]

Some of the figures in this lecture slides (those with figure numbers) are quoted from the following reference book:
E. A. de Souza Neto, D. Perić, D. R. J. Owen (2008)
Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications, Wiley, [ISBN: 978-0470694527]
(Japanese translation) K. Terada, ed. (2012) Morikita Publishing, [ISBN: 978-4627920217]

● 固体材料・構造の非線形有限要素法

— 前回の復習：力学問題の全体像を俯瞰

● 弾塑性構成則

— 応力～ひずみ挙動の現象論的観察

— 1次元モデルの定式化から出発

— 3次元モデルへの一般化

— 各種の塑性モデル：どこが共通？ どこが異なる？

● 弾粘塑性構成則

— ひずみ速度依存性，クリープ，リラクゼーションの表現

● 非線形有限要素法への導入

— 材料構成則の役割と位置づけ

● 固体材料・構造の非線形有限要素法

— 前回の復習：力学問題の全体像を俯瞰

● 弾塑性構成則

— 応力～ひずみ挙動の現象論的観察

— 1次元モデルの定式化から出発

— 3次元モデルへの一般化

— 各種の塑性モデル：どこが共通？ どこが異なる？

● 弾粘塑性構成則

— ひずみ速度依存性，クリープ，リラクゼーションの表現

● 非線形有限要素法への導入

— 材料構成則の役割と位置づけ

講義スライド中の図の一部（図番号が付いているもの）は下記の参考書籍から引用しております。
寺田賢二郎 監訳：非線形有限要素法—弾塑性解析の理論と実践，森北出版，2012. [ISBN: 978-4627920217]

Some of the figures in this lecture slides (those with figure numbers) are quoted from the following reference book:
E. A. de Souza Neto, D. Perić, D. R. J. Owen (2008)
Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications, Wiley, [ISBN: 978-0470694527]
(Japanese translation) K. Terada, ed. (2012) Morikita Publishing, [ISBN: 978-4627920217]

力学問題の全体構造

土木工学で対象とする構造物



よどみばし

澱橋（仙台市青葉区，広瀬川，1961年）

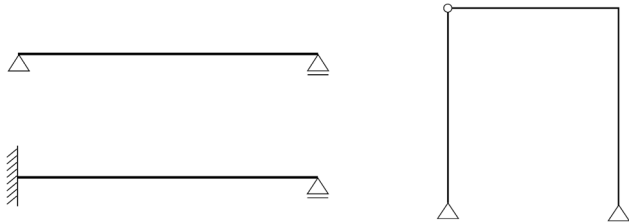
写真出典：https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Yodomi_Bashi_2009b_cropped.jpg



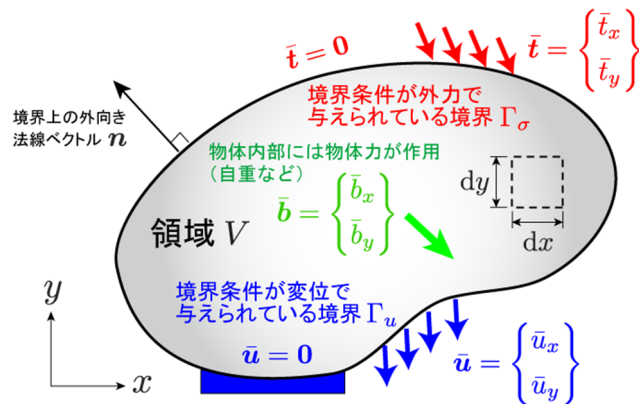
多径間連続RCラーメン橋

構造力学でのモデル化

実際の構造物は複雑な形状をもつので解析が難しい。
そこで，簡易な解析で力学挙動の要点を把握できるように，
単純な形状にモデル化している。



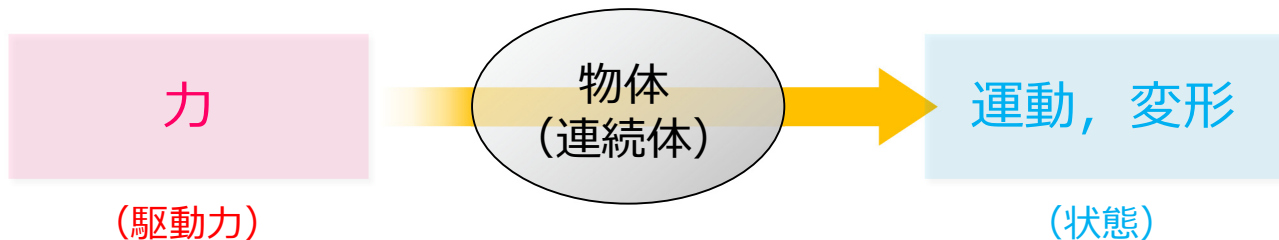
任意形状の
構造物を
解析したい



- 領域 V を占める任意形状の物体を考える。
- 物体を構成する材料は均一とは限らない。
位置によって異なる材料が分布していることもある。
- 境界 Γ に変位 $\bar{u}$ または力 $\bar{t}$ に関する境界条件が与えられている。また，物体内部に“物体力 $\bar{b}$ ”（重力，慣性力，電磁場による力など）が作用している。

このときの
物体内部の変形と応力の状態を求めたい。

力学問題の全体構造



物体の“状態”に
変化をもたらす“駆動力”

“駆動力”によって
物体の“状態”に変化が生じる

力学の現象

この因果関係を理解し、客観的に記述する“方法”と、
記述に用いるための“量”が必要.



力学問題の全体構造

固体・構造の力学解析に必要な基本事項

- ① 動的問題では **運動方程式**，準静的問題では **力のつり合い式** ☞ 微分方程式で表される力学問題の支配方程式
- ② 変位とひずみ（変形）の関係
- ③ 材料の力学特性を表す構成則：ひずみと応力（力）の関係
- ④ 運動と力に関する境界条件

① ～ ④ によって固体・構造の力学問題が定められる。

境界条件 ④ のもとで微分方程式 ① を解く問題。

これを **微分方程式の境界値問題** (Boundary-value problem; BVP) という。

力学問題の全体構造

④ -a 幾何学的境界条件

$$u = \bar{u} \text{ on } \partial_u v$$

① 力のつり合い式

$$\operatorname{div} \sigma + \rho \bar{b} = 0$$

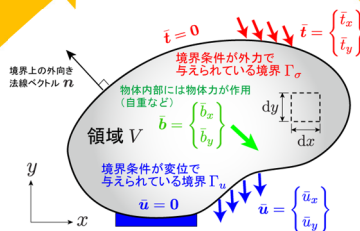
④ -b 力学的境界条件

$$\sigma n = \bar{t} \text{ on } \partial_t v$$

変位 u

② 変位-ひずみ関係(注)

$$\varepsilon = \operatorname{sym}(\nabla_x u)$$



応力 σ

ひずみ ε

③ 応力-ひずみ関係(注) (材料の構成則)

$$\sigma = \mathcal{F}(\varepsilon)$$

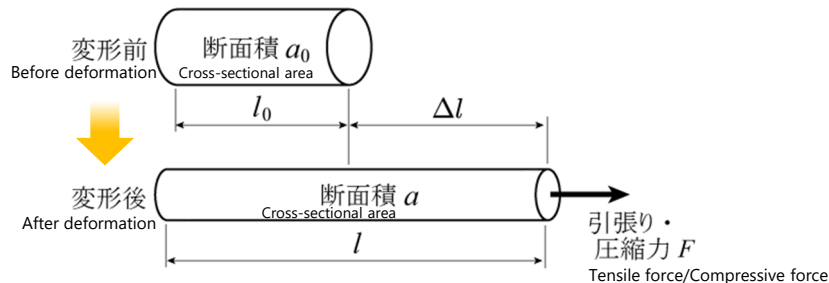
注：解析対象とする材料によって構成則に用いられる応力テンソルやひずみテンソルの種類は異なる。それらに応じて②や③の具体形は異なる。ここでは微小変形理論における典型的な②と③として、微小ひずみテンソルを用いた形式を示した。

導入：構成則とは？

Introduction: What is constitutive law?

● 1次元的な材料の変形を考える：引張り・圧縮

Consider one-dimensional deformation of a material: Extension and Compression



● ひずみ : $\varepsilon := \frac{\Delta l}{l_0} \approx \frac{\Delta l}{l}$
Strain

● 応力 : $\sigma := \frac{F}{a} \approx \frac{F}{a_0}$
Stress

このふたつを関係づける式 :
Relationship that relates these two quantities:

材料の構成則 $\sigma = \mathcal{F}(\varepsilon)$
Constitutive law of the material

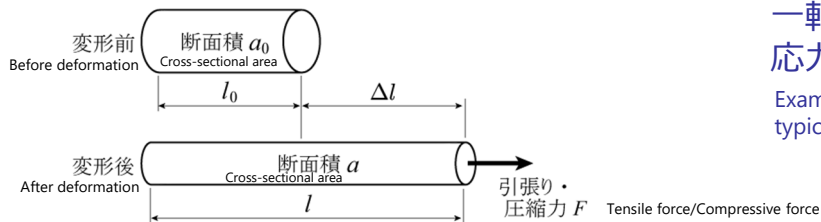
材料の力学的性質（応力～ひずみ関係）をモデル化した数式
Mathematical model of the mechanical properties of a material, i.e., stress vs strain relationship

ここでは“微小変形”を仮定
We assume “infinitesimal deformations.”

$\Delta l \ll l_0$ ($l \approx l_0$); $a \approx a_0$

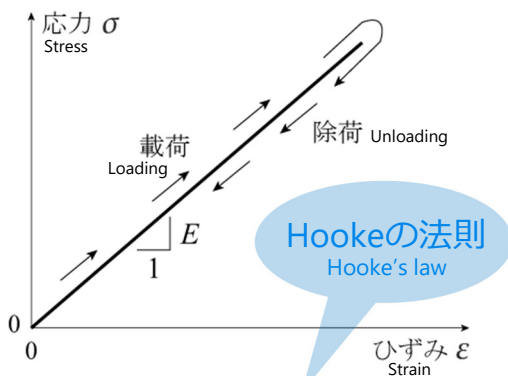
材料の力学挙動：弾性

Mechanical behavior of materials: Elasticity

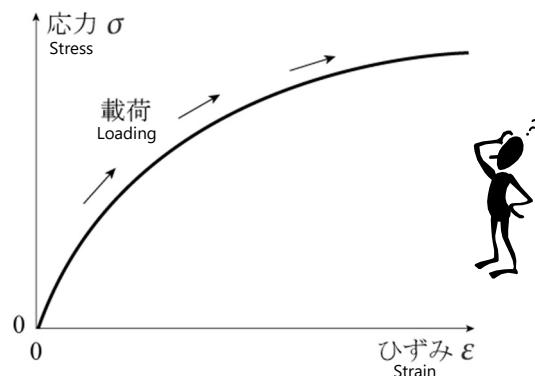


一軸引張試験でみられる
応力～ひずみ関係の例

Examples of stress-strain relationship
typically observed in uniaxial tension test



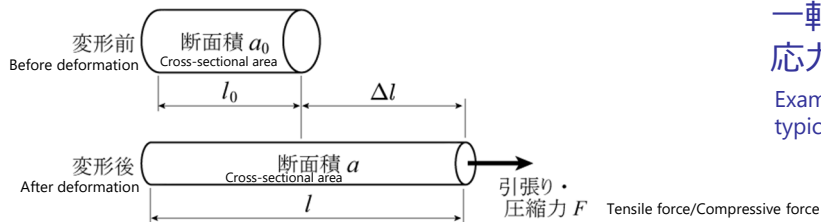
線形弾性 $\sigma = E\varepsilon$
Linear elasticity



これは？
What is this?

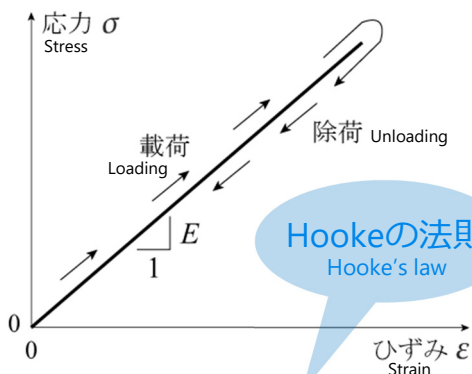
材料の力学挙動：線形弾性，非線形弾性

Mechanical behavior of materials: Linear elasticity, Nonlinear elasticity

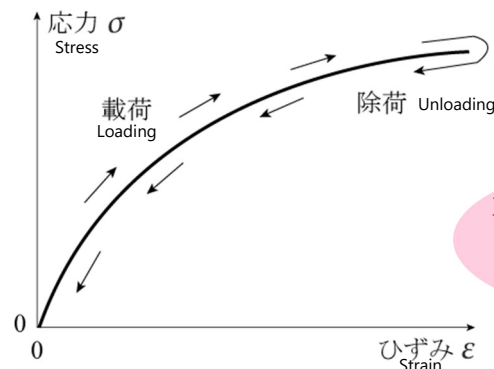


一軸引張試験でみられる
応力～ひずみ関係の例

Examples of stress-strain relationship
typically observed in uniaxial tension test



線形弾性 $\sigma = E\varepsilon$
Linear elasticity



正解：
「除荷してみないと分からない」
Answer: It is impossible to know
without unloading.

除荷した後に変形がもとに戻るならば
If the material recovers its original shape,

非線形弾性 $\sigma = \mathcal{F}(\varepsilon)$
Nonlinear elasticity

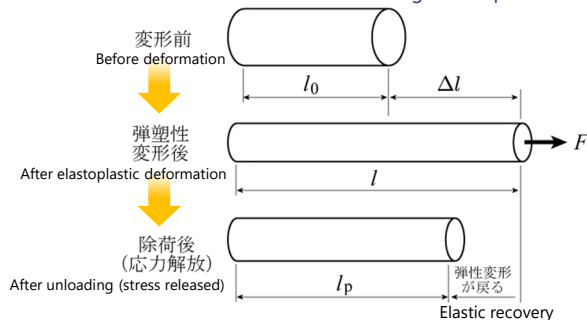
応力がひずみの非線形関数で与えられる。
Stress is given by a nonlinear function of strain.

材料の力学挙動：弾塑性

Mechanical behavior of materials: Elastoplasticity

除荷した後に変形がもとに戻らない場合は？

What if the material does not recover its original shape after unloading?



弾塑性
Elastoplasticity

$$\Delta\sigma = E^{\text{ep}} \Delta\varepsilon$$

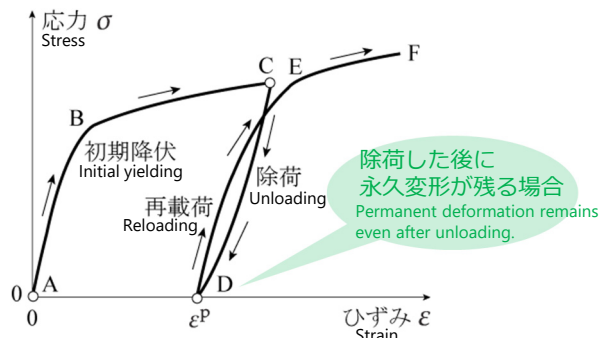
(右図はバイリニア型の弾塑性モデル)

(The figure on the right shows a typical behavior of the bilinear elastoplastic model.)

$$E^{\text{ep}} = \begin{cases} E & \text{Elastic response} \\ \frac{EH}{E+H} & \text{Plastic response} \end{cases}$$

重要：弾塑性構成式は、応力～ひずみ関係ではなく、
応力増分～ひずみ増分関係で表される。

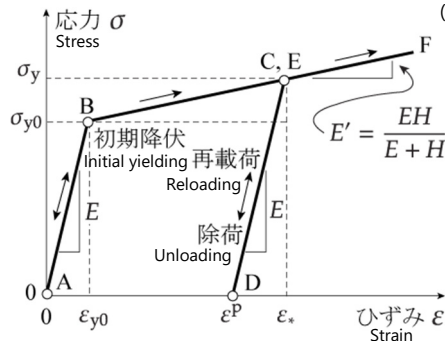
Remark: The elastoplastic model is expressed as a stress increment vs strain increment relationship, rather than a stress vs strain relationship.



実際の挙動を単純化して、
ここでは2直線でモデル化する。
(バイリニア・モデルという。)

Simplify the actual behavior and
model it with two straight lines.

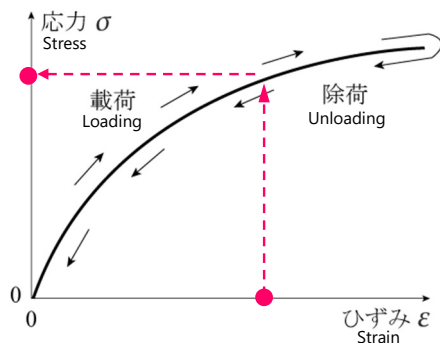
(It is called "bilinear model.")



詳しい導出は
後述。

材料の構成則：“弾性”と“弾塑性”の違い

Constitutive laws of materials: Difference between “Elasticity” and “Elastoplasticity”



弾性 $\sigma = \mathcal{F}(\varepsilon)$
Elasticity

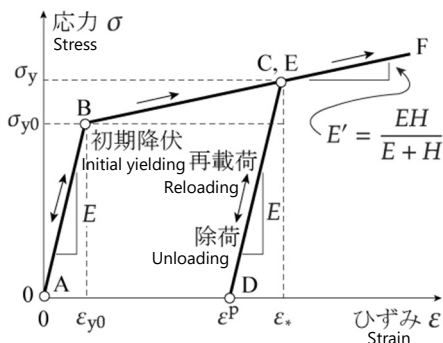
応力がひずみの線形／非線形関数で与えられる。
Stress is given by a linear/nonlinear function of strain.

関数の形はどうであれ、
応力とひずみは一对一に関係づけられる。

Regardless of the function form, stress and strain are related one-to-one.

つまり、与えられたひずみに対して応力が一意的に決まる。
逆もしかり。

In other words, stress is uniquely determined for a given strain, and vice versa.



弾塑性 $\Delta\sigma = E^{\text{ep}} \Delta\varepsilon$
Elastoplasticity

応力とひずみに一对一の対応関係が無い。
関係づけることが出来るのは、両者の増分だけ。

There is no one-to-one correspondence between stress and strain.
Only their increments can be correlated.

なぜか？ Why?

弾塑性材料の応答は現在の状態だけでは決まらず、
現在までに経験した“変形の履歴”によって応答が変化するため。

The response of elastoplastic materials is not determined by the current state alone, but also changes depending on the “history of deformation” experienced up to the present.

Cylindrical cup drawing of a sheet metal

Tim Brepols, Ivaylo N. Vladimirov, Stefanie Reese (2014) Numerical comparison of isotropic hypo- and hyperelastic-based plasticity models with application to industrial forming processes. International Journal of Plasticity, Vol. 63, pp. 18-48.

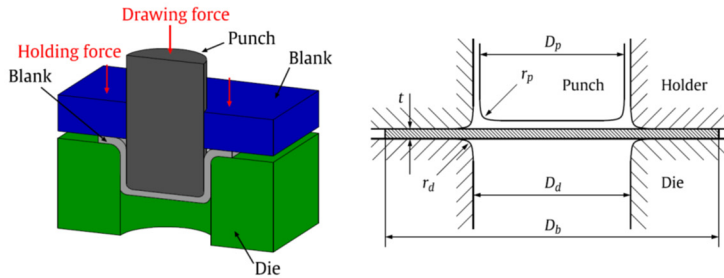
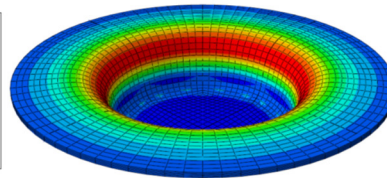
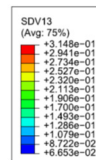
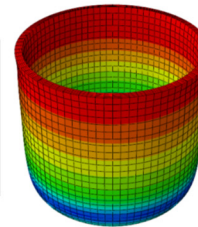
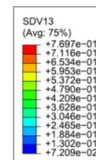


Fig. 20. Schematic view of cylindrical cup drawing process.



(a) During forming phase



(b) End of forming phase

Fig. 22. Cup drawing simulation: accumulated plastic strain in blank.

Cylindrical cup drawing

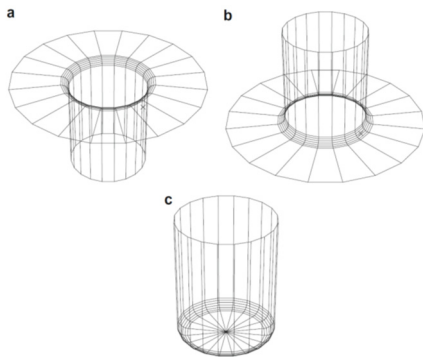


Fig. 4. Tools in the cylindrical cup drawing process: (a) die, (b) holder, and (c) punch.

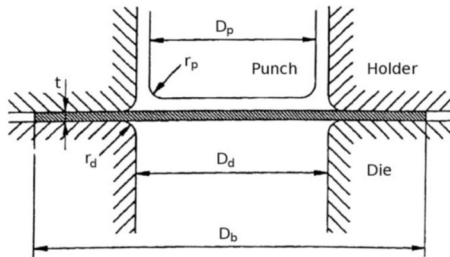


Fig. 5. Schematic view of the cup drawing process, from Yoon et al. (2004).

Ivaylo N. Vladimirov, Michael P. Pietryga, Stefanie Reese (2010)
Anisotropic finite elastoplasticity with nonlinear kinematic and isotropic hardening and application to sheet metal forming. International Journal of Plasticity, Vol. 26, pp. 659-687.

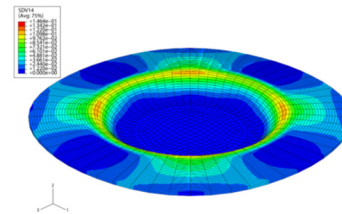


Fig. 6. Deep drawing, accumulated plastic strain at punch displacement $u = 7.5$ mm.

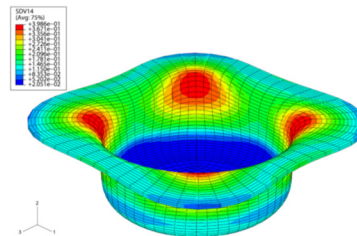


Fig. 7. Deep drawing, accumulated plastic strain at punch displacement $u = 22$ mm.

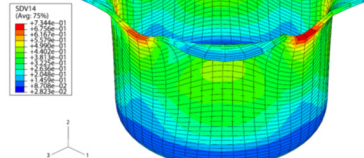


Fig. 8. Deep drawing, accumulated plastic strain at punch displacement $u = 36$ mm.

Draw bending of a sheet metal strip

Tim Brepols, Ivaylo N. Vladimirov, Stefanie Reese (2014) Numerical comparison of isotropic hypo- and hyperelastic-based plasticity models with application to industrial forming processes. International Journal of Plasticity, Vol. 63, pp. 18-48.

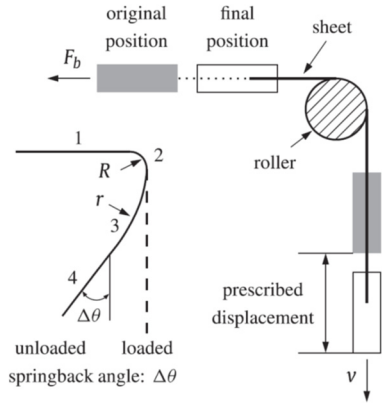
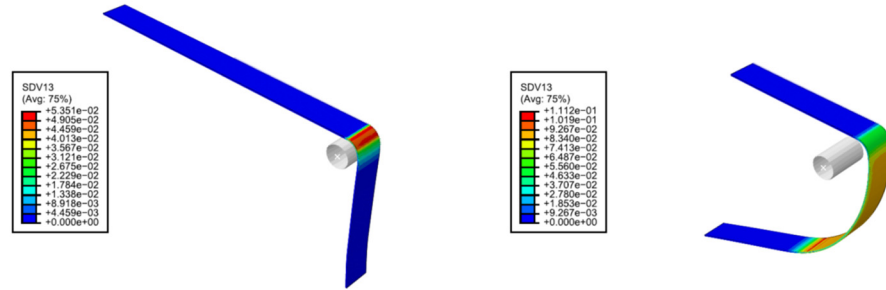


Fig. 23. Schematic view of 90° draw bending process (idea from Li et al., 2002).



(a) During drawing phase

(b) After drawing phase and end of spring-back

Fig. 24. Draw bending simulation: accumulated plastic strain in sheet metal strip.

講義スライド中の図の一部（図番号が付いているもの）は下記の参考書籍から引用しております。
寺田賢二郎 監訳：非線形有限要素法—弾塑性解析の理論と実践，森北出版，2012. [ISBN: 978-4627920217]

Some of the figures in this lecture slides (those with figure numbers) are quoted from the following reference book:
E. A. de Souza Neto, D. Perić, D. R. J. Owen (2008)
Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications, Wiley, [ISBN: 978-0470694527]
(Japanese translation) K. Terada, ed. (2012) Morikita Publishing, [ISBN: 978-4627920217]

● 固体材料・構造の非線形有限要素法

— 前回の復習：力学問題の全体像を俯瞰

● 弾塑性構成則

— 応力～ひずみ挙動の現象論的観察

— 1次元モデルの定式化から出発

— 3次元モデルへの一般化

— 各種の塑性モデル：どこが共通？ どこが異なる？

● 弾粘塑性構成則

— ひずみ速度依存性，クリープ，リラクゼーションの表現

● 非線形有限要素法への導入

— 材料構成則の役割と位置づけ

塑性論とは？

What is plasticity theory?

● 塑性論とは？ Plasticity theory?

荷重を受けた後に除荷されたとき、弾性体のように変形がもとに戻らずに、永久変形が残るような物体の力学挙動に関する理論。

A theory concerning the mechanical behavior of materials that, after being subjected to a load and then unloaded, do not return to their original shape like elastic materials, but instead retain permanent deformation.

● 塑性体とは？ Plastic material?

塑性論で力学挙動を適切に記述しうる材料のこと。

Materials that can be described appropriately in terms of their mechanical behavior using the plasticity theory.



金属、コンクリート、岩石・粘土・土などの多くの材料は、工学で取り扱う様々な環境下における力学挙動を塑性体としてモデル化できることが多い。

Many materials, such as metals, concrete, rocks, clay, and soil, can often be modeled as plastic materials in terms of their mechanical behavior under various conditions encountered in engineering.

● 速度依存性 (rate-dependent), 速度非依存性 (rate-independent)

ひずみ速度依存性： はやい変形／ゆっくりした変形での材料応答の違い

Strain-rate dependency

Difference in material responses in rapid and slow deformations

時間依存性： クリープ，リラクゼーションなど

Time dependency

Creep, relaxation, etc.

講義スライド中の図の一部（図番号が付いているもの）は下記の参考書籍から引用しております。
寺田賢二郎 監訳：非線形有限要素法—弾塑性解析の理論と実践，森北出版，2012. [ISBN: 978-4627920217]

Some of the figures in this lecture slides (those with figure numbers) are quoted from the following reference book:
E. A. de Souza Neto, D. Perić, D. R. J. Owen (2008)
Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications, Wiley, [ISBN: 978-0470694527]
(Japanese translation) K. Terada, ed. (2012) Morikita Publishing, [ISBN: 978-4627920217]

● 固体材料・構造の非線形有限要素法

— 前回の復習：力学問題の全体像を俯瞰

● 弾塑性構成則

— 応力～ひずみ挙動の現象論的観察

— 1次元モデルの定式化から出発

— 3次元モデルへの一般化

— 各種の塑性モデル：どこが共通？ どこが異なる？

● 弾粘塑性構成則

— ひずみ速度依存性，クリープ，リラクゼーションの表現

● 非線形有限要素法への導入

— 材料構成則の役割と位置づけ

一軸引張試験にみられる材料挙動の現象論的観察

Phenomenological observation of a material behavior in a uniaxial tension test

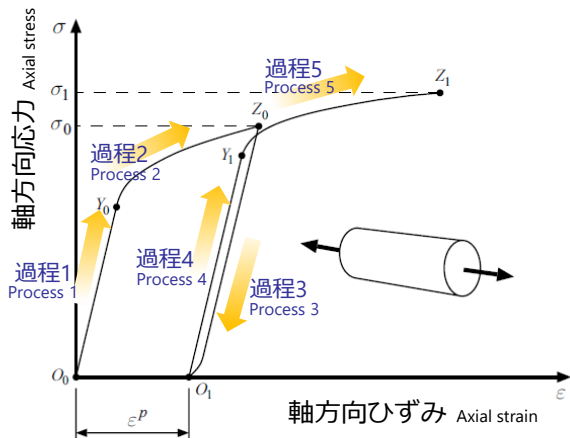


図 6.1 延性金属の1軸引張試験
Fig. 6.1 Uniaxial tension test for ductile metals.

● 過程4～5 : $O_1 \rightarrow Y_1 \rightarrow Z_1$ Process 4 to 5

$O_1 \sim Y_1$ 間の再載荷曲線は、除荷曲線 $Z_0 \sim O_1$ とほぼ同じ（実際には若干違いがある ☞ 損傷モデルで考慮 etc.）。

The reloading curve between $O_1 \sim Y_1$ is almost identical to the unloading curve between $Z_0 \sim O_1$. (In reality, there may be slight differences, which are considered in the *damage model*.)

$O_1 \sim Y_1$ 間で除荷すると、 O_1 に戻り、新たな塑性ひずみは生じない。

When unloaded within the range $O_1 \sim Y_1$, it returns to O_1 , without evolution of plastic strain.

Y_1 を超えると、曲線の傾きは再び小さくなり、新たな塑性ひずみが生じる。

When the stress exceeds Y_1 , the slope of the curve again decreases sharply at this point, and new plastic strain begins to evolve.

● 過程1 : $O_0 \rightarrow Y_0$ Process 1

応力-ひずみ曲線はほぼ直線。Almost linear stress-strain behavior.

$O_0 \sim Y_0$ 間で除荷すると、 O_0 に戻る。

If unloaded in $O_0 \sim Y_0$, the material returns to the original shape at O_0 .

☞ この間の挙動は弾性。直線的挙動なら“線形弾性”

The behavior within this range is **elastic**.

“Linear elasticity” if the response is linear.

● 過程2 : $Y_0 \rightarrow Z_0$ Process 2

Y_0 を超えると、応力-ひずみ曲線の傾きが Y_0 以前よりも急激に小さくなる。

When the stress exceeds Y_0 , the slope of the curve decreases more rapidly than before.

● 過程3 : $Z_0 \rightarrow O_1$ Process 3

Z_0 から無負荷状態まで除荷しても、 O_0 には戻らず、 O_1 に戻り、永久変形（塑性ひずみ ϵ^p ）が残る。

Even when unloaded from Z_0 to a stress-free state, it does not return to the origin O_0 , but returns to O_1 , leaving permanent deformation ϵ^p .

一軸引張試験にみられる材料挙動の現象論的観察

Phenomenological observation of a material behavior in a uniaxial tension test

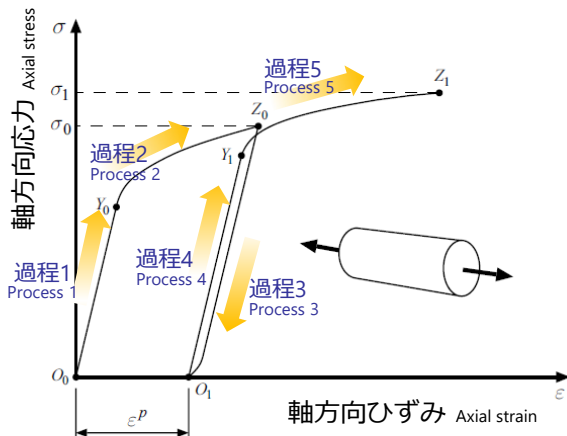


図 6.1 延性金属の 1 軸引張試験
Fig. 6.1 Uniaxial tension test for ductile metals.

材料によっては、塑性変形の増加に伴って降伏応力が低下することもある。これを **軟化（塑性軟化）** とよぶ。

Some materials exhibit a decrease in yield stress as plastic deformation increases. This is called **softening (plastic softening)**.

下図で観察される材料挙動の重要な特徴：

Important characteristics of material behavior observed in this figure:

● 弾性域と降伏応力 Elastic domain and Yield stress

材料が弾性的挙動を示すような応力の範囲があり、その領域内で変形を繰返しても塑性変形は生じない。

There is a range of stress in which the material exhibits elastic behavior, and no plastic deformation evolves even if deformation is cycled within that range.

$O_0 \sim Y_0$ と $O_1 \sim Y_1$ は異なる二つの弾性域で、それぞれに対応する **降伏応力** は Y_0 と Y_1 である。

$O_0 \sim Y_0$ and $O_1 \sim Y_1$ are two distinct elastic domains, and the corresponding **yield stresses** are Y_0 and Y_1 , respectively.

● 塑性降伏と塑性流れ Plastic yielding and Plastic flow

降伏応力を超えて負荷を受けると、**塑性降伏** あるいは **塑性流れ** が生じ、塑性ひずみが増加*する。

When a material is subjected to a load exceeding the yield stress, **plastic yielding** or **plastic flow** occurs, and plastic strain increases*.

*塑性論では、変形の進行に伴うこのような物理量の変化を「発展」(evolution) とよぶことがある。⇔ 例：発展則（物理量の増加・減少の仕方を定める法則）

In plasticity theory, changes in physical quantities accompanying deformation are sometimes referred to as "evolution." ⇔ Ex: Evolution law (a law that determines how a physical quantity changes)

● 塑性硬化 Plastic hardening

塑性変形の増加に伴って、降伏応力の上昇がみられる。これを **硬化（あるいは塑性硬化）** とよぶ。

The yield stress rises as plastic deformation increases. This is called **hardening (or plastic hardening)**.

塑性ひずみ ϵ^P の増加に伴って、降伏応力は点 Y_0 よりも点 Y_1 の方が大きくなっている。

As plastic strain ϵ^P increases, the yield stress at point Y_1 is greater than at point Y_0 .

現象論的観察に基づく数理モデル化

Mathematical modeling based on phenomenological observations

金属・コンクリート・岩石・土など、様々な材料に**共通して**観察される材料挙動の現象論的特徴：

Phenomenological characteristics of material behavior *commonly* observed in various materials such as metal, concrete, rock, and soil:

- 弾性域と降伏応力
Elastic domain and Yield stress
- 塑性降伏と塑性流れ
Plastic yielding and Plastic flow
- 塑性硬化
Plastic hardening

注意：こうした現象論的特徴を生じさせている微視的なメカニズムは材料によって全く異なるが、そこには立ち入らずに、巨視的な材料挙動（すなわち応力-ひずみ挙動）を再現するための数理モデルの構築に主眼を置く。

Note: The microscopic mechanisms that cause these phenomenological characteristics vary greatly depending on the material, but the constitutive theory does not address this issue, focusing instead on constructing mathematical models that reproduce macroscopic material behavior (i.e., stress-strain behavior).



塑性を含む構成則理論の目的：

The purpose of constitutive theory including plasticity:

上記のように現象論的に特徴づけられる材料の力学挙動を、十分な精度で表現できる **連続体構成モデル** を構築すること。

Constructing a constitutive model for a continuum body that can accurately represent the mechanical behavior of materials characterized phenomenologically as described above.

- 固体材料・構造の非線形有限要素法

- 前回の復習：力学問題の全体像を俯瞰

- 弾塑性構成則

- 応力～ひずみ挙動の現象論的観察

- 1次元モデルの定式化から出発

- 3次元モデルへの一般化

- 各種の塑性モデル：どこが共通？ どこが異なる？

- 弾粘塑性構成則

- ひずみ速度依存性，クリープ，リラクゼーションの表現

- 非線形有限要素法への導入

- 材料構成則の役割と位置づけ

1次元弾塑性構成則の定式化

Formulation of one-dimensional elastoplastic constitutive law

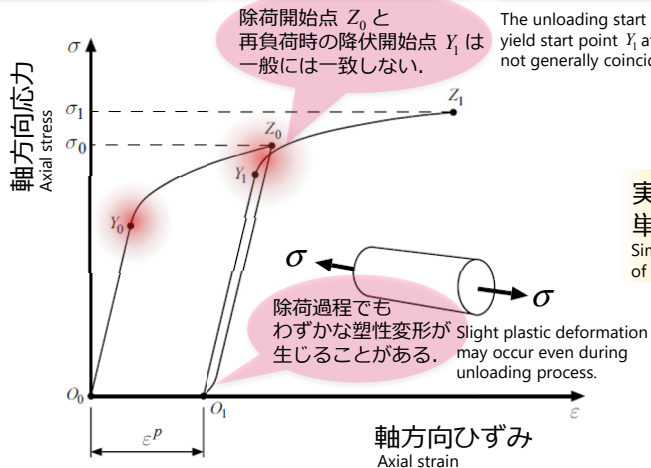


図 6.1 延性金属の 1 軸引張試験
Fig. 6.1 Uniaxial tension test for ductile metals.

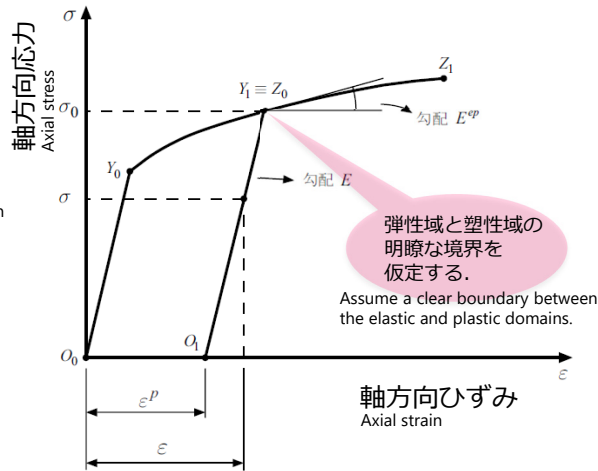


図 6.2 1 軸引張試験における数値モデル

● 単純化・理想化における仮定:

Assumptions in simplification and idealization:

除荷過程 $Z_0 \rightarrow O_1$ と再負荷過程 $O_1 \rightarrow Y_1$ との違いを無視し、除荷開始点 Z_0 と再負荷後の降伏開始点 Y_1 を同一とみなす。

Ignoring the difference between the unloading process $Z_0 \rightarrow O_1$ and the reloading process $O_1 \rightarrow Y_1$, the unloading start point Z_0 and the yield start point Y_1 after reloading are considered to be the same.

→ 弾性域と弾塑性域の明瞭な境界: Y_0, Y_1 A clear boundary between the elastic and plastic domains

→ 弾塑性モデルの定式化が容易に This facilitates the formulation of an elastoplastic model.

1次元弾塑性構成則の定式化

Formulation of one-dimensional elastoplastic constitutive law

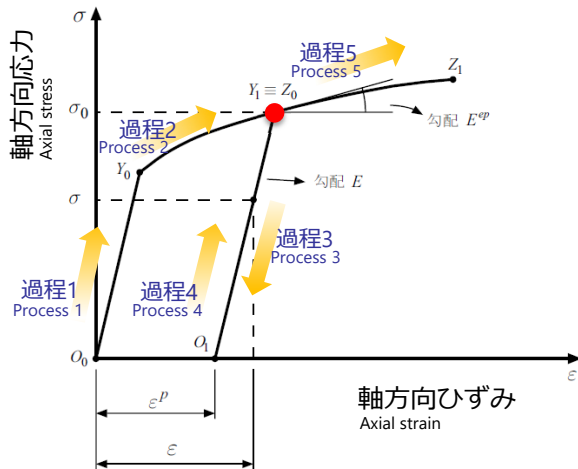


図 6.2 1 軸引張試験における数値モデル

実験挙動を単純化・理想化した応力-ひずみ曲線
Stress-strain curve obtained by simplification and idealization of experimental behavior

- $O_0 \leftrightarrow Y_0, O_1 \leftrightarrow Y_1$ は弾性域 are elastic domains

この間で除荷／再負荷すると、弾性的に同じ経路をたどる。

When unloaded or reloaded within these domains, the material follows the same path elastically.

弾性域から弾塑性域への遷移点： Y_0, Y_1

Transition point from elastic domain to elastoplastic domain:

- O_0 から負荷を単調に継続して与えると、 $O_0 \rightarrow Y_0 \rightarrow Y_1 \rightarrow Z_1$ の経路（処女曲線）をたどる。

When a monotonic load is applied from O_0 , the path $O_0 \rightarrow Y_0 \rightarrow Y_1 \rightarrow Z_1$ (virgin curve) is followed.

- $O_0 \rightarrow Y_0 \rightarrow Y_1$ 後の状態（図中 ●）から除荷して、 $O_1 \sim Y_1$ 間にある材料は、除荷・再負荷に対して弾性挙動を示す。

After unloading from the loaded state $O_0 \rightarrow Y_0 \rightarrow Y_1$ (point ● in the figure), the material exhibits elastic behavior in $O_1 \sim Y_1$ for unloading and reloading.

その過程で、塑性ひずみ ε^p と降伏応力 σ_0 は不変。

The plastic strain ε^p and the yield stress σ_0 remain unchanged during this process.

- $O_0 \sim Y_0$ 間、 $O_1 \sim Y_1$ 間の経路を表す式： $\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^p)$

The equation describing the paths in the elastic domains

$O_0 \sim Y_0$ and $O_1 \sim Y_1$:

Equation expressing reversible elastic behavior:
(Linear elasticity is assumed here.)

可逆的な弾性挙動を表す式：
(ここでは線形弾性を仮定)

ε^p が弾性応答の
基点になっている。
(図中の O_0, O_1)

ε^p is the origin of the elastic response.
(Points O_0, O_1 in the figure)

1次元弾塑性構成則の定式化

Formulation of one-dimensional elastoplastic constitutive law

● ひずみ ε の加算分解 ⇨ 弾性成分 + 塑性成分

Additive decomposition of strain ε into elastic part and plastic part

$$\varepsilon = \underbrace{\varepsilon^e}_{\text{弾性ひずみ (可逆)}} + \underbrace{\varepsilon^p}_{\text{塑性ひずみ (非可逆)}}$$

添字 e は弾性 (elastic),
添字 p は塑性 (plastic) の意味.

The superscripts "e" and "p" mean the
"elastic" and "plastic", respectively.

ひずみ ε が与えられたとき,
どのように弾性・塑性部分に
振り分けられるのか?

How is a given strain ε decomposed to elastic
and plastic parts?

塑性流れ則を時間積分して
 ε^p が求められる.

⇨ 時間積分アルゴリズム (後述)

Plastic strain ε^p is obtained by integrating the plastic flow rule over time.
⇨ Time-integration algorithm (explained later)

● 弾性構成則 Elasticity constitutive law

$$O_0 \sim Y_0 \text{ 間, } O_1 \sim Y_1 \text{ 間の経路を表す式: } \sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^p)$$

The equation describing the paths in the elastic domains $O_0 \sim Y_0$ and $O_1 \sim Y_1$:

ひずみの加算分解 (上述) を用いれば,

Using the additive decomposition of the strain (above), we have

$$\varepsilon^e = \varepsilon - \varepsilon^p \leadsto \sigma = E\varepsilon^e \quad \text{⇨ 応力は弾性ひずみで決まる.}$$

A stress is determined by the elastic strain.

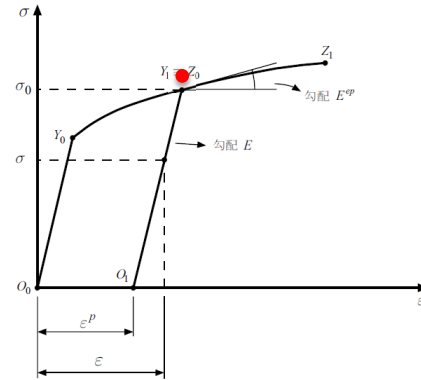


図 6.2 1 軸引張試験における数値モデル

Fig. 6.2 Idealized elastoplastic model for uniaxial tension test

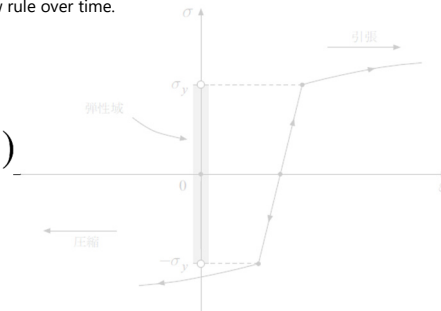


図 6.3 弾性域における弾性域
Fig. 6.3 Elastic domain in 1D plasticity model

1次元弾塑性構成則の定式化

Formulation of one-dimensional elastoplastic constitutive law

弾性域, 降伏応力, 降伏関数

Elastic domain, Yield stress, Yield function

降伏応力 σ_y を限界値とする応力の範囲“弾性域”がある。

There is a range of stress called the “Elastic domain” with the yield stress σ_y as the limit value.

ここでは引張側と圧縮側で降伏応力は同じと仮定して、

We assuming here that the yield stress is the same on the tension side and the compression side.

降伏関数 : $\Phi(\sigma, \sigma_y) := |\sigma| - \sigma_y$

Yield function

添字 y は降伏 (yield)

The subscript “y” means “yield.”

弾性域では $-\sigma_y < \sigma < \sigma_y$ なので、

Since $-\sigma_y < \sigma < \sigma_y$ holds in the elastic domain,

弾性域 : $\mathcal{E} := \{\sigma \mid \Phi(\sigma, \sigma_y) < 0\}$

Elastic domain

材料が弾性挙動を示す“応力の範囲”

The “range of stress” within which the material exhibits elastic behavior

いかなる変形段階でも、応力は降伏応力を超えない ($|\sigma| < \sigma_y$).

The stress never exceeds the yield stress at any deformation process, namely, $|\sigma| < \sigma_y$ always holds.

つまり、 $\Phi(\sigma, \sigma_y) > 0$ には決してならない。

In other words, $\Phi(\sigma, \sigma_y) > 0$ never happens.

応力は The stress exists

(i) 弾性域の内部 : $\Phi(\sigma, \sigma_y) < 0$ within the elastic domain, or

または

(ii) 弾性域の境界上 : $\Phi(\sigma, \sigma_y) = 0$ (降伏限界)
のいずれかに存在する. on the boundary of elastic domain (yield limit).

塑性論的許容応力 Plastically admissible stress

上記 (i) or (ii) を満たす応力 (The stress that satisfies (i) or (ii) above.)

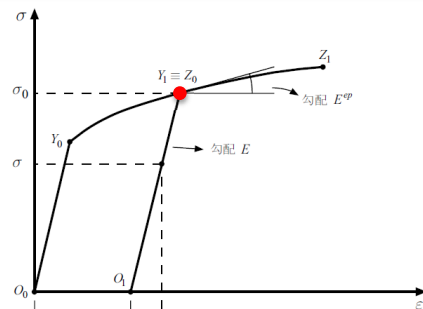


図 6.2 1 軸引張試験における数値モデル

Fig. 6.2 Idealized elastoplastic model for uniaxial tension test

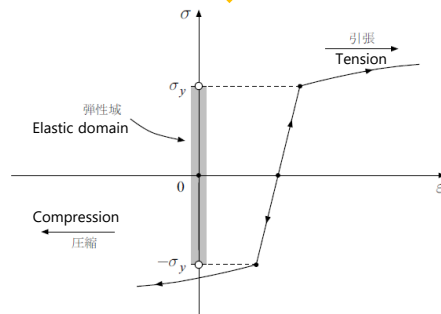


図 6.3 1 軸モデルにおける弾性域

Fig. 6.3 Elastic domain in 1D plasticity model

1次元弾塑性構成則の定式化

Formulation of one-dimensional elastoplastic constitutive law

● 降伏基準 Yield criterion

- (i) 応力が弾性域の内部にあるとき : $\Phi(\sigma, \sigma_y) < 0$

When the stress exists within the elastic domain:

弾性ひずみだけで“変化”が生じ, Only elastic strain causes “change,” while
塑性ひずみの“変化”は生じない. plastic strain does not cause “change.”

$$\dot{\varepsilon}^p = 0$$

上付きの“ドット”に注意
Note the superscript “dot,” which means “no change.”
 (“変化” = 0 を表している！)

- (ii) 応力が弾性域の境界上にあるとき : $\Phi(\sigma, \sigma_y) = 0$

When the stress exists on the boundary of the elastic domain:

二通りの応答が考えられる. (降伏限界：図中の ●)
There are two possible responses. (Yield limit: ● in the figure)

(ii-a) $\dot{\varepsilon}^p = 0$: 弾性除荷時 Elastic unloading
(塑性ひずみの変化は生じない.)
(No change in plastic strain.)

(ii-b) $\dot{\varepsilon}^p \neq 0$: 塑性負荷時 Plastic loading
(塑性ひずみに変化が生じる.)
(Change in plastic strain occurs.)

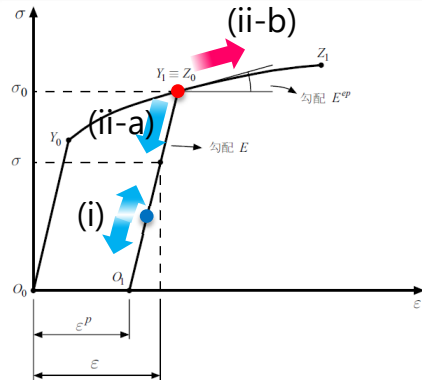


図 6.2 1軸引張試験における数値モデル

Fig. 6.2 Idealized elastoplastic model for uniaxial tension test

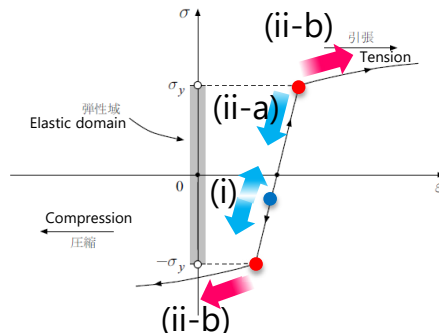


図 6.3 1軸モデルにおける弾性域

Fig. 6.3 Elastic domain in 1D plasticity model

1次元弾塑性構成則の定式化

Formulation of one-dimensional elastoplastic constitutive law

● 塑性流れ則 Plastic flow rule

塑性ひずみ ε^p の変化 (発展; evolution) の仕方を規定する法則

Rule that governs the evolution of plastic strain ε^p

応力が弾性域の境界上 (降伏限界) にあって塑性負荷の場合,
When the stress lies on the boundary of the elastic domain (yield limit) and in the case of plastic loading,

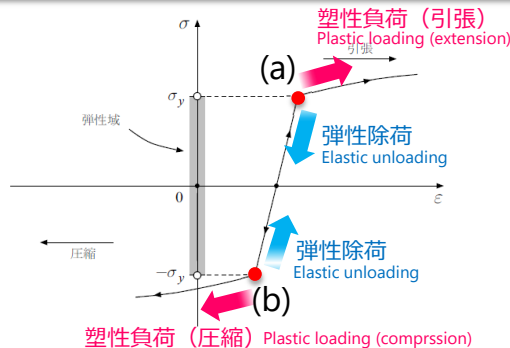


図 6.3 1 軸モデルにおける弾性域

● (a) 引張のとき ($\sigma > 0$)

Tensile case

正の塑性ひずみ (伸び変形) が進行
Positive plastic strain (extension) develops.

$$\dot{\varepsilon}^p > 0$$

● (b) 圧縮のとき ($\sigma < 0$)

Compressive case

負の塑性ひずみ (圧縮変形) が進行
Negative plastic strain (compression) develops.

$$\dot{\varepsilon}^p < 0$$

塑性流れ則: $\dot{\varepsilon}^p = \dot{\gamma} \text{sign}(\sigma)$

Plastic flow rule

大きさ 方向

Magnitude Direction of plastic strain rate
(extension or compression)

$\dot{\gamma}$: 塑性乗数 Plastic multiplier

塑性ひずみ速度の大きさを定める

非負 (≥ 0) のスカラー ☞ スライド34枚目に計算を示す.

$\text{sign}(\sigma)$: 符号関数 (signum function)

塑性ひずみの変化方向を定める.

Non-negative scalar that defines the magnitude of plastic strain rate ☞ Slide page 33

$$\text{sign}(\sigma) := \begin{cases} +1 & (\sigma > 0) \\ -1 & (\sigma < 0) \end{cases}$$

☞ 伸びの塑性ひずみが進行
Tensile plastic strain develops.
☞ 圧縮の塑性ひずみが進行
Compressive plastic strain develops.

1次元弾塑性構成則の定式化

Formulation of one-dimensional elastoplastic constitutive law

● 負荷／除荷条件

Loading/unloading condition



塑性変形が進展するか否かを規定する条件

Condition that determines whether plastic strain will progress

$\Phi(\sigma, \sigma_y) := |\sigma| - \sigma_y$: 塑性論的許容応力は、弾性域の内部 ($\Phi < 0$) または弾性域の境界上 (降伏限界) ($\Phi = 0$) に存在する。

Plastically admissible stress exists within the elastic domain ($\Phi < 0$) or on the boundary of the elastic domain ($\Phi = 0$).

$\dot{\gamma} \geq 0$: 非負の塑性乗数
Non-negative plastic multiplier

$\dot{\gamma}\Phi = 0$: 相補性条件※
Complementarity condition

※相補性条件の解釈 :

Interpretation of the complementarity condition:

- 弾性域では塑性ひずみ速度はゼロとなる :

No plastic strain rate in the elastic domain:

$$|\sigma| < \sigma_y \leadsto \Phi < 0 \leadsto \dot{\gamma} = 0 \quad \therefore \dot{\varepsilon}^p = \dot{\gamma} \text{sign}(\sigma) = 0$$

- 応力 $|\sigma|$ が現在の降伏応力 σ_y に一致するときのみ、塑性流れが生じる :

Plastic flow occurs ($\dot{\varepsilon}^p \neq 0$) only when the stress $|\sigma|$ coincides with the current yield stress σ_y :

$$|\sigma| = \sigma_y \leadsto \Phi = 0 \leadsto \dot{\gamma} > 0 \quad \therefore \dot{\varepsilon}^p = \dot{\gamma} \text{sign}(\sigma) \neq 0$$

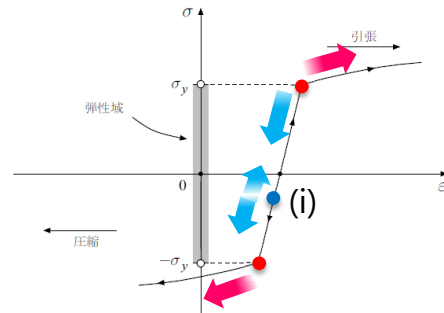


図 6.3 1 軸モデルにおける弾性域

1次元弾塑性構成則の定式化

Formulation of one-dimensional elastoplastic constitutive law

● 硬化則

Hardening rule

☞ 塑性ひずみ ε^p の進行に伴う降伏応力 σ_y の上昇の仕方を定める法則
Rule that determines the increase in yield stress σ_y accompanying an increase in plastic strain ε^p

降伏応力 σ_y を累積塑性ひずみ $\bar{\varepsilon}^p$ の関数にすればよい。

Consider the yield stress σ_y as a function of accumulated plastic strain $\bar{\varepsilon}^p$.

$$\sigma_y = \sigma_y(\bar{\varepsilon}^p)$$

ここで（軸方向の）累積塑性ひずみは

where we introduce the accumulated plastic strain (in the axial direction):

$$\bar{\varepsilon}^p := \int_0^t |\dot{\varepsilon}^p| dt = \int_0^t \dot{\gamma} dt$$

注意： $\bar{\varepsilon}^p \neq \int_0^t \varepsilon^p dt$
Remark:

圧縮（負）の塑性ひずみ速度（ $\dot{\varepsilon}^p < 0$ ）によって降伏応力が低下（塑性軟化）するようなモデルにならないように、また、引張・圧縮両方向の塑性ひずみの影響を考慮に入れるため、絶対値を積分している。

The absolute value is integrated to avoid a model in which the yield stress decreases (plastic softening) due to the negative plastic strain rate of compression ($\dot{\varepsilon}^p < 0$), and to take into account the effects of plastic strain in both the tensile and compressive directions.

補足：塑性流れ則 $\dot{\varepsilon}^p = \dot{\gamma} \text{sign}(\sigma)$ より、
Supplementary: Using the plastic flow rule, we have

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p = |\dot{\varepsilon}^p| = |\dot{\gamma} \text{sign}(\sigma)| = \dot{\gamma}$$

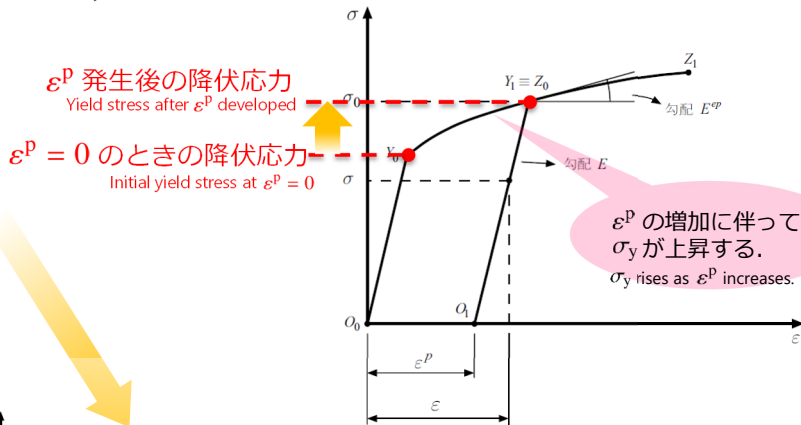


図 6.2 1 軸引張試験における数値モデル

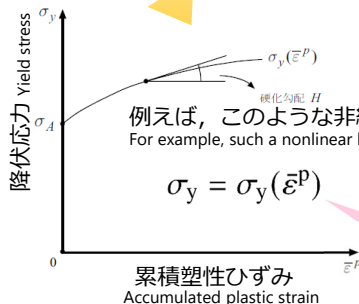


図 6.4 1 次元モデルにおける硬化曲線
Fig. 6.4 Hardening curve in 1D plasticity model.

$$\sigma_y = \sigma_y(\bar{\varepsilon}^p) \quad H(\bar{\varepsilon}^p) := \frac{d\sigma_y(\bar{\varepsilon}^p)}{d\bar{\varepsilon}^p} : \text{硬化係数 (硬化曲線の勾配)} \\ \text{Hardening modulus (Slope of the hardening curve)}$$

具体的な関数形や材料定数は、材料試験の結果に基づいて定める。

☞ 次スライド

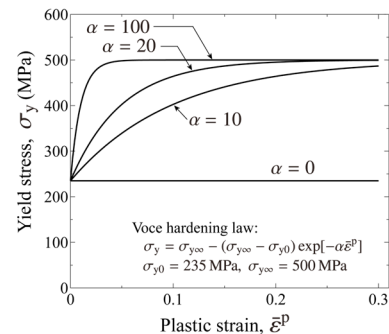
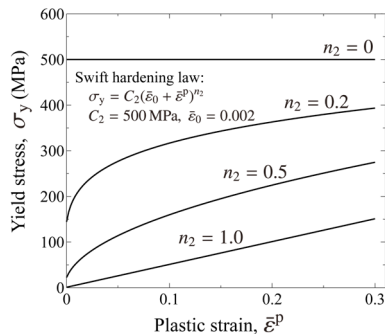
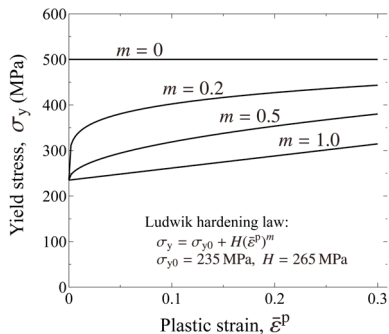
1次元弾塑性構成則の定式化

Formulation of one-dimensional elastoplastic constitutive law

硬化則の具体例：

Representative examples of hardening rule:

- 非硬化（完全塑性）： $\sigma_y = \sigma_{y0}$ (const.)
Non-hardening (perfect plasticity)
- 線形硬化： $\sigma_y = \sigma_{y0} + H\bar{\epsilon}^p$
Linear hardening
- Ludwik の硬化則 (1909)： $\sigma_y = \sigma_{y0} + H(\bar{\epsilon}^p)^m$
- Hollomon の硬化則 (1945)： $\sigma_y = C_1(\bar{\epsilon}^p)^{n_1}$
- Swift の硬化則 (1952)： $\sigma_y = C_2(\bar{\epsilon}_0 + \bar{\epsilon}^p)^{n_2}$
- Voce の硬化則 (1948)： $\sigma_y = \sigma_{y\infty} - (\sigma_{y\infty} - \sigma_{y0}) \exp[-\alpha\bar{\epsilon}^p]$



1次元弾塑性構成則のまとめ

Summary of one-dimensional elastoplastic constitutive law

- ① ひずみの加算分解 : $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$
 Decomposition of strain in additive form

$\underbrace{\varepsilon^e}_{\text{弾性ひずみ}}$
 Elastic strain

$+$

$\underbrace{\varepsilon^p}_{\text{塑性ひずみ}}$
 Plastic strain
- ② 弾性構成則 : $\sigma = E\varepsilon^e$
 Elasticity constitutive law
- ③ 降伏関数 : $\Phi(\sigma, \sigma_y) := |\sigma| - \sigma_y \leq 0$
 Yield function
- ④ 塑性流れ則 : $\dot{\varepsilon}^p = \dot{\gamma} \text{sign}(\sigma)$
 Plastic flow rule

$\underbrace{\dot{\gamma}}_{\text{大きさ}}$
 Magnitude

$\underbrace{\text{sign}(\sigma)}_{\text{方向}}$
 Direction
- ⑤ 硬化則 : $\sigma_y = \sigma_y(\bar{\varepsilon}^p); \quad \dot{\bar{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma}$
 Hardening rule
- ⑥ 負荷／除荷基準 : $\Phi \leq 0, \dot{\gamma} \geq 0, \dot{\gamma}\Phi = 0$
 Loading/unloading criterion

補足) ここでは線形弾性構成則を示したが、非線形弾性構成則 $\sigma = \sigma(\varepsilon^e)$ もある。非線形の場合、弾性接線係数は Young 率のように定数ではなく、

$$E(\varepsilon^e) := \frac{d\sigma(\varepsilon^e)}{d\varepsilon^e}$$

となり、 ε^e の関数となる。弾性構成則では ε^e と σ が一対一の関係にあるので、弾性接線係数は σ の関数と考えることもできる。

Remark: We can also consider nonlinear elasticity $\sigma = \sigma(\varepsilon^e)$, whose elasticity modulus is not constant, and is given by the derivative of stress with respect to elastic strain as shown above.

補足1) 第二式は、を用いて硬化則を表す場合におけるの発展式に相当する。

Remark 1: The latter equation corresponds to the evolution equation of internal variable when the hardening rule is expressed in terms of internal variable.

補足2) ここでは非線形硬化則を示したが、硬化係数 H を定数とした線形硬化則も用いられる : $\sigma_y = \sigma_{y0} + H\bar{\varepsilon}^p$

Remark 2: While the former equation represents a nonlinear hardening rule, we can also consider a simple linear hardening rule $\sigma_y = \sigma_{y0} + H\bar{\varepsilon}^p$ with a constant hardening modulus H .

1次元弾塑性構成則：“速度形”構成式の導出

One-dimensional elastoplastic constitutive law: Derivation of constitutive equation in “rate form”

塑性流れ則 ④ : $\dot{\varepsilon}^p = \dot{\gamma} \text{sign}(\sigma)$ で, 塑性乗数 $\dot{\gamma}$ が未定だった.

スライド
29枚目

➡ $\dot{\gamma} (\geq 0)$ の決定方法は?
How to determine?

塑性負荷の持続中は, 応力は常に降伏限界上にある.
従って, 降伏関数 ③ は,

$$\Phi(\sigma, \sigma_y) := |\sigma| - \sigma_y = 0 \quad \text{👉 ゼロのまま}$$

remains zero during plastic loading

∴ $\dot{\Phi} = 0$ 📌 整合条件 (consistency condition)

$$\dot{\Phi} = \underbrace{\frac{d|\sigma|}{d\sigma}}_{=\text{sign}(\sigma)} \dot{\sigma} - \underbrace{\frac{d\sigma_y}{d\bar{\varepsilon}^p}}_{=: H(\bar{\varepsilon}^p)} \dot{\bar{\varepsilon}}^p = 0$$

硬化係数

硬化則 ⑤ :
 $\sigma_y = \sigma_y(\bar{\varepsilon}^p)$
の導関数

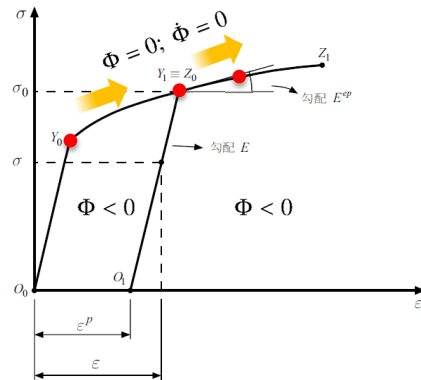


図 6.2 1 軸引張試験における数値モデル

上式と ①, ② の速度形から導かれる $\dot{\sigma} = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p)$, および ④, ⑤ を組み合わせると,

$$\dot{\gamma} = \frac{E}{E + H} \text{sign}(\sigma) \dot{\varepsilon} \quad \text{が得られ, 塑性乗数 } \dot{\gamma} \text{ が定められた.}$$

1次元弾塑性構成則：“速度形”構成式の導出

One-dimensional elastoplastic constitutive law: Derivation of constitutive equation in “rate form”

1次元弾塑性の応力－ひずみ曲線の勾配（接線の傾き）は？

Tangential slope of the stress vs strain curve in 1D elastoplasticity?

● (i) 弾性域 or 弾性除荷のとき

Change in stress within the elastic domain or elastic unloading process

弾性構成式 ② の速度形 $\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon} = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p)$ と $\dot{\varepsilon}^p = 0$ より,

$$\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon} \quad \text{速度形の1次元“弾性”構成式}$$

1D “elastic” constitutive equation in rate form

● (ii) 塑性負荷のとき Plastic loading process

$\dot{\sigma} = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p)$ に塑性流れ則 ④ $\dot{\varepsilon}^p = \dot{\gamma} \text{sign}(\sigma)$ と
前スライドの結果 $\dot{\gamma} = \frac{E}{E+H} \text{sign}(\sigma)\dot{\varepsilon}$ を代入して,

$$\dot{\sigma} = E^{\text{ep}}\dot{\varepsilon} \quad \text{速度形の1次元“弾塑性”構成式}$$

1D “elastoplastic” constitutive equation in rate form

ここで, $E^{\text{ep}} := \frac{EH}{E+H}$: 1次元弾塑性接線係数

1D elastoplastic tangent modulus

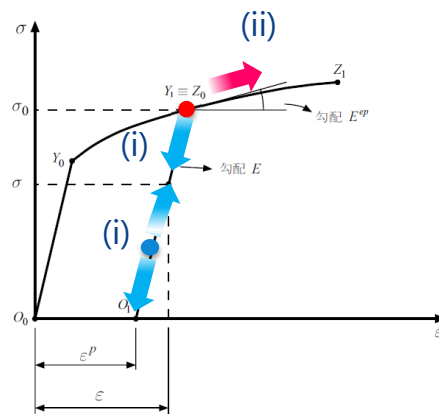


図 6.2 1 軸引張試験における数値モデル

補足：塑性ひずみ“速度”を用いるのはなぜか？

Remark: Why do we use the “rate” of plastic strain?

ここで考えているのは**負荷速度・時間に非依存 (Rate/time-independent)** の構成則だったはず。

変形のはやさによる材料応答の違い (**負荷速度依存性**) や、クリープ、リラクゼーションなど**時間依存性** は考慮していないに関わらず、塑性ひずみ速度 $\dot{\varepsilon}^p$ を用いるのはなぜか？

Why use the “rate” of plastic strain $\dot{\varepsilon}^p$ when considering **rate/time-independent model** rather than **rate/time-dependent model**?

弾性
Elasticity



応力とひずみの一対一対応

One-to-one correspondence between stress and strain



$$\sigma = E\varepsilon^e$$

ただし「亜弾性」(hypo-elasticity)はこの限りではない。

While not the case in “hypo-elasticity.”

弾塑性
Elastoplasticity



一対一対応が無い！

No one-to-one correspondence!

材料が現在までにどのような変形を経験したかによって、挙動が異なる。⇒ **変形履歴に依存する材料**

The material response depends on the deformation history the material has undergone to the present state. ⇒ **Material dependent on deformation history**

無数の履歴が考えられるので、材料の初期状態から現在に至るまでの応力/変形の履歴を一括して式示すことは実質的に無理！

Due to the countless possible histories, it is practically impossible to express the stress/deformation history undergone by the material from its initial state to the present with a single equation!



時々刻々の変化具合を“**速度形**”で式示して、“**速度**”を時間積分することで履歴を考慮。

The rate of change over time is expressed as a “rate form,” and the history is taken into account by integrating the “rate” over time.

その際、擬似的時間パラメータ t に関する微分係数を考える。(例： $\dot{\varepsilon}^p \equiv d\varepsilon/dt$)

To this end, consider the differential coefficient with respect to the pseudo-time parameter t .

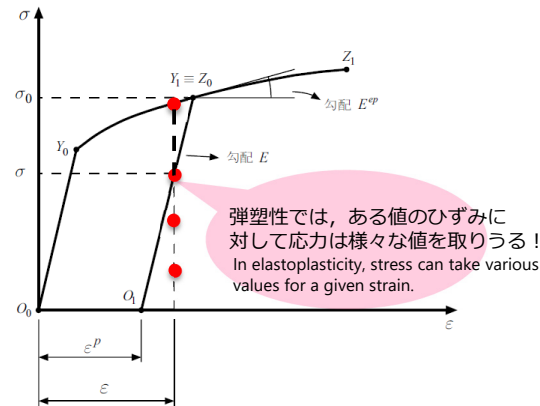


図 6.2 1 軸引張試験における数値モデル

(注：ここでは t は実時間と無関係)

講義スライド中の図の一部（図番号が付いているもの）は下記の参考書籍から引用しております。
寺田賢二郎 監訳：非線形有限要素法—弾塑性解析の理論と実践，森北出版，2012. [ISBN: 978-4627920217]

Some of the figures in this lecture slides (those with figure numbers) are quoted from the following reference book:
E. A. de Souza Neto, D. Perić, D. R. J. Owen (2008)
Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications, Wiley, [ISBN: 978-0470694527]
(Japanese translation) K. Terada, ed. (2012) Morikita Publishing, [ISBN: 978-4627920217]

● 固体材料・構造の非線形有限要素法

— 前回の復習：力学問題の全体像を俯瞰

● 弾塑性構成則

— 応力～ひずみ挙動の現象論的観察

— 1次元モデルの定式化から出発

— 3次元モデルへの一般化

— 各種の塑性モデル：どこが共通？ どこが異なる？

● 弾粘塑性構成則

— ひずみ速度依存性，クリープ，リラクゼーションの表現

● 非線形有限要素法への導入

— 材料構成則の役割と位置づけ

3次元構成則への一般化

Generalization to three-dimensional constitutive law

1次元弾塑性構成則の全体構造と構成要素（前出）：

Overall structure and components of 1D elastoplastic constitutive law:

- ① ひずみの加算分解 Additive decomposition of strain
- ② 弾性構成則 Elastic constitutive law
- ③ 降伏関数 Yield function
- ④ 塑性流れ則 Plastic flow rule
- ⑤ 硬化則 Hardening rule
- ⑥ 負荷／除荷基準 Loading/unloading criterion

3次元の場合でも、
基本的な枠組みはこれと変わらない。

The basic framework remains the same even in the 3D model.

👉 3次元構成則へ一般化
Generalization to 3D constitutive model

1次元／3次元構成則で用いる力学諸量の相違

Differences in mechanical quantities used in 1D and 3D constitutive models

	1次元の場合 One-dimensional case		3次元の場合 Three-dimensional case
応力 Stress	σ (スカラー) Scalar	→	σ (2階のテンソル) Second-order tensor
ひずみ Strain	ε (スカラー) Scalar	→	ε (2階のテンソル) Second-order tensor
接線係数 Tangent modulus	E, E^{ep} (スカラー) Scalar	→	$\mathbf{D}^e, \mathbf{D}^{\text{ep}}$ (4階のテンソル) Fourth-order tensor

3次元構成則への一般化

Generalization to three-dimensional constitutive law

1次元構成則をベースに3次元構成則へ一般化する際のポイント

Key points when generalizing 1D constitutive model to 3D model

- 定式化に用いる量： スカラー $\Rightarrow$ テンソル
 Quantities used in the formulation (1次元構成則) (3次元構成則)
 Scalar (in 1D model) Tensor (in 3D model)

👉 テンソルの基本的性質に配慮が必要： **テンソルの客観性** or **観測者不変量であるテンソル**

Careful consideration of the fundamental properties of tensors is necessary: **Objectivity of tensors** or **Observer invariant tensors**

注意：構成則を定式化する際に、客観性を持たないテンソルを用いてはならないというわけではない。客観性を持たないテンソルを用いて定式化された構成則であっても、物質客観性の原理（後述）を満たしていれば何ら問題は無い。実際に、客観性を持たない観測者不変量であるテンソルを用いた構成則の定式化は広く行われている。（例：基準配置を参照したテンソルを用いた超弾性構成則など）

Note: When formulating constitutive laws, it is not necessary to avoid using non-objective tensors. As long as the constitutive law satisfies the principle of material objectivity (described later), there is no problem using non-objective tensors. In fact, observer-invariant tensors, which are not objective, are often used in constitutive formulations. (Example: Hyperelastic constitutive models expressed in terms of observer-invariant tensors defined on a reference configuration.)

- 構成則が必ず満たすべき性質：「物質客観性の原理」

Essential property that must be satisfied by any constitutive laws: "Principle of material objectivity"

「物質の枠無差別性の原理」とよぶこともある。

Also referred to as "Principle of material frame-indifference"

これは構成則が満たすべき性質のこと。テンソルの性質としての「客観性」とは別の話。

This refers to the property that any constitutive model must satisfy. It is a completely distinct issue from the term "objectivity" indicating a property of tensors.

基本事項：テンソルの重要な性質としての「客観性」

Fundamental: An essential property of tensors: "Objectivity"

連続体力学において、空間内の位置 $\mathbf{x}$ と時刻 t における物理量の状態を観測する観測者を「基準枠」という。

In continuum mechanics, an observer who observes a state of physical quantities at a position in space, $\mathbf{x}$, and at a time, t , is called a "reference frame".

基準枠 O^* による観測

Observation by the reference frame O^*

スカラー： a^*
Scalar

ベクトル： $\mathbf{b}^*$
Vector

2階テンソル： $\mathbf{A}^*$
Second-order tensor

ふたつの基準枠の観測値が以下のように関係付けられるとき、それぞれ「客観性がある量」という。

When the observed values of the two reference frames are related as follows, they are called "objective quantities".

$$a^* = a$$

$$\mathbf{b}^* = \mathbf{Q}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T$$

基準枠の向きの違いだけ回転したように観測されるということ。

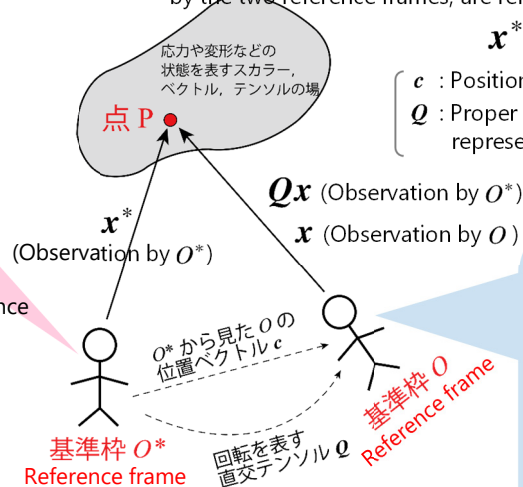
These relationships mean that the quantities are observed as if they were rotated by the difference in the orientation of the reference frame.

回転 $\mathbf{Q}$ だけ向きが異なるふたつの基準枠 O , O^* を考える。両者それぞれが観測する点 P の位置ベクトル $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}^*$ は以下のように関係づけられる。

Consider two reference frames, O and O^* , whose orientations differ by a rotation $\mathbf{Q}$. The position vectors of Point P , $\mathbf{x}$ and $\mathbf{x}^*$, observed by the two reference frames, are related as follows:

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{c} + \mathbf{Q}\mathbf{x}$$

$\mathbf{c}$: Position vector of O relative to O^*
 $\mathbf{Q}$: Proper orthogonal tensor (正格直交テンソル) representing rotation that satisfies $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$, $\det \mathbf{Q} = +1$



基準枠 O による観測

Observation by the reference frame O

スカラー： a
Scalar

ベクトル： $\mathbf{b}$
Vector

2階テンソル： $\mathbf{A}$
Second-order tensor

基本事項：構成則が具備すべき必須要件「物質客観性の原理」

41

Fundamental: An essential requirements for constitutive laws: "Principle of material objectivity"

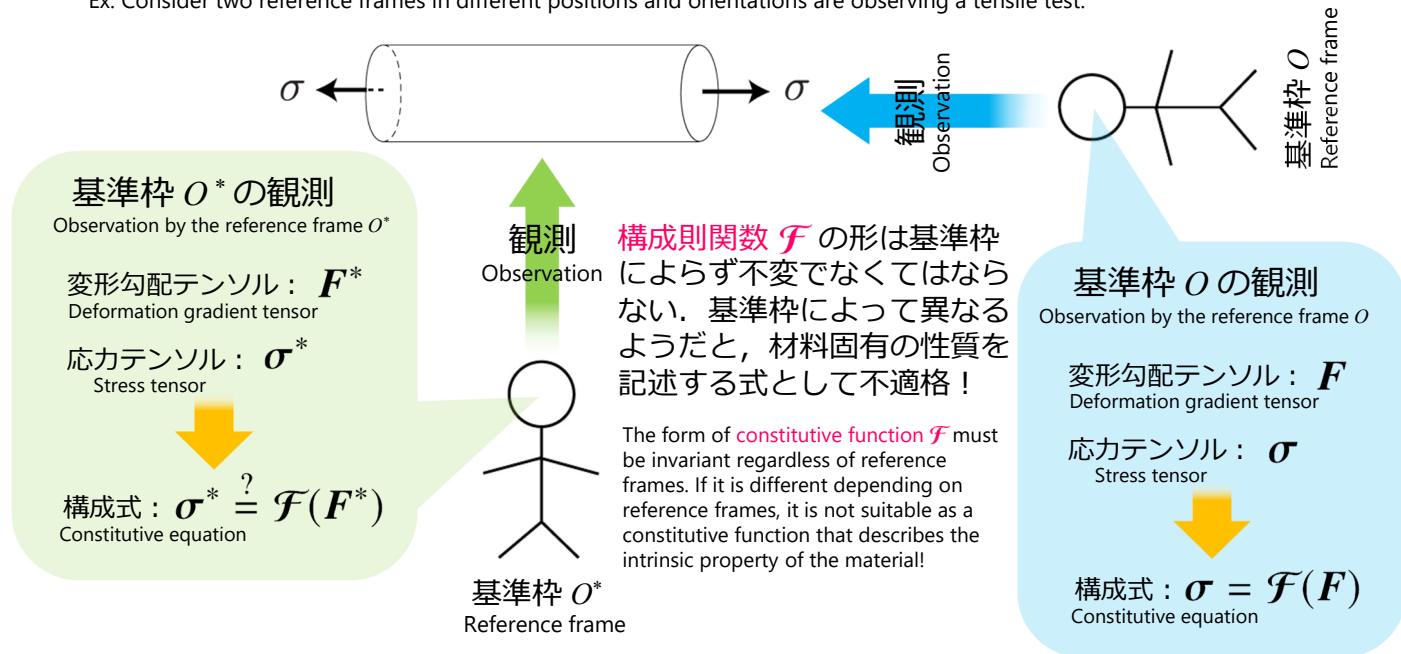
材料固有の性質は、観測者（基準枠）によらず不変：「物質客観性の原理」

「物質の枠無差別性の原理」とよぶこともある。

Intrinsic property of a material must be invariant regardless of observers (reference frames): Principle of material objectivity
(or Principle of material frame-indifference)

例：位置と向きが異なるふたりの観測者が引張試験を観測する。

Ex. Consider two reference frames in different positions and orientations are observing a tensile test.



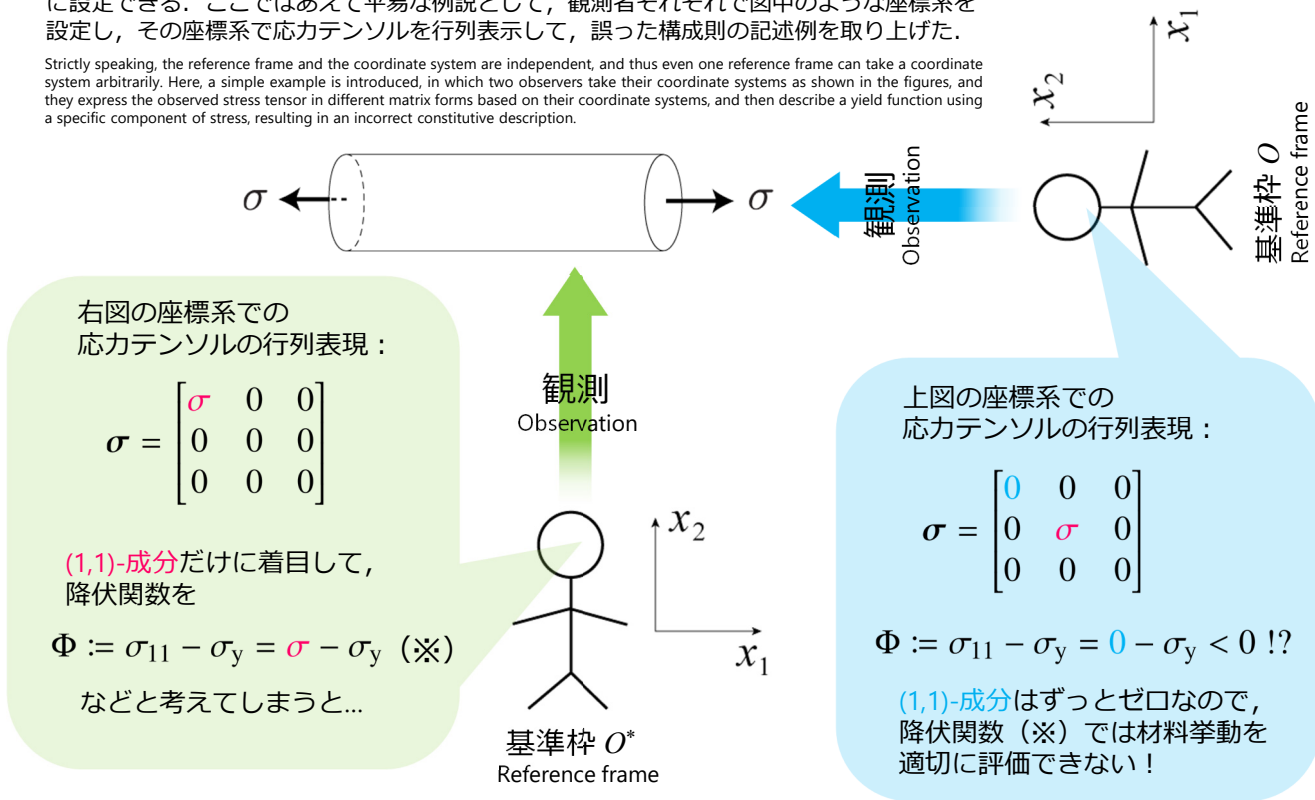
基本事項：構成則が具備すべき必須要件「物質客観性の原理」

42

Fundamental: An essential requirements for constitutive laws: "Principle of material objectivity"

厳密に言えば基準枠と座標系の取り方は独立であり、あるひとつの基準枠でも座標系は任意に設定できる。ここではあえて平易な例説として、観測者それぞれで図中のような座標系を設定し、その座標系で応力テンソルを行列表示して、誤った構成則の記述例を取り上げた。

Strictly speaking, the reference frame and the coordinate system are independent, and thus even one reference frame can take a coordinate system arbitrarily. Here, a simple example is introduced, in which two observers take their coordinate systems as shown in the figures, and they express the observed stress tensor in different matrix forms based on their coordinate systems, and then describe a yield function using a specific component of stress, resulting in an incorrect constitutive description.



結論のみ示す：3次元構成則への一般化

Conclusion only: Generalization to three-dimensional constitutive law

43

	1次元構成則 1D model	3次元構成則 3D model
① ひずみの弾塑性分解 (加算分解) Additive decomposition of strain	$\varepsilon = \underbrace{\varepsilon^e}_{\text{弾性ひずみ}} + \underbrace{\varepsilon^p}_{\text{塑性ひずみ}} \quad \Rightarrow \text{スカラー}$	$\boldsymbol{\varepsilon} = \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon}^e}_{\text{弾性ひずみ}} + \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon}^p}_{\text{塑性ひずみ}} \quad \Rightarrow \text{テンソル}$
② 弾性構成則 Elasticity constitutive law (ここでは等方線形弾性を仮定) (Isotropic linear elasticity is employed here.)	$\sigma = E \varepsilon^e \quad \Rightarrow \text{スカラー}$	$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad \Rightarrow \text{テンソル}$
③ 降伏関数 Yield function	$\underbrace{\Phi(\sigma, \sigma_y)}_{\text{スカラー変数}} := \sigma - \sigma_y \leq 0$	$\underbrace{\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})}_{\text{テンソル変数}} := \boxed{\text{具体例は後述}} \leq 0$ Specific examples will be shown later. $\Rightarrow \text{スカラー値テンソル関数}$
④ 塑性流れ則 Plastic flow rule	$\varepsilon^p = \underbrace{\dot{\gamma}}_{\text{大きさ}} \underbrace{\text{sign}(\sigma)}_{\text{方向 (正/負は引張/圧縮)}} \quad \Rightarrow \text{スカラー}$	$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \underbrace{\dot{\gamma}}_{\text{大きさ}} \underbrace{N(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})}_{\text{方向 (テンソル)}} \quad \Rightarrow \text{テンソル}$
⑤ 硬化則 Hardening rule 硬化変数を関係づける構成則との発展則	$\sigma_y = \sigma_y(\bar{\varepsilon}^p); \quad \underbrace{\dot{\bar{\varepsilon}}^p}_{\text{“大きさ”のみ}} = \dot{\gamma}$ $\Rightarrow \text{スカラー}$	$\mathbf{A} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}); \quad \underbrace{\dot{\boldsymbol{\alpha}}}_{\text{“大きさ”方向 (テンソル)}} = \dot{\gamma} \mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})$ $\Rightarrow \text{テンソル}$
⑥ 負荷／除荷条件 Loading/unloading criterion	$\Phi \leq 0, \dot{\gamma} \geq 0, \dot{\gamma} \Phi = 0$	$\Phi \leq 0, \dot{\gamma} \geq 0, \dot{\gamma} \Phi = 0 \quad \Rightarrow \text{1次元の場合とまったく同じ形式}$ Identical form as 1D case

補足：“内部変数”を用いた構成モデルの定式化について

Note: On the use of “internal variables” in the formulation of constitutive model

- 塑性材料のように、現在まで経験した“変形の履歴”に依存する材料の構成則の一般形：

$$\sigma(x, t) = \mathcal{F}(\underbrace{\varepsilon(x, t - s), 0 \leq s < \infty}_{\text{過去～現在のひずみの全履歴}}; x, t)$$

過去～現在のひずみの全履歴

これを考慮するのは現実的に困難！



☞ 内部変数 を用いる。

- 内部変数を用いた構成則の表現：

$$\sigma(x, t) = \mathcal{F}(\varepsilon(x, t), \underbrace{\alpha(x, t)}_{\text{内部変数}}; x, t)$$

内部変数を用いて変形履歴への依存性を考慮する。

変形の進行に伴う内部変数の変化 ⇔ 発展則を別途定義

このような材料の特性を
“現象論的に” 構成則でモデル化するには、

外部変数（応力やひずみなどの外見の状態から分かる量）だけでは、
モデル化が困難な場合がある。



変形の履歴によって材料の内部構造に生じた変化
による影響を

パラメータ群： $\alpha := \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$

内部変数 という。（外見の状態からは分からない量）

で表現することによりモデル化する。

講義スライド中の図の一部（図番号が付いているもの）は下記の参考書籍から引用しております。
寺田賢二郎 監訳：非線形有限要素法—弾塑性解析の理論と実践，森北出版，2012. [ISBN: 978-4627920217]

Some of the figures in this lecture slides (those with figure numbers) are quoted from the following reference book:
E. A. de Souza Neto, D. Perić, D. R. J. Owen (2008)
Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications, Wiley, [ISBN: 978-0470694527]
(Japanese translation) K. Terada, ed. (2012) Morikita Publishing, [ISBN: 978-4627920217]

● 固体材料・構造の非線形有限要素法

— 前回の復習：力学問題の全体像を俯瞰

● 弾塑性構成則

— 応力～ひずみ挙動の現象論的観察

— 1次元モデルから出発

— 3次元モデルへの一般化

— 各種の塑性モデル：どこが共通？ どこが異なる？

● 弾粘塑性構成則

— ひずみ速度依存性，クリープ，リラクゼーションの表現

● 非線形有限要素法への導入

— 材料構成則の役割と位置づけ

● 各種の塑性モデル Various plasticity models

- フォン・ミーゼスモデル, トレスカモデル, ドラッカー・プラガーモデル, モール・クーロンモデル, カムクレイモデル, 異方性塑性モデルなど

von Mises model, Tresca model, Drucker–Prager model, Mohr–Coulomb model, Cam-clay model, anisotropic plasticity model, etc.

- 各種の硬化則：非硬化, 等方硬化, 移動硬化

Various hardening rules: non-hardening, isotropic hardening, kinematic hardening

- 様々な塑性モデル：どこが同じで, どこが異なる？

Various plasticity models: What is the same, and what is the difference?

さまざまな弾塑性モデルがあるが・・・

どこが共通で、どこが異なるのか？

- ① ひずみの弾塑性分解：
(加算分解)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon}^e}_{\text{弾性ひずみ}} + \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon}^p}_{\text{塑性ひずみ}}$$

かなり特殊な弾塑性モデルを除いて

共通

- ② 弾性構成則：
(ここでは線形弾性を仮定)

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e$$

だいたい共通

非線形弾性構成則を用いることもある

- ③ 降伏関数：

$$\underbrace{\Phi(\boldsymbol{\sigma}, A)}_{\text{テンソル変数}} = \boxed{\text{具体例は後述}} \leq 0$$

モデルごとに異なる

- ④ 塑性流れ則：

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \underbrace{\dot{\gamma}}_{\text{大きさ}} \underbrace{N(\boldsymbol{\sigma}, A)}_{\text{方向 (テンソル)}}$$

③ と連動して異なる

ただし、塑性流れ則の形式そのものは共通。
また、“関連”/“非関連”の塑性流れ則がある。

- ⑤ 硬化則：

硬化変数を関係づける構成則と
の発展則

$$A = A(\boldsymbol{\alpha}), \quad \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \underbrace{\dot{\gamma}}_{\text{大きさ}} \underbrace{H(\boldsymbol{\sigma}, A)}_{\text{方向 (テンソル)}}$$

モデルごとに異なる

- ⑥ 負荷／除荷条件：

$$\Phi \leq 0, \quad \dot{\gamma} \geq 0, \quad \dot{\gamma} \Phi = 0 \quad \longrightarrow \quad \text{共通}$$

さまざまな弾塑性モデルがあるが・・・

どこが共通で、どこが異なるのか？

- ① ひずみの弾塑性分解： $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$
(加算分解)

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{弾性ひずみ}} + \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{塑性ひずみ}}$

かなり特殊な弾塑性モデルを除いて

共通

- ② 弾性構成則：
(ここでは線形弾性を仮定)

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e$$

だいたい共通

非線形弾性構成則を用いることもある

- ③ 降伏関数：

$$\underbrace{\Phi(\boldsymbol{\sigma}, A)}_{\text{テンソル変数}} = \boxed{\text{具体例は後述}} \leq 0$$

モデルごとに異なる

- ④ 塑性流れ則：

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \underbrace{\dot{\gamma}}_{\text{大きさ}} \underbrace{N(\boldsymbol{\sigma}, A)}_{\text{方向 (テンソル)}}$$

③ と連動して異なる

ただし、塑性流れ則の形式そのものは共通。
また、“関連”/“非関連”の塑性流れ則がある。

- ⑤ 硬化則：

硬化変数を関係づける構成則との発展則

$$A = A(\alpha), \quad \dot{\alpha} = \underbrace{\dot{\gamma}}_{\text{大きさ}} \underbrace{H(\boldsymbol{\sigma}, A)}_{\text{方向 (テンソル)}}$$

モデルごとに異なる

- ⑥ 負荷／除荷条件：

$$\Phi \leq 0, \quad \dot{\gamma} \geq 0, \quad \dot{\gamma} \Phi = 0$$

共通

● 等方性塑性モデル

☞ 材料の塑性的性質が，材料がおかれる向きに依存しないモデル

このようなモデルでは，異方性を表すテンソル は不要で，
降伏関数は $\Phi(\sigma, \text{スカラー硬化変数})$ の形で表すことができる。

● 降伏関数が満たすべき条件

物質客観性の原理を満たすには，任意の回転に対して降伏関数 Φ の値は不変でなくてはならない。この要請より， Φ が満たすべき条件は，

$$\Phi(\sigma, *) = \Phi(Q\sigma Q^T, *) \quad \text{☞ スカラー値の等方テンソル関数}$$

観測者（基準枠）によらず
不変であるということ。

ある観測者から
みた応力

別の観測者から
みた応力

Q は回転を表す正格直交テンソル
 $Q^{-1} = Q^T, \det Q = +1$

☞ 等方性塑性モデルの降伏関数 $\Phi(\sigma, *)$ は
応力テンソル σ の不変量の関数に限定される：

$\Phi(I_\sigma, II_\sigma, III_\sigma, *)$ あるいは， $\Phi(p, q, \theta, *)$ などの形。

構成則の定式化でよく使われる応力不変量

Stress invariants often used in the formulation of constitutive equations

Cauchy応力テンソル： $\boldsymbol{\sigma}$

Cauchy stress tensor



👉 力学的意味が分かりやすく、
構成則の定式化に使いやすい不変量
Invariants that are suitable for formulating constitutive equations

- 平均垂直応力：
Mean normal stress

$$p := \frac{1}{3} \text{I} \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\sigma}$$

- 応力テンソルの
偏差不変量：
Deviatoric invariant
of stress tensor

$$\begin{aligned} q &:= \sqrt{\frac{3}{2}} (\bar{\text{II}}_{\boldsymbol{\sigma}_{\text{dev}}})^{1/2} = \sqrt{3} (-\text{II}_{\boldsymbol{\sigma}_{\text{dev}}})^{1/2} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} \{ \text{tr} (\boldsymbol{\sigma}_{\text{dev}})^2 \}^{1/2} = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\boldsymbol{\sigma}_{\text{dev}}\| \end{aligned}$$

- Lode角：
Lode angle

$$\theta := \frac{1}{3} \cos^{-1} \left[\frac{\sqrt{6} \bar{\text{III}}_{\boldsymbol{\sigma}_{\text{dev}}}}{(\bar{\text{II}}_{\boldsymbol{\sigma}_{\text{dev}}})^{3/2}} \right] = \frac{1}{3} \cos^{-1} \left[\frac{3 \sqrt{3}}{2} \frac{\text{III}_{\boldsymbol{\sigma}_{\text{dev}}}}{(-\text{II}_{\boldsymbol{\sigma}_{\text{dev}}})^{3/2}} \right]$$

文献によってLode角の定義が異なることもあるので注意！

(sin, cos や正負符号など)

ここでは、
軸対称伸張を $\theta = 0^\circ$
軸対称圧縮を $\theta = 60^\circ$
と定義している。

$$(0 \leq \theta \leq \pi/3)$$

3つの応力不変量 p, q, θ の力学的な意味

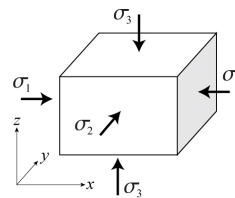
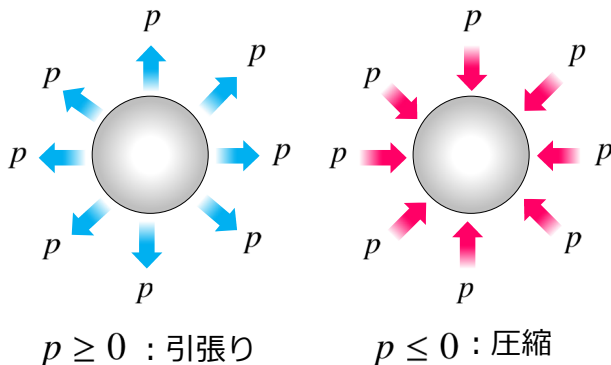
Mechanical meaning of the stress invariants p, q, θ

● 平均垂直応力 : $p = \frac{1}{3} \text{tr} \sigma$ (引張を正に定義)
Mean normal stress

● 応力テンソルの偏差不変量 : $q = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\sigma_{\text{dev}}\|$
Deviatoric invariant of stress tensor

● Lode角 : $\theta = \frac{1}{3} \cos^{-1} \left[\frac{\sqrt{6} \text{tr}(\sigma_{\text{dev}})^3}{\{\text{tr}(\sigma_{\text{dev}})^2\}^{3/2}} \right]$ ($0 \leq \theta \leq \pi/3$)
Lode angle

● 平均垂直応力のイメージ



$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p$
 $\sigma_{ij} = 0$ for $i \neq j$
 (この図では圧縮 : $p \leq 0$)

応力テンソルの
行列表示 :

$$\sigma = pI = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}$$

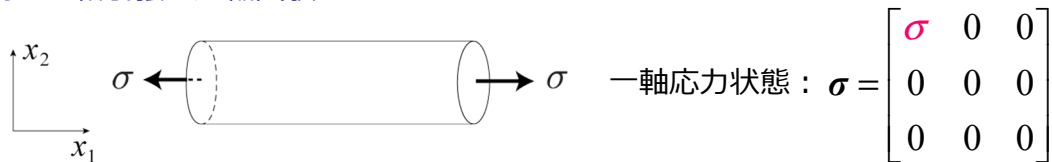
3つの応力不変量 p, q, θ の力学的な意味

● 平均垂直応力： $p = \frac{1}{3} \text{tr} \sigma$ (引張を正に定義)
Mean normal stress

● 応力テンソルの偏差不変量： $q = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\sigma_{\text{dev}}\| \geq 0$
Deviatoric invariant of stress tensor

● Lode角： $\theta = \frac{1}{3} \cos^{-1} \left[\frac{\sqrt{6} \text{tr}(\sigma_{\text{dev}})^3}{\{\text{tr}(\sigma_{\text{dev}})^2\}^{3/2}} \right]$ ($0 \leq \theta \leq \pi/3$)
Lode angle

● 例：一軸引張・圧縮試験



一軸応力状態： $\sigma = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$p = \frac{1}{3}(\sigma + 0 + 0) = \frac{1}{3}\sigma$$

$$\sigma_{\text{dev}} = \sigma - p\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\sigma \end{bmatrix}$$

$$q = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\{ \left(\frac{2}{3}\sigma \right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\sigma \right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\sigma \right)^2 \right\}^{1/2}$$

$$= |\sigma| \quad \text{軸方向応力の絶対値}$$

3つの応力不変量 p, q, θ の力学的な意味

Mechanical meaning of the stress invariants p, q, θ

● 平均垂直応力： $p = \frac{1}{3} \text{tr} \sigma$ (引張を正に定義)
Mean normal stress

● 応力テンソルの偏差不変量： $q = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\sigma_{\text{dev}}\| \geq 0$
Deviatoric invariant of stress tensor

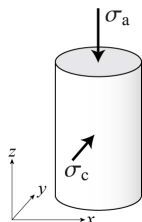
● Lode角： $\theta = \frac{1}{3} \cos^{-1} \left[\frac{\sqrt{6} \text{tr}(\sigma_{\text{dev}})^3}{\{\text{tr}(\sigma_{\text{dev}})^2\}^{3/2}} \right]$ ($0 \leq \theta \leq \pi/3$)
Lode angle

● 例：地盤材料の三軸圧縮試験，三軸伸張試験 (いずれも軸対称応力状態)

$$|\sigma_a| \geq |\sigma_c| \quad |\sigma_a| \leq |\sigma_c|$$



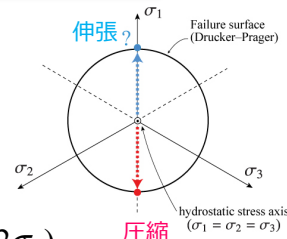
このような応力状態についての
応力テンソルの行列表示と不変量は，



$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_c & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_c & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_a \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} p = \frac{1}{3}(\sigma_a + 2\sigma_c) \\ q = |\sigma_a - \sigma_c| \quad \text{軸差応力 (絶対値)} \\ \theta = 0^\circ \text{ (伸張)}, 60^\circ \text{ (圧縮)} \end{cases}$$

添字“c”は“lateral **c**onfining stress” (側方拘束応力) ,
添字“a”は“**a**xial stress” (軸方向応力) の意味



3つの応力不変量 p, q, θ の力学的な意味

Mechanical meaning of the stress invariants p, q, θ

● 平均垂直応力 : $p = \frac{1}{3} \text{tr} \sigma$ (引張を正に定義)
Mean normal stress

● 応力テンソルの偏差不変量 : $q = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\sigma_{\text{dev}}\|$
Deviatoric invariant of stress tensor

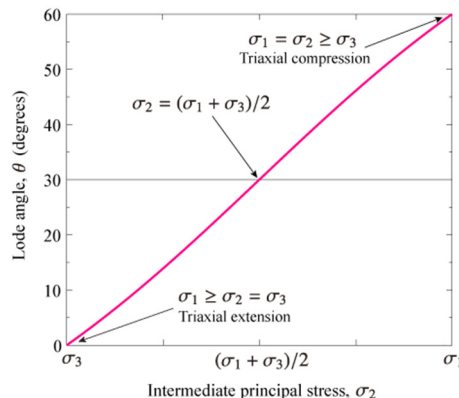
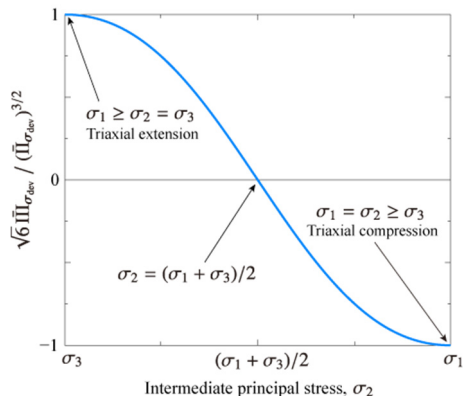
● Lode角 : $\theta = \frac{1}{3} \cos^{-1} \left[\frac{\sqrt{6} \text{tr}(\sigma_{\text{dev}})^3}{\{\text{tr}(\sigma_{\text{dev}})^2\}^{3/2}} \right]$ ($0 \leq \theta \leq \pi/3$)
Lode angle

文献によってLode角の定義が異なることもあるので注意！

(sin, cos や正負符号など)

ここでは、
軸対称伸張を $\theta = 0^\circ$
軸対称圧縮を $\theta = 60^\circ$
と定義している。

● Lode角 θ : 中間主応力 σ_2 と最大・最小主応力 σ_1, σ_3 との大小関係に関する指標



3つの応力不変量 p, q, θ の力学的な意味

Mechanical meaning of the stress invariants p, q, θ

● 平均垂直応力 : $p = \frac{1}{3} \text{tr} \sigma$ (引張を正に定義)
Mean normal stress

● 応力テンソルの偏差不変量 : $q = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\sigma_{\text{dev}}\|$
Deviatoric invariant of stress tensor

● Lode角 : $\theta = \frac{1}{3} \cos^{-1} \left[\frac{\sqrt{6} \text{tr}(\sigma_{\text{dev}})^3}{\{\text{tr}(\sigma_{\text{dev}})^2\}^{3/2}} \right]$ ($0 \leq \theta \leq \pi/3$)
Lode angle

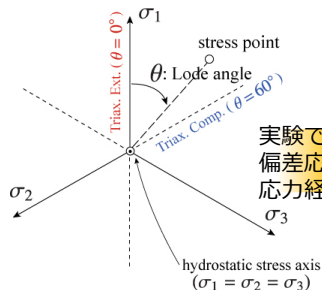
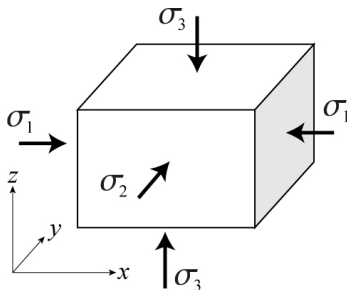
文献によってLode角の定義が異なることもあるので注意！

(sin, cos や正負符号など)
後述

ここでは、
軸対称伸張を $\theta = 0^\circ$
軸対称圧縮を $\theta = 60^\circ$
と定義している。

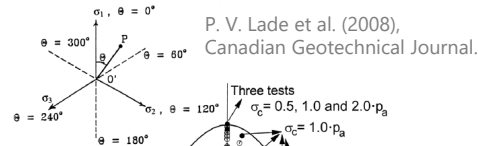
● 例：地盤材料の三主応力独立制御試験

θ を自在に制御



実験で得られた
偏差応力面（後述）上の
応力経路

Fig. 2. Stress paths for true triaxial tests projected on octahedral plane.



P. V. Lade et al. (2008),
Canadian Geotechnical Journal.

Lode角 θ によって降伏応力が異なる。

各種の塑性モデル：降伏面の形状

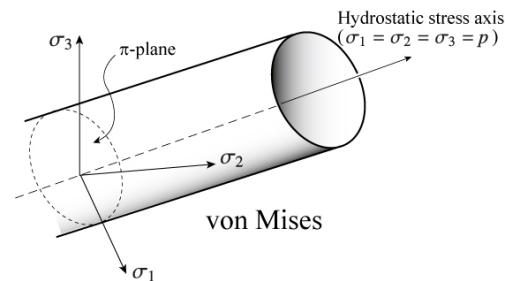
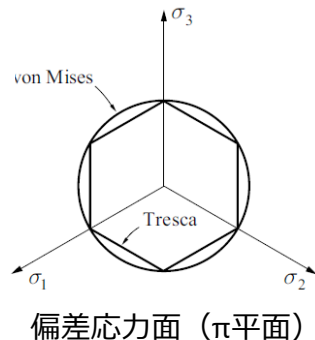
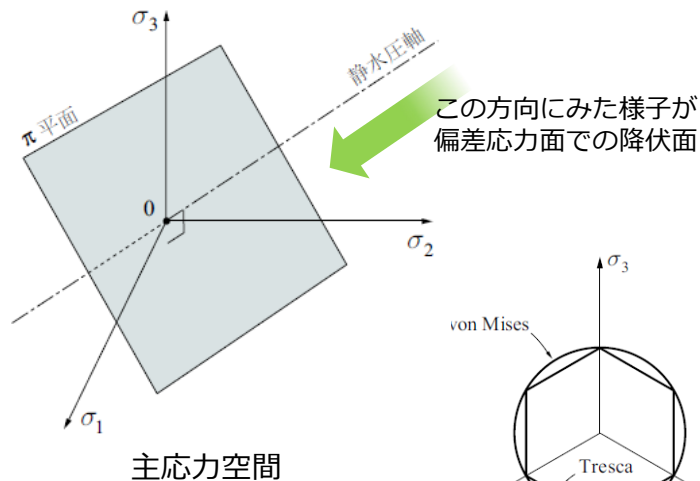
Various plasticity models: Shape of yield surface

● 材料の降伏特性 — 降伏面の形状に反映

図的表現で把握 

硬化変数 A をある値に定めたとき、
降伏関数を用いた方程式 $\Phi(\sigma, A) = 0$ は主応力空間で3次元曲面として表される。

主応力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ を
直交座標系の軸に
取った空間



例：von Misesモデル（後述）の降伏面
を主応力空間で表すと円筒形

※ 詳細は付録Aを参照

各種の塑性モデル：降伏面の形状

Various plasticity models: Shape of yield surface

- 3つの応力不変量 p, q, θ で表された各種の塑性モデルの降伏関数

👉 降伏面の“形状”は？

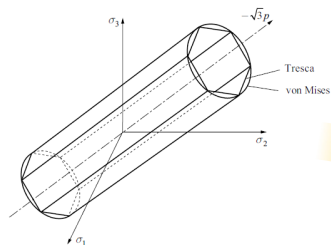


図 6.8 主応力空間における Tresca と von Mises の降伏曲面

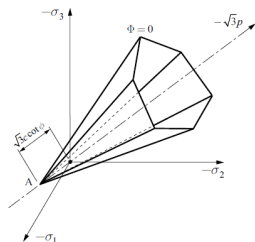
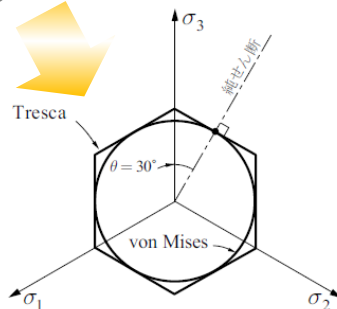
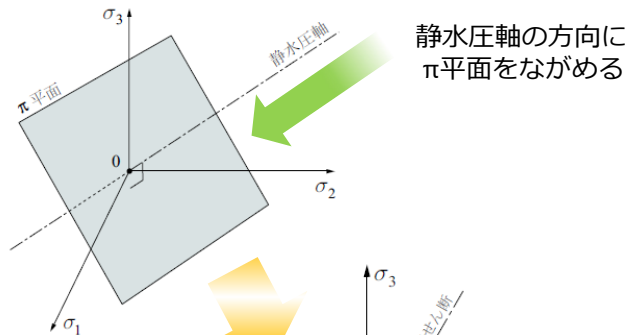


図 6.13 主応力空間における Mohr-Coulomb の降伏曲面

主応力空間における
各種塑性モデルの降伏面の形状



※ 詳細は付録Aを参照

偏差応力面（ π 平面）への降伏曲面の投影形

工学的に広く用いられている代表的な塑性モデルの“具体形”を
幾つか紹介する.

- Trescaモデル

- von Misesモデル

} 主に金属材料の特性を表現するのに
適したモデル (圧力 “非” 依存性)

- Mohr-Coulombモデル

- Drucker-Pragerモデル

} 土・岩石・コンクリートなど, 摩擦性材料
の特性を表現するのに適したモデル
(圧力依存性)

最も単純な von Misesモデルを「基本モデル」とし,
それとの相違点に着目しながら, 各塑性モデルを紹介する.

各種の塑性モデル：von Misesモデル – 降伏関数

Various plasticity models: von Mises model – Yield function

● von Misesモデルの降伏関数

$$\Phi(p, q, \theta, \sigma_y) \equiv q - \sigma_y$$

☞ 応力テンソルの偏差不変量 q が降伏応力 σ_y に達すると塑性降伏が生じる。

☞ 降伏挙動には偏差応力 σ_{dev} の“大きさ” q だけが関係し、平均垂直応力 p （つまり圧力 $-p$ ）は影響しない。

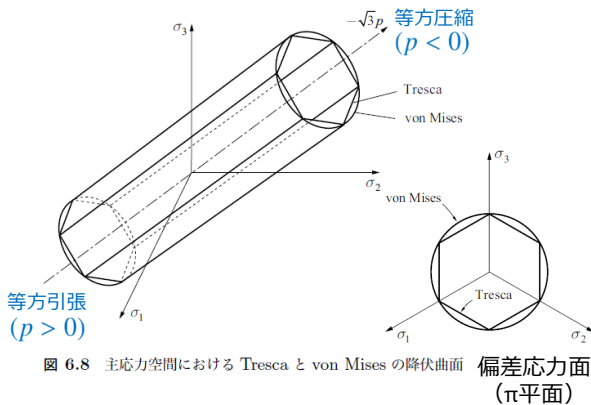


図 6.8 主応力空間における Tresca と von Mises の降伏曲面 偏差不応力面 (π平面)

降伏面は静水圧軸を中心軸とする円筒形

降伏特性は圧力“非”依存性
Pressure-insensitive yielding property

● 一軸引張試験での解釈



$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \sigma_{\text{dev}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\sigma \end{bmatrix}$$

$$q = |\sigma|$$

各種の塑性モデル：Drucker-Pragerモデル – 降伏関数

Various plasticity models: Drucker-Prager model – Yield function

● Drucker-Pragerモデルの降伏関数

$$\Phi(p, q, \theta) = \frac{q}{\sqrt{3}} + \eta p - \xi c$$

c : 粘着力
 η, ξ : 粘着力 c およびせん断抵抗角 ϕ と関係付けられる定数

☞ 静水圧 p に関する項（第2項）を付加.

☞ 圧力 ($-p$) が大きいほど、塑性降伏が開始する
 偏差応力 q は大きくなる.

地盤材料, 岩石, コンクリートなどの「摩擦性材料」にみられる性質

降伏特性は圧力依存性

Pressure-sensitive (pressure-dependent) yielding property

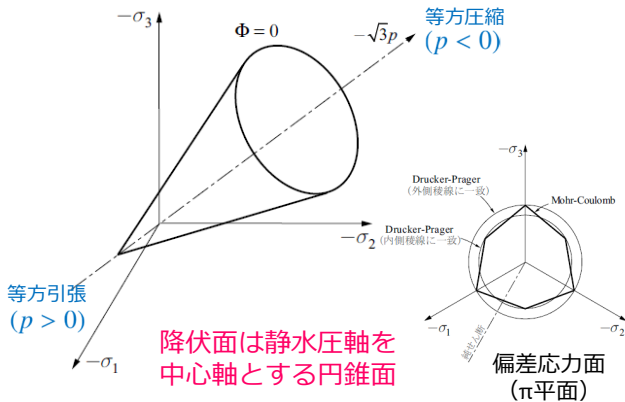
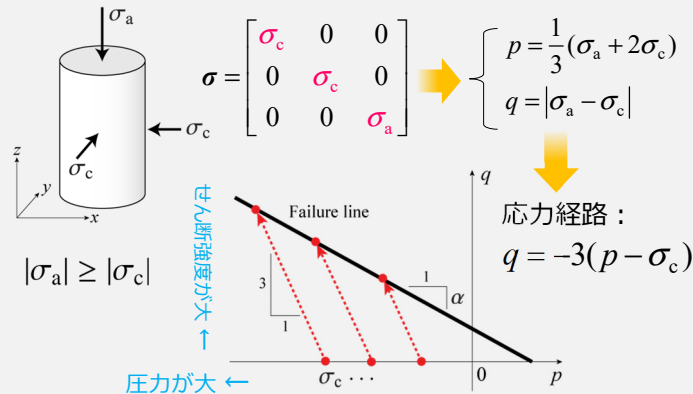


図 6.14 主応力空間における Drucker-Prager の降伏曲面
 (座標軸のマイナス符号に注意)

● 地盤材料の三軸圧縮試験 (排水条件) の例



各種の塑性モデル：降伏面の形状

Various plasticity models: Shape of yield surface

3つの応力不変量 p, q, θ のうち、
どれが降伏関数に含まれるか／含まれないか？

☞ どのような材料特性を
モデル化したいのか？

☞ 降伏面の“形状”が異なる

● Trescaモデル

$$\Phi(p, q, \theta, \sigma_y) = \underbrace{\frac{2}{\sqrt{3}} q \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)}_{= 2\sqrt{J_2}} - \sigma_y$$

静水圧軸を中心軸とする六角筒

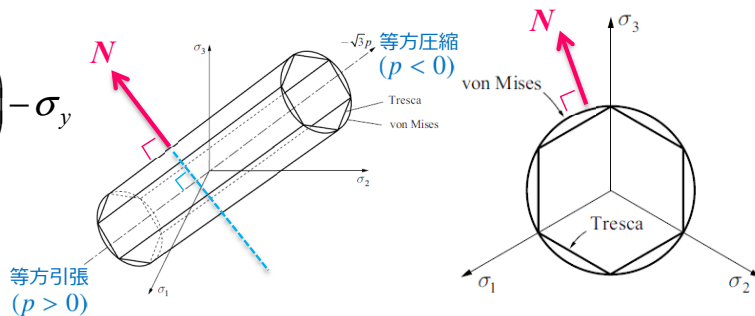


図 6.8 主応力空間における Tresca と von Mises の降伏曲面

● von Misesモデル

$$\Phi(p, q, \theta, \sigma_y) = q - \sigma_y$$

$$= \sqrt{3J_2}$$

静水圧軸を中心軸とする円筒

両モデルともに、 p を変数に含まない

⇒ 常に法線 N は静水圧軸に垂直

塑性降伏挙動は圧力“非”依存性

塑性体積ひずみは生じない ☞ 後述

各種の塑性モデル：降伏面の形状

Various plasticity models: Shape of yield surface

3つの応力不変量 p, q, θ のうち、
どれが降伏関数に含まれるか／含まれないか？

☞ どのような材料特性を
モデル化したいのか？

☞ 降伏面の“形状”が異なる

● Mohr-Coulombモデル

$$\Phi(p, q, \theta) = \left[\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \sin\phi \right] \frac{q}{\sqrt{3}} + p \sin\phi - c \cos\phi$$

静水圧軸を中心軸とする偏六角錐面

c : 粘着力
 ϕ : せん断抵抗角
(内部摩擦角)

● Drucker-Pragerモデル

$$\Phi(p, q, \theta) = \frac{q}{\sqrt{3}} + \eta p - \xi c$$

静水圧軸を中心軸とする円錐面

c : 粘着力
 η, ξ : 粘着力 c およびせん断抵抗角 ϕ と
関係付けられる定数

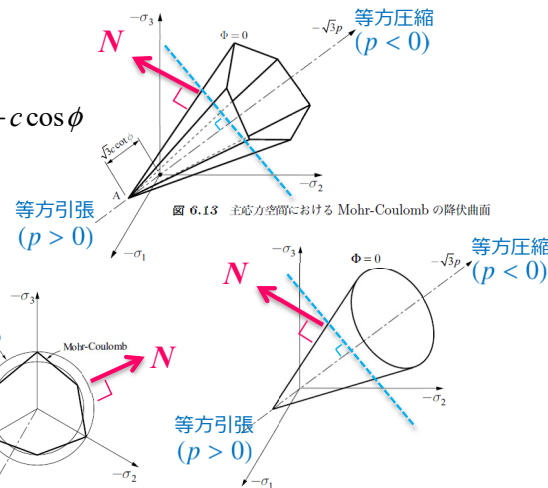


図 6.13 主応力空間における Mohr-Coulomb の降伏曲面

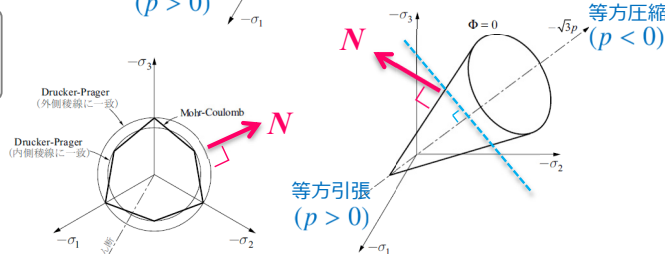


図 6.14 主応力空間における Drucker-Prager の降伏曲面

両モデル
ともに

塑性降伏挙動は圧力依存性

☞ 後述

塑性体積ひずみも生じうる (上図では膨張ひずみ)

● 各種の塑性モデル Various plasticity models

- フォン・ミーゼスモデル, トレスカモデル, ドラッカー・プラガーモデル, モール・クーロンモデル, カムクレイモデル, 異方性塑性モデルなど

von Mises model, Tresca model, Drucker–Prager model, Mohr–Coulomb model, Cam-clay model, anisotropic plasticity model, etc.

- 各種の硬化則：非硬化, 等方硬化, 移動硬化

Various hardening rules: non-hardening, isotropic hardening, kinematic hardening

- 様々な塑性モデル：どこが同じで, どこが異なる？

Various plasticity models: What is the same, and what is the difference?

● いくつかの非弾性モデル Several inelastic models

- 粘塑性

Viscoplasticity

- 連続体損傷モデル

Continuum damage model

さまざまな弾塑性モデルがあるが・・・

どこが共通で、どこが異なるのか？

- 1 ひずみの弾塑性分解： $\boldsymbol{\varepsilon} = \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon}^e}_{\text{弾性ひずみ}} + \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon}^p}_{\text{塑性ひずみ}}$
(加算分解) かなり特殊な弾塑性モデルを除いて
共通
- 2 弾性構成則： $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e$
(ここでは線形弾性を仮定) だいたい共通
非線形弾性構成則を用いることもある
- 3 降伏関数： $\underbrace{\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{A})}_{\text{テンソル変数}} = \boxed{\text{具体例は後述}} \leq 0$ モデルごとに異なる
- 4 塑性流れ則： $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \underbrace{\dot{\gamma}}_{\text{大きさ}} \underbrace{\boldsymbol{N}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{A})}_{\text{方向 (テンソル)}}$ 3 と連動して異なる
ただし、塑性流れ則の形式そのものは共通。
また、“関連”/“非関連”の塑性流れ則がある。
- 5 硬化則： $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha})$, $\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \underbrace{\dot{\gamma}}_{\text{大きさ}} \underbrace{\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{A})}_{\text{方向 (テンソル)}}$ モデルごとに異なる
硬化変数 $\boldsymbol{\alpha}$ と $\boldsymbol{A}$ を関係づける構成則
& の発展則
- 6 負荷／除荷条件： $\Phi \leq 0, \dot{\gamma} \geq 0, \dot{\gamma} \Phi = 0$ 共通

各種の塑性モデル：硬化則

Various plasticity models: Hardening rule

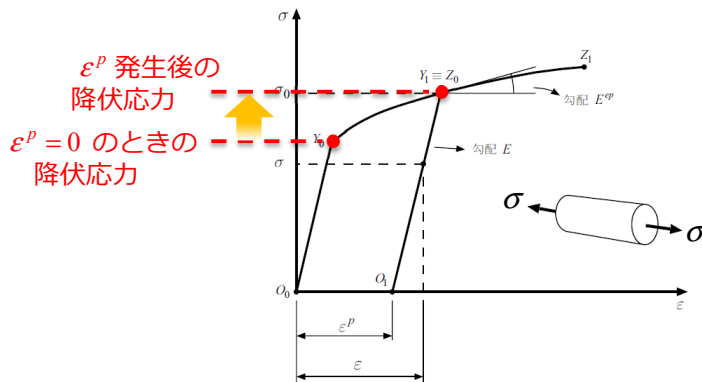


図 6.2 1 軸引張試験における数値モデル

1次元構成則における硬化則を議論した際には、**等方硬化則** を考えた。

● **等方硬化則**では：

引張変形によって硬化（降伏応力が上昇）

このとき圧縮側でも同じだけ硬化（降伏応力の上昇）が生じる，と考える。

塑性変形によって、
弾性域は引張側・圧縮側ともに
同じだけ拡大すると考える。

しかし、実際の材料挙動を再現するには
等方硬化則では十分でないことが多い！

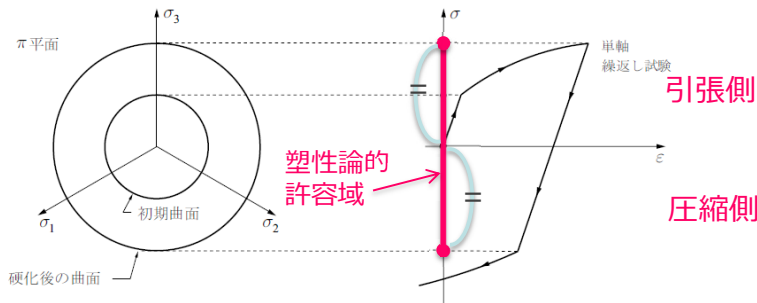


図 6.22 等方硬化（ π 平面表示と 1 軸試験）

各種の塑性モデル：硬化則

Various plasticity models: Hardening rule

● 完全塑性（非硬化） Perfect plasticity (non-hardening)

降伏応力が塑性変形によらず一定で、
硬化しない。

降伏曲面の位置・形状・大きさは**不変**。

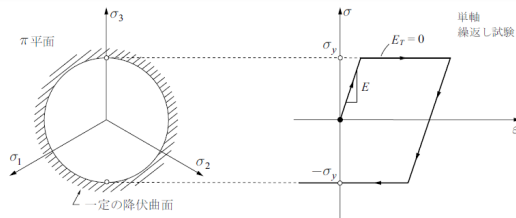


図 6.21 完全塑性（π 平面表示と 1 軸試験）

● 等方硬化則 Isotropic hardening rule

塑性変形によって、どの方向にも等しく
硬化する。

降伏曲面の中心位置が移動せず、
形状を保ちつつ**等方的に拡大する**。

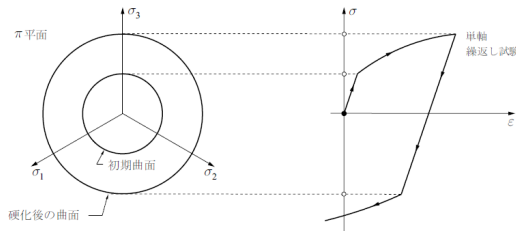


図 6.22 等方硬化（π 平面表示と 1 軸試験）

● 移動硬化則 Kinematic hardening rule

ある方向への塑性変形によって、その方向の降
伏応力は上昇（硬化）するが、反対方向の降伏
応力が低下する：**Bauschinger効果**

降伏曲面の**中心位置が移動する**。

等方硬化と組み合わせた「複合硬化モデル」もある。

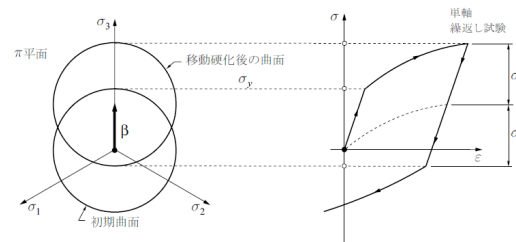


図 6.24 移動硬化と“Bauschinger 硬化”（π 平面表示と 1 軸試験：一度ある方向に負荷すると反対方向の負荷において変形抵抗が低下する）

各種の塑性モデル：硬化則 — 完全塑性（非硬化）

Various plasticity models: Hardening rule – Perfect plasticity (non-hardening)

● 完全塑性（非硬化）

降伏応力が塑性変形によらず一定で、
硬化しない。

降伏曲面の位置・形状・大きさは**不変**。



例：von Misesモデルなら、

$$\text{降伏関数： } \Phi(\sigma, \sigma_y) \equiv q - \sigma_y$$

ここで、降伏応力 σ_y は**一定（定数）**

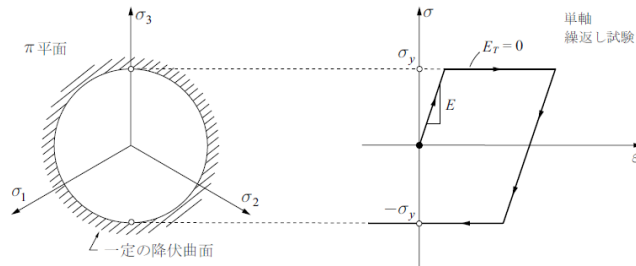


図 6.21 完全塑性（ π 平面表示と 1 軸試験）

各種の塑性モデル：硬化則 — 等方硬化則

Various plasticity models: Hardening rule – Isotropic hardening rule

● 等方硬化則

塑性変形によって、どの方向にも等しく硬化する。

降伏曲面の中心位置が移動せず、
形状を保ちつつ等方的に拡大する。



例：von Misesモデルなら、

降伏関数： $\Phi(\sigma, \sigma_y) \equiv q - \sigma_y$

└─┘
降伏応力（スカラー）

硬化則： $\sigma_y = \sigma_y(\bar{\epsilon}^p)$

ここで、von Misesの 相当塑性ひずみ（累積塑性ひずみ）を
equivalent plastic strain (accumulated plastic strain)

$$\bar{\epsilon}^p \equiv \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3}} \|\dot{\epsilon}^p\| dt$$

└─┘

① 1次元構成則で用いた「軸方向累積塑性ひずみ」を3次元に拡張したもの。

塑性ひずみ速度テンソルのノルム（大きさ）

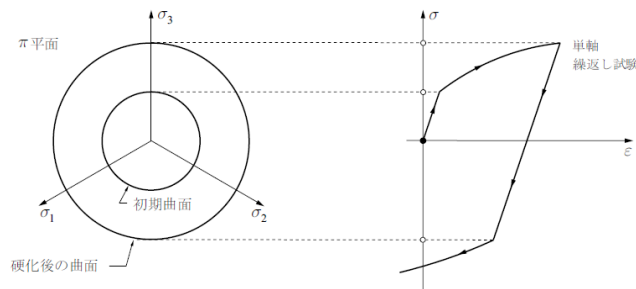


図 6.22 等方硬化（ π 平面表示と 1 軸試験）

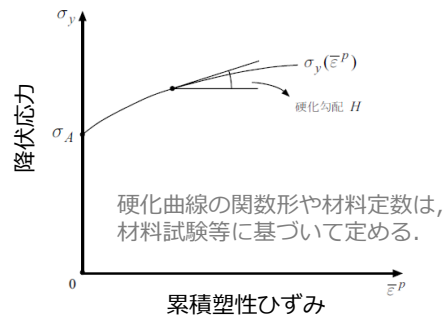


図 6.4 1次元モデルにおける硬化曲線

各種の塑性モデル：硬化則 — 移動硬化則

Various plasticity models: Hardening rule – Kinematic hardening rule

● 移動硬化則

ある方向への塑性変形によって、その方向の降伏応力は上昇（硬化）するが、反対方向の降伏応力が低下する：

Bauschinger効果

降伏曲面の中心位置を移動させることにより表現する。

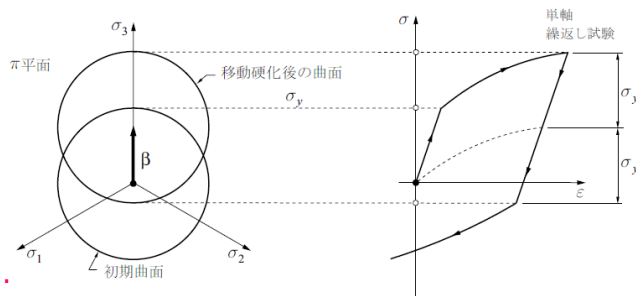


図 6.24 移動硬化と“Bauschinger 硬化”（ π 平面表示と 1 軸試験：一度ある方向に負荷すると反対方向の負荷において変形抵抗が低下する）

例：von Misesモデルなら、

$$\text{降伏関数： } \Phi(\sigma, \sigma_y, \beta) \equiv q(\eta) - \sigma_y$$

背応力
テンソル

相対応力
テンソル

☞ 降伏曲面の中心移動を表現するために
相対応力テンソルを定義： $\eta \equiv \sigma - \beta$

$$q(\eta) := \sqrt{3/2} \|\eta_{\text{dev}}\|$$

$$= \sqrt{3/2} \|(\sigma - \beta)_{\text{dev}}\|$$

等方硬化則の式を σ_y に適用すれば、複合硬化則になる。

σ から β を引き算すれば
その分だけ中心が移動する。

➡ 塑性変形の進行に伴って β がどのように変化するかを定める発展則が必要。

● Pragerの線形移動硬化則： $\dot{\beta} = \frac{2}{3} H \dot{\epsilon}^p$ （ H は線形移動硬化係数）

● Armstrong-Frederickの非線形移動硬化則： $\dot{\beta} = \frac{2}{3} H \dot{\epsilon}^p - \dot{\gamma} b \beta$ ☞ 第2項は移動硬化を飽和させる働き（ b は定数）

● 移動硬化則（つづき）

- Pragerの線形移動硬化則： $\dot{\beta} = \frac{2}{3} H \dot{\epsilon}^p$ （ H は線形移動硬化係数）
- Armstrong-Frederickの非線形移動硬化則： $\dot{\beta} = \frac{2}{3} H \dot{\epsilon}^p - \gamma b \beta$ 第2項は移動硬化を飽和させる働き（ b は定数）

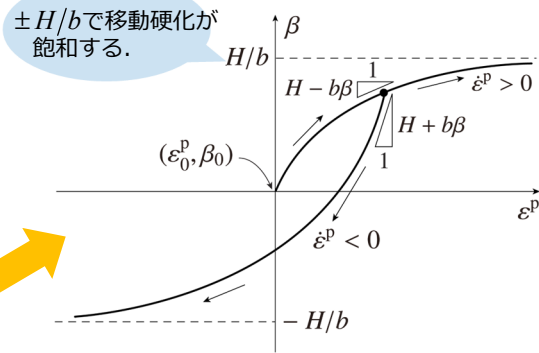
1次元の場合： $\dot{\beta} = H \dot{\epsilon}^p - |\dot{\epsilon}^p| b \beta = (H \mp b \beta) \dot{\epsilon}^p$ 解析的に積分できる！

$$\leadsto \frac{1}{H \mp b \beta} \frac{d\beta}{dt} = \frac{d\epsilon^p}{dt} \leadsto \int_{\beta_0}^{\beta} \frac{d\beta}{H \mp b \beta} = \int_{\epsilon_0^p}^{\epsilon^p} d\epsilon^p \leadsto \mp \frac{1}{b} \log \frac{H \mp b \beta}{H \mp b \beta_0} = \epsilon^p - \epsilon_0^p$$

$$\therefore \beta = \pm \frac{1}{b} \left\{ H - (H \mp b \beta_0) \exp[\mp b(\epsilon^p - \epsilon_0^p)] \right\}$$

導関数は $\frac{d\beta}{d\epsilon^p} = H \mp b \beta$
（グラフの傾き）

グラフを描いてみると、



各種の塑性モデル：硬化則 — 移動硬化則

Various plasticity models: Hardening rule – Kinematic hardening rule

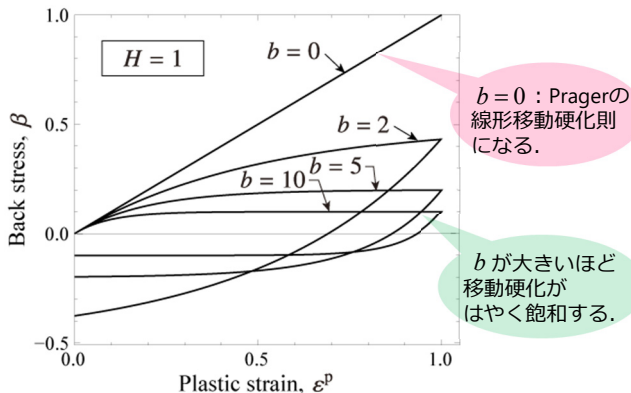
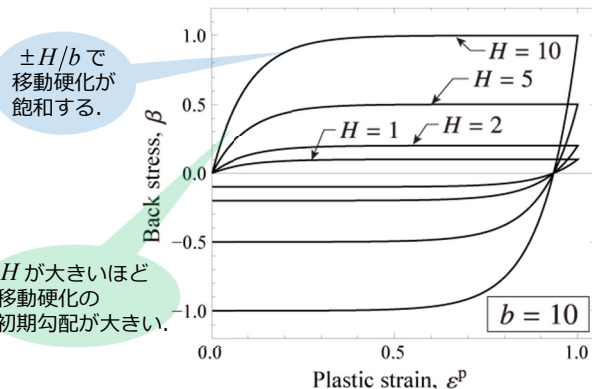
● 移動硬化則（つづき）

● Armstrong–Frederickの非線形移動硬化則（1次元の場合）：

$$\beta = \pm \frac{1}{b} \left\{ H - (H \mp b\beta_0) \exp[\mp b(\varepsilon^p - \varepsilon_0^p)] \right\} \longrightarrow \beta|_{\varepsilon^p = \varepsilon_0^p} = \beta_0, \quad \lim_{\varepsilon^p \rightarrow \pm\infty} \beta = \pm \frac{H}{b}$$

導関数は (グラフの傾き) $\frac{d\beta}{d\varepsilon^p} = H \mp b\beta \longrightarrow \frac{d\beta}{d\varepsilon^p} \Big|_{\substack{\varepsilon^p = \varepsilon_0^p \\ \beta_0 = 0}} = H, \quad \lim_{\varepsilon^p \rightarrow \pm\infty} \frac{d\beta}{d\varepsilon^p} = 0$ 👉 移動硬化の飽和

● 計算例



講義スライド中の図の一部（図番号が付いているもの）は下記の参考書籍から引用しております。
寺田賢二郎 監訳：非線形有限要素法—弾塑性解析の理論と実践，森北出版，2012. [ISBN: 978-4627920217]

Some of the figures in this lecture slides (those with figure numbers) are quoted from the following reference book:
E. A. de Souza Neto, D. Perić, D. R. J. Owen (2008)
Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications, Wiley, [ISBN: 978-0470694527]
(Japanese translation) K. Terada, ed. (2012) Morikita Publishing, [ISBN: 978-4627920217]

● 固体材料・構造の非線形有限要素法

— 前回の復習：力学問題の全体像を俯瞰

● 弾塑性構成則

— 応力～ひずみ挙動の現象論的観察

— 1次元モデルの定式化から出発

— 3次元モデルへの一般化

— 各種の塑性モデル：どこが共通？ どこが異なる？

● 弾粘塑性構成則

— ひずみ速度依存性，クリープ，リラクゼーションの表現

● 非線形有限要素法への導入

— 材料構成則の役割と位置づけ

粘性とは？

What is viscosity?

粘性 — 物質の“ねばり”の度合い
Viscosity Rate-dependent resistance of a material to deformation

材料の力学的性質が
 Material property dependent on

{ **変形速度**
 Deformation rate
経過時間
 Elapsed time }

に依存

はやい変形とゆっくりした変形で
 抵抗力が異なる。

Resistance differs between rapid/slow deformations.

時間の経過に伴って変形が進行したり、
 応力が緩和したりするなど。

Progress of deformation and relaxation of stress
 along with elapsed time.

- 弾性的性質がこれらに依存
 Elastic property depends on the above factors → **粘弾性 (viscoelasticity)**
- 塑性的性質がこれらに依存
 Plastic property depends on the above factors → **粘塑性 (viscoplasticity)**

この授業で扱う This lecture deals with

弾粘塑性 (elasto-viscoplasticity) :

“弾性 + 粘塑性” のこと (elasticity + viscoplasticity)

変形速度や経過時間に対して、
 Deformation rate and/or elapsed time

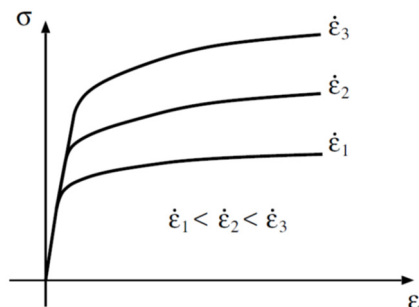
弾性は非依存

Elasticity is independent on...

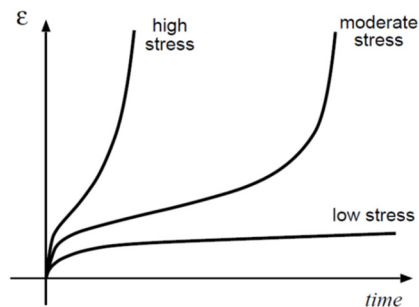
塑性は依存

Plasticity is dependent on...

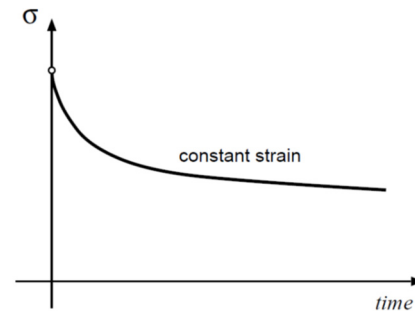
● 典型的な粘塑性挙動 Typical viscoplastic behaviors



(a) ひずみ速度に依存した応力応答
Strain-rate dependence of stress response



(b) 一定応力でのクリープひずみ
Creeping at constant stress



(c) 一定ひずみでの応力緩和
Stress relaxation at constant strain

弾塑性モデル (= 速度非依存) はこれらの挙動を表現できない。☹️
Elasto-plastic model (= rate-independent) cannot represent these behaviors.

➡️ 速度依存型モデルが必要。😊
Rate-dependent model is required.

弾塑性モデル vs 弾粘塑性モデル

Elasto-plasticity vs Elasto-viscoplasticity

● 弾性 + 速度非依存の塑性 → 弾塑性
Elasticity + Rate-independent plasticity → Elasto-plasticity

☞ “変形” とその “履歴” に応じた “応力” を与えるモデル. “変形速度” や “時間経過” に依存しない.
A model that gives “stress” corresponding to “deformation” and its “history,” not dependent on “deformation rate” or “elapsed time.”

塑性流れ則 : $\dot{\epsilon}^p = \dot{\gamma} \text{sign}(\sigma)$, $\dot{\gamma} = \frac{E}{E + H} \text{sign}(\sigma) \dot{\epsilon}$
Plastic flow rule

左例) 線形弾性 + 線形硬化の
1次元弾塑性モデル

Ex.) 1D elasto-plastic model with
linear elasticity + linear hardening

● 弾性 + 速度依存の塑性 → 弾粘塑性
Elasticity + Rate-dependent plasticity → Elasto-viscoplasticity

☞ “変形” とその “履歴” だけでなく, “変形速度” と “時間経過” にも応じた “応力” を与えるモデル.
A model that gives “stress” corresponding to “deformation” and its “history,” as well as to “rate of deformation” and “elapsed time.”

粘塑性流れ則 : $\dot{\epsilon}^p = \dot{\gamma} \text{sign}(\sigma)$, $\dot{\gamma} = \frac{1}{\mu} \left[\left(\frac{|\sigma|}{\sigma_y} \right)^{1/\epsilon} - 1 \right]$
Viscoplastic flow rule

左例) Perić (1993) による
1次元弾粘塑性モデル

Ex.) 1D elasto-viscoplastic model by
Perić (1993)

ここで, μ は粘性に関する定数 (時間の次元をもつ), ϵ は速度感度に関する無次元の定数.

μ is a material constant related to viscosity (having the dimension of time); ϵ is a dimensionless constant related to rate sensitivity.

弾塑性モデル vs 弾粘塑性モデル

Elasto-plasticity vs Elasto-viscoplasticity

● 弾性 + 速度非依存の塑性 → 弾塑性
Elasticity + Rate-independent plasticity → Elasto-plasticity

☞ “変形” とその “履歴” に応じた “応力” を与えるモデル. “変形速度” や “時間経過” に依存しない.
A model that gives “stress” corresponding to “deformation” and its “history,” not dependent on “deformation rate” or “elapsed time.”

塑性流れ則 : $\dot{\varepsilon}^p = \dot{\gamma} \text{sign}(\sigma)$, $\dot{\gamma} = \frac{E}{E + H} \text{sign}(\sigma) \dot{\varepsilon}$
Plastic flow rule

左例) 線形弾性 + 線形硬化の
1次元弾塑性モデル

Ex.) 1D elasto-plastic model with
linear elasticity + linear hardening

これら “速度” は
疑似時間パラメータに関する微分係数.

These “rates” mean the differential
coefficients with respect to the
pseudo-time parameter.

はやい変形 / ゆっくりした変形を表すものではない.
They do not represent rapid/slow deformation.

ここで用いている “時間” は、現実の時間ではなく、
負荷プロセスの履歴を規定する事象の順序を表すため
だけに用いられる “疑似時間パラメータ” に過ぎない.

“Time” used here is merely a “*pseudo-time parameter*”
solely to describe the sequence of events that defines the
history of load process, rather than actual time.

弾塑性モデル vs 弾粘塑性モデル

Elasto-plasticity vs Elasto-viscoplasticity

本来の“変形速度”の意味をもつ。
変形速度が大きい値であれば“はやい変形”を、
小さい値であれば“ゆっくりとした変形”を表す。

They have the original meaning of “deformation rate.”
A large value indicates a high strain rate, i.e. “rapid deformation,”
while a small value indicates a low strain rate, i.e. “slow deformation.”

これら“速度”は
実際の時間に関する微分係数。

These “rates” mean the differential
coefficients with respect to the actual time.

● 弾性 + 速度依存の塑性 → 弾粘塑性
Elasticity + Rate-dependent plasticity Elasto-viscoplasticity

☞ “変形”とその“履歴”だけでなく、“変形速度”と“時間経過”にも応じた“応力”を与えるモデル。

A model that gives “stress” corresponding to “deformation” and its “history,” as well as to “rate of deformation” and “elapsed time.”

粘塑性流れ則： $\dot{\epsilon}^p = \dot{\gamma} \text{sign}(\sigma)$, $\dot{\gamma} = \frac{1}{\mu} \left[\left(\frac{|\sigma|}{\sigma_y} \right)^{1/\epsilon} - 1 \right]$

Viscoplastic flow rule

左例) Perić (1993) による
1次元弾粘塑性モデル

Ex.) 1D elasto-viscoplastic model by
Perić (1993)

ここで, μ は粘性に関する定数（時間の次元をもつ）, ϵ は速度感度に関する無次元の定数。

μ is a material constant related to viscosity (having the dimension of time); ϵ is a dimensionless constant related to rate sensitivity.

弾塑性モデル vs 弾粘塑性モデル

Elasto-plasticity vs Elasto-viscoplasticity

78

1次元弾塑性モデル 1D elastoplastic model

① ひずみの弾塑性分解

(加算分解)

Additive decomposition of strain

② 弾性構成則

Elasticity constitutive law

(ここでは等方線形弾性を仮定)

(Isotropic linear elasticity is employed here.)

③ 降伏関数

Yield function

④ 塑性流れ則

Plastic flow rule

⑤ 硬化則

Hardening rule

硬化変数を関係づける構成則との発展則

⑥ 負荷／除荷条件

Loading/unloading criterion

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$$

$$\sigma = E\varepsilon^e$$

$$\Phi(\sigma, \sigma_y) := |\sigma| - \sigma_y \leq 0$$

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\gamma} \operatorname{sign}(\sigma), \quad \dot{\gamma} = \frac{E}{E+H} \operatorname{sign}(\sigma) \dot{\varepsilon}$$

$$\sigma_y = \sigma_y(\bar{\varepsilon}^p), \quad \dot{\bar{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma}$$

$$\Phi \leq 0, \quad \dot{\gamma} \geq 0, \quad \dot{\gamma} \Phi = 0$$

1次元弾粘塑性モデル 1D elasto-viscoplastic model

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$$

$$\sigma = E\varepsilon^e$$

$$\Phi(\sigma, \sigma_y) := |\sigma| - \sigma_y$$

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\gamma} \operatorname{sign}(\sigma), \quad \dot{\gamma} = \begin{cases} \frac{1}{\mu} \left[\left(\frac{|\sigma|}{\sigma_y} \right)^{1/\epsilon} - 1 \right] & \text{for } \Phi \geq 0 \\ 0 & \text{for } \Phi < 0 \end{cases}$$

$$\sigma_y = \sigma_y(\bar{\varepsilon}^p), \quad \dot{\bar{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma}$$

なし

$\Phi \geq 0$ のときのみ
粘塑性応答を示す。
それ以外は弾性応答。

これは Perić (1993) の形式。
他にも様々な形式がある (後述)。

● 粘塑性乗数 Viscoplastic multiplier

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{\mu} \left[\left(\frac{|\sigma|}{\sigma_y} \right)^{1/\epsilon} - 1 \right] \quad \text{for } \Phi \geq 0 \quad \text{Perić (1993) の形式}$$

where $\Phi(\sigma, \sigma_y) := |\sigma| - \sigma_y$

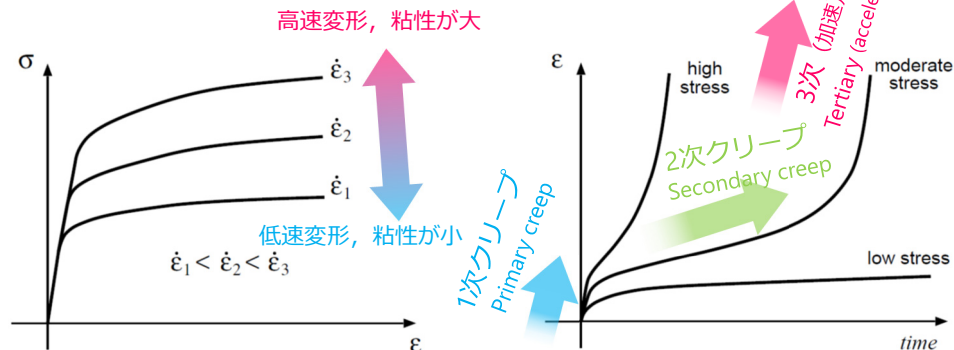
“超過応力”
“over-stress” という

- 応力の絶対値 $|\sigma|$ が降伏応力 σ_y よりも大きいほど, $\dot{\gamma}$ が大きく $\rightarrow$ 粘塑性ひずみの進行が大きくなる.
 - 粘性パラメータ μ が大きいほど,
 - 速度感度パラメータ ϵ が大きいほど, $\left. \begin{array}{l} \text{ } \end{array} \right\} \rightarrow \dot{\gamma}$ が小さく $\rightarrow$ 粘塑性ひずみの進行が小さくなる.
- $\rightarrow$ ひずみ速度依存性が強くなる.

【補足】材料定数 μ, ϵ は温度依存性を有することが多い. 温度が上昇するほどこれらの値は大きく, 温度が降下するほど値は小さくなる.

($\Phi < 0$, すなわち $|\sigma| < \sigma_y$ のときは $\dot{\gamma} = 0$. つまり粘塑性ひずみは進行しない.)

● 典型的な粘塑性挙動 ※ 詳細は付録Bを参照



(a) ひずみ速度に依存した応力応答

Strain-rate dependence of stress response

はやい変形ほど大きな応力応答を示す。

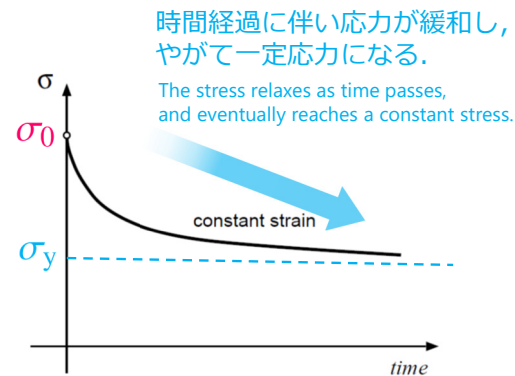
The faster the deformation, the greater the stress response.

(b) 一定応力でのクリープひずみ

Creeping at constant stress

ある応力を与えたあと、一定応力で保持すると、時間経過に伴って粘塑性ひずみが進行する。

When a certain stress is applied and then held at a constant level, viscoelastic strain evolves over time.



(c) 一定ひずみでの応力緩和

Stress relaxation at constant strain

あるひずみを与えたあと、一定ひずみで保持すると、時間経過に伴って応力が緩和し、やがて一定応力になる。

After applying a certain amount of strain and holding it at that level, the stress relaxes over time and eventually reaches a constant value.

さまざまな粘塑性モデル (粘塑性流れ則)

Various viscoplasticity models (Viscoplastic flow rules)

● **Bingham モデル** : $\dot{\gamma} = \frac{1}{\eta} \Phi(\sigma, \sigma_y) = \frac{1}{\eta} (|\sigma| - \sigma_y) \quad \text{for } \Phi \geq 0$
 Bingham (1916, 1922)

● **Perzyna モデル** : $\dot{\gamma} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{|\sigma|}{\sigma_y} - 1 \right)^{1/\epsilon} \quad \text{for } \Phi \geq 0$
 Perzyna (1966, 1971)

● **Perić モデル** : $\dot{\gamma} = \frac{1}{\mu} \left[\left(\frac{|\sigma|}{\sigma_y} \right)^{1/\epsilon} - 1 \right] \quad \text{for } \Phi \geq 0$
 Perić (1993)

● **Norton モデル** : $\dot{\gamma} = \left(\frac{|\sigma|}{\lambda} \right)^N \quad \Rightarrow \text{弾性領域と降伏面をもたないモデル}$

● **Lemaitre–Chaboche モデル** : $\dot{\gamma} = \left(\frac{|\sigma|}{\lambda} \right)^N \exp[\alpha |\sigma|^{N+1}] \quad \Rightarrow \text{弾性領域と降伏面をもたないモデル}$
 Lemaitre and Chaboche (1990)

上記のほかにも, さまざまな形式の粘塑性モデルがある.

さまざまな粘塑性モデル (粘塑性流れ則)

Various viscoplasticity models (Viscoplastic flow rules)

● Bingham モデル : $\dot{\gamma} = \frac{1}{\eta} \Phi(\sigma, \sigma_y) = \frac{1}{\eta} (|\sigma| - \sigma_y) \quad \text{for } \Phi \geq 0$
Bingham (1916, 1922)

● Perzyna モデル : $\dot{\gamma} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{|\sigma|}{\sigma_y} - 1 \right)^{1/\epsilon} \quad \text{for } \Phi \geq 0$
Perzyna (1966, 1971)

● Perić モデル : $\dot{\gamma} = \frac{1}{\mu} \left[\left(\frac{|\sigma|}{\sigma_y} \right)^{1/\epsilon} - 1 \right] \quad \text{for } \Phi \geq 0$
Perić (1993)

粘塑性に関するパラメータ
 μ, ϵ を様々な値にして計算した
例を以降に示す.

繰返し変形に対応できるように拡張した
「下負荷面超過応力モデル」を用いた計算結果.

● Norton モデル : $\dot{\gamma} = \left(\frac{|\sigma|}{\lambda} \right)^N$ ☞ 弾性領域と降伏面をもたないモデル

● Lemaitre–Chaboche モデル : $\dot{\gamma} = \left(\frac{|\sigma|}{\lambda} \right)^N \exp[\alpha |\sigma|^{N+1}]$ ☞ 弾性領域と降伏面をもたないモデル
Lemaitre and Chaboche (1990)

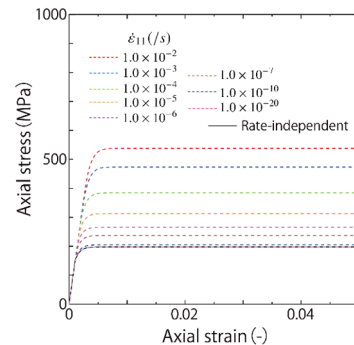
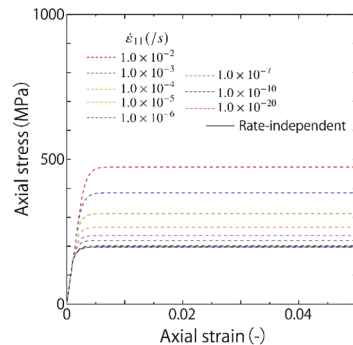
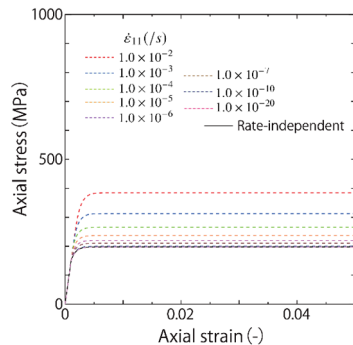
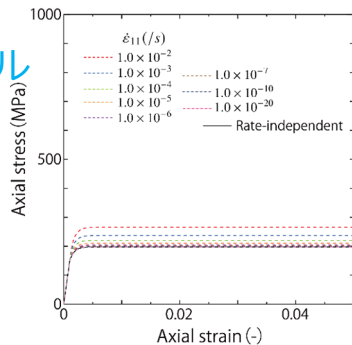
上記のほかにも, さまざまな形式の粘塑性モデルがある.

粘塑性流れ則に関する検討： 粘性パラメータ μ の影響

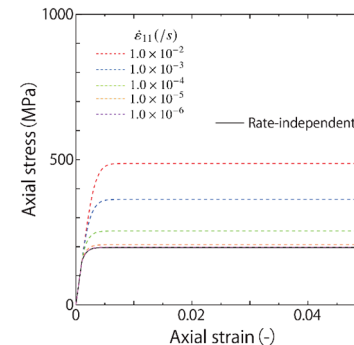
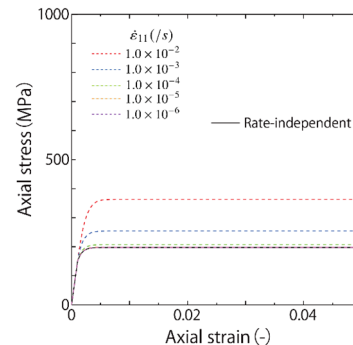
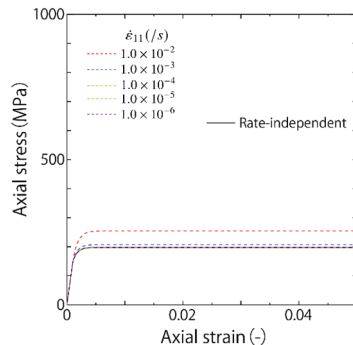
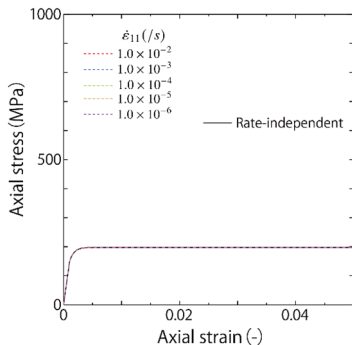
$1/\epsilon = 4.05$ を固定して計算。

橋口公一 監修：下負荷面モデルによる合理的弾塑性設計，近代科学社Digital, 2026年8月刊行 (ISBN: 978-4764907942), 第8.6節。

上段：
Perzyna モデル



下段：
Perić モデル



$\mu = 2.96$ s

$\mu = 296$ s

$\mu = 2960$ s

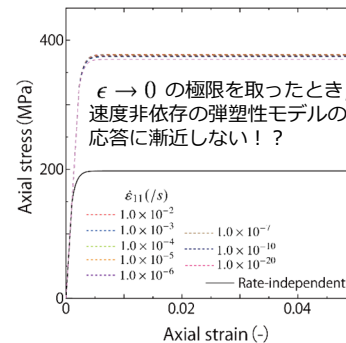
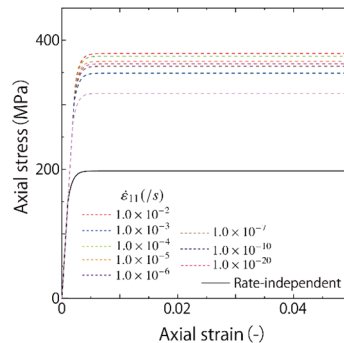
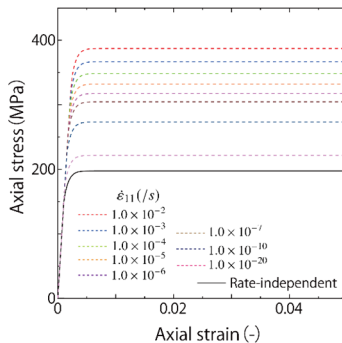
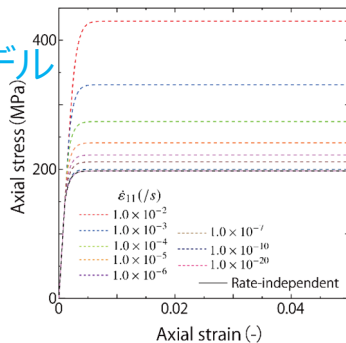
$\mu = 29600$ s

粘塑性流れ則に関する検討：速度感度パラメータ ϵ の影響

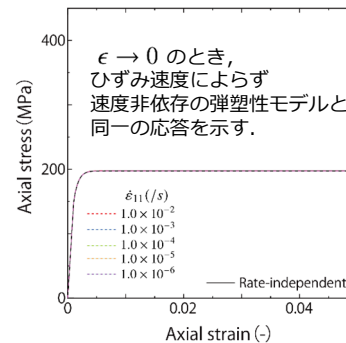
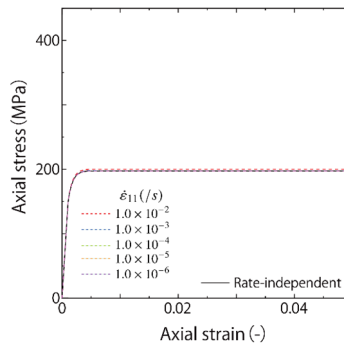
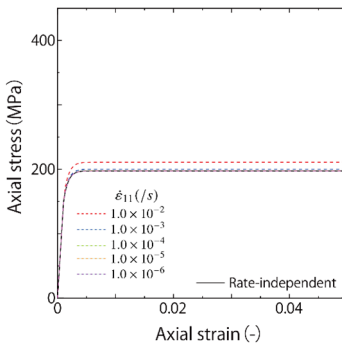
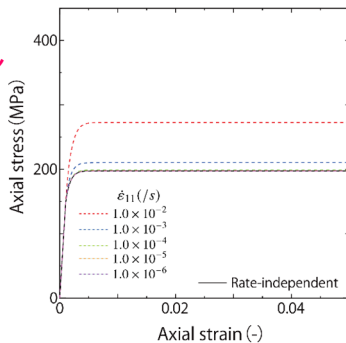
$\mu = 296 \text{ s}$ を固定して計算。

橋口公一 監修：下負荷面モデルによる合理的弾塑性設計，近代科学社Digital, 2026年8月刊行 (ISBN: 978-4764907942), 第8.6節。

上段：
Perzyna モデル



下段：
Perić モデル



$1/\epsilon = 4.05$

$1/\epsilon = 20$

$1/\epsilon = 100$

$1/\epsilon = 1000$

講義スライド中の図の一部（図番号が付いているもの）は下記の参考書籍から引用しております。
寺田賢二郎 監訳：非線形有限要素法—弾塑性解析の理論と実践，森北出版，2012. [ISBN: 978-4627920217]

Some of the figures in this lecture slides (those with figure numbers) are quoted from the following reference book:
E. A. de Souza Neto, D. Perić, D. R. J. Owen (2008)
Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications, Wiley, [ISBN: 978-0470694527]
(Japanese translation) K. Terada, ed. (2012) Morikita Publishing, [ISBN: 978-4627920217]

● 固体材料・構造の非線形有限要素法

— 前回の復習：力学問題の全体像を俯瞰

● 弾塑性構成則

— 応力～ひずみ挙動の現象論的観察

— 1次元モデルの定式化から出発

— 3次元モデルへの一般化

— 各種の塑性モデル：どこが共通？ どこが異なる？

● 弾粘塑性構成則

— ひずみ速度依存性，クリープ，リラクゼーションの表現

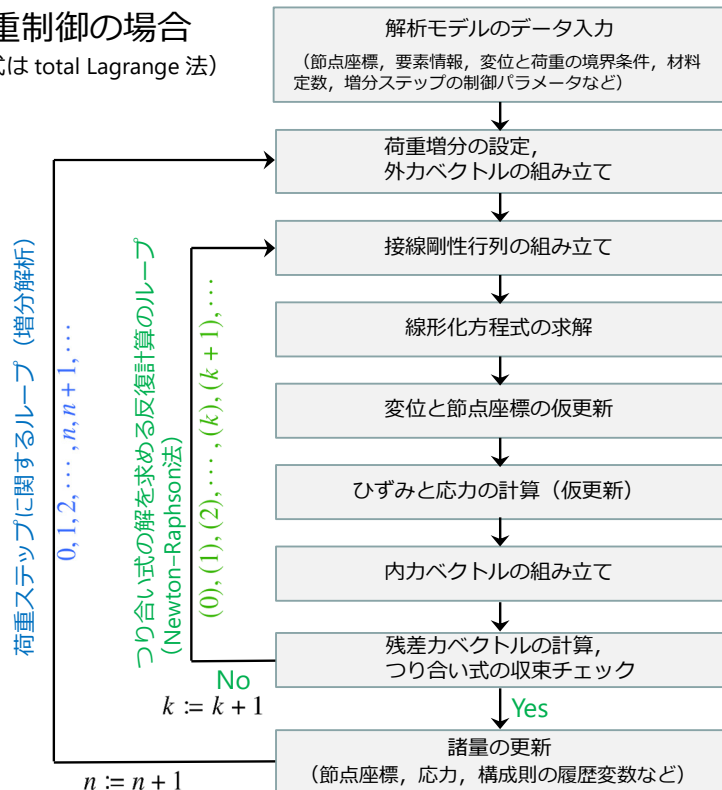
● 非線形有限要素法への導入

— 材料構成則の役割と位置づけ

非線形有限要素解析の全体フロー

荷重制御の場合

(計算式は total Lagrange 法)



【注意】ここでは幾何学的非線形性を考慮した有限変形解析で用いられる諸式を示しています。詳しくは第4回の講義で。

Assemble $\mathbf{F}_{\text{ext},n+1}$

Assemble $\mathbf{K}_{n+1}^{(k)}$

Solve $\mathbf{K}_{n+1}^{(k)} \delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k)} = -\mathbf{R}_{n+1}^{(k)}$ to compute corrector $\delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k)}$

Update $\Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k+1)} := \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k)} + \delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k)}$; $\mathbf{u}_{n+1}^{(k+1)} := \mathbf{u}_n + \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k+1)}$; and $\mathbf{x}_{n+1}^{(k+1)} := \mathbf{x}_n + \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k+1)} = \mathbf{X} + \mathbf{u}_{n+1}^{(k+1)}$

Compute $\mathbf{F} := \sum_{a=1}^{n_{\text{node}}^{\text{elem}}} \mathbf{x}_a \otimes (\partial N_a / \partial \mathbf{X}) \rightsquigarrow \mathbf{E} := (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I})/2$, and then, compute stress $\mathbf{S} := \mathcal{F}(\mathbf{E})$ via constitutive model

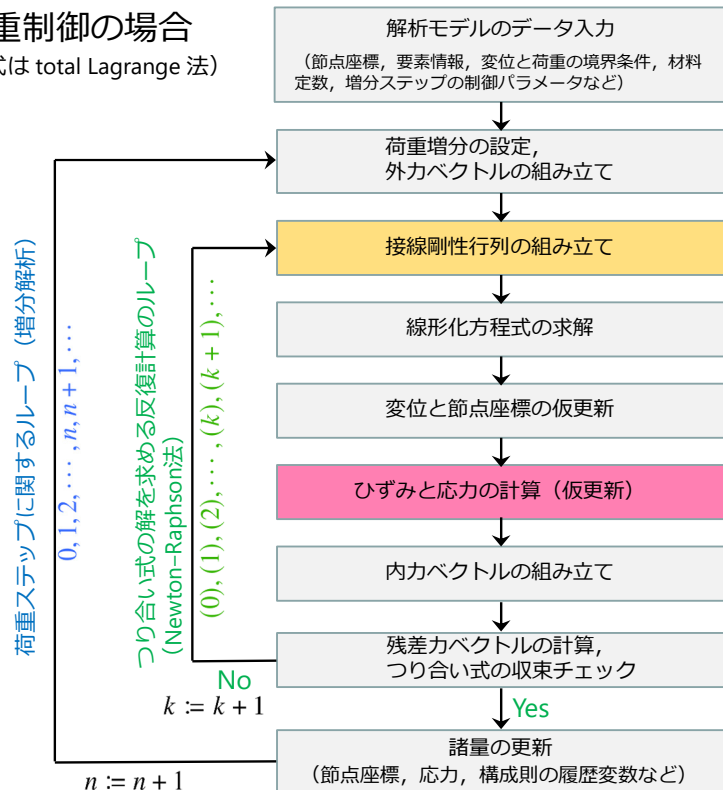
Assemble $\mathbf{F}_{\text{int},n+1}^{(k+1)}$

Compute $\mathbf{R}_{n+1}^{(k+1)} := \mathbf{F}_{\text{int},n+1}^{(k+1)} - \mathbf{F}_{\text{ext},n+1}$, and check convergence by $\|\mathbf{R}_{n+1}^{(k+1)}\| \stackrel{?}{<} \text{TOL}$

Update $(\bullet)_{n+1} := (\bullet)_{n+1}^{(k+1)}$

有限要素解析における構成則の役割

荷重制御の場合
(計算式は total Lagrange 法)



材料構成則に関わるのは, 全体フロー内の2箇所だけ!

Assemble $\mathbf{F}_{\text{ext},n+1}$

Assemble $\mathbf{K}_{n+1}^{(k)}$

Solve $\mathbf{K}_{n+1}^{(k)} \delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k)} = -\mathbf{R}_{n+1}^{(k)}$ to compute corrector $\delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k)}$

Update $\Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k+1)} := \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k)} + \delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k)}$; $\mathbf{u}_{n+1}^{(k+1)} := \mathbf{u}_n + \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k+1)}$; and
 $\mathbf{x}_{n+1}^{(k+1)} := \mathbf{x}_n + \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k+1)} = \mathbf{X} + \mathbf{u}_{n+1}^{(k+1)}$

Compute $\mathbf{F} := \sum_{a=1}^{n_{\text{node}}^{\text{elem}}} \mathbf{x}_a \otimes (\partial N_a / \partial \mathbf{X}) \rightsquigarrow \mathbf{E} := (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I})/2$,
and then, compute stress $\mathbf{S} := \mathcal{F}(\mathbf{E})$ via constitutive model

Assemble $\mathbf{F}_{\text{int},n+1}^{(k+1)}$

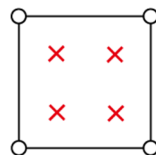
Compute $\mathbf{R}_{n+1}^{(k+1)} := \mathbf{F}_{\text{int},n+1}^{(k+1)} - \mathbf{F}_{\text{ext},n+1}$, and
check convergence by $\|\mathbf{R}_{n+1}^{(k+1)}\| \stackrel{?}{<} \text{TOL}$

Update $(\bullet)_{n+1} := (\bullet)_{n+1}^{(k+1)}$

$$[\mathbf{K}_{\text{mat},ab}^{(e)}]_{ij} = \int_{V^{(e)}} \sum_{K,L=1}^3 F_{ii} \frac{\partial N_a}{\partial X_K} C_{IKJL} F_{jj} \frac{\partial N_b}{\partial X_L} dV$$

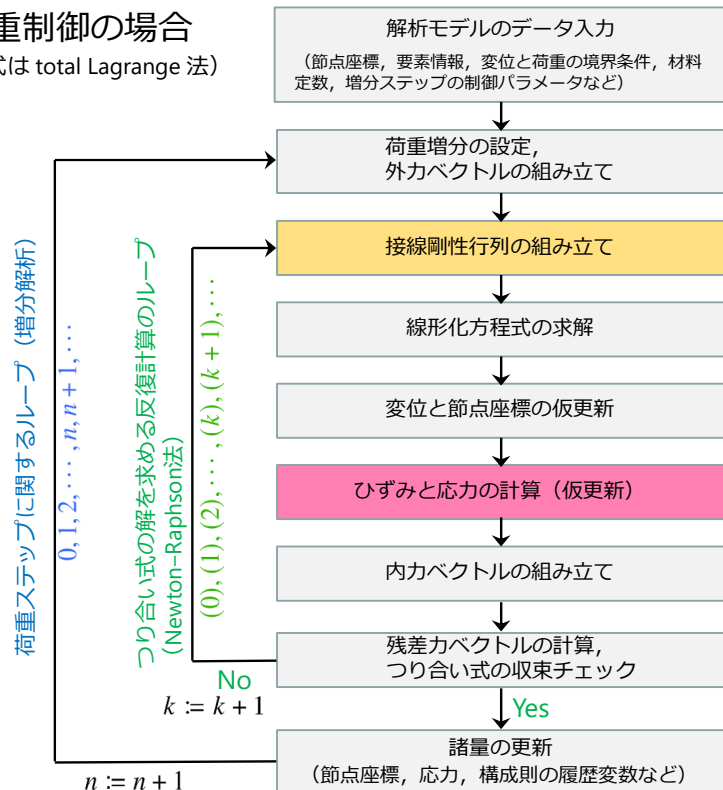
$$[\mathbf{K}_{\text{geo},ab}^{(e)}]_{ij} = \int_{V^{(e)}} \sum_{K,L=1}^3 \frac{\partial N_a}{\partial X_K} S_{KL} \frac{\partial N_b}{\partial X_L} \delta_{ij} dV$$

各積分点での処理
(Gauss積分点)



有限要素解析における構成則の役割

荷重制御の場合
(計算式は total Lagrange 法)



4階の材料接線係数テンソル

$$\mathbf{C} := \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}}$$

$$[\mathbf{K}_{\text{mat},ab}^{(e)}]_{ij} = \int_{V^{(e)}} \sum_{K,L=1}^3 F_{iI} \frac{\partial N_a}{\partial X_K} C_{IKJL} F_{jJ} \frac{\partial N_b}{\partial X_L} dV$$

$$[\mathbf{K}_{\text{geo},ab}^{(e)}]_{ij} = \int_{V^{(e)}} \sum_{K,L=1}^3 \frac{\partial N_a}{\partial X_K} S_{KL} \frac{\partial N_b}{\partial X_L} \delta_{ij} dV$$

構成則の速度形

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{C} : \dot{\mathbf{E}}$$

超弾性構成則: $\mathbf{S} = \mathcal{F}(\mathbf{E})$

物質時間微分すると,

$$\underbrace{\frac{D\mathbf{S}}{Dt}}_{=:\dot{\mathbf{S}}} = \underbrace{\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}}}_{=:\mathbf{C}} : \underbrace{\frac{D\mathbf{E}}{Dt}}_{=:\dot{\mathbf{E}}}$$

材料構成則に関わるのは、全体フロー内の2箇所だけ!

- 構成則に基づいて、ひずみから応力を計算
- 4階の材料接線係数テンソル

👉 これら2つの処理を同一 or 別々のサブルーチンで

弾（粘）塑性モデルの計算アルゴリズムの必要性

Necessity of numerical algorithm for elasto-(visco)plasticity model

- 構成則の基礎理論
Basic theory of constitutive law
- 解析対象とする材料に適した構成モデル
Constitutive model suitable for a material being analyzed

解析に用いる
構成モデルが決まれば、
すぐに解析ができる...？

Once a constitutive model for analysis is determined,
can the analysis be performed immediately ...?

実際の数値解析はどうする？

How can we actually perform the numerical analysis?



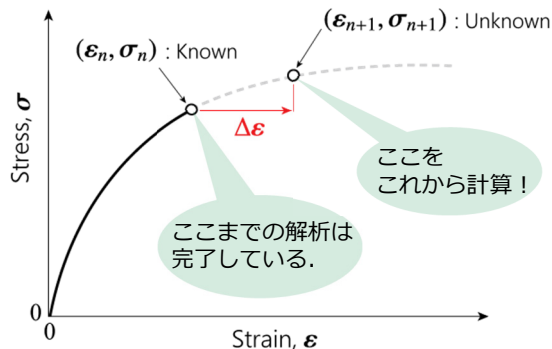
- 適切な計算アルゴリズム
Appropriate numerical algorithm
- プログラム実装（ユーザーサブルーチンなど）
Computer implementation (User subroutines, etc.)

適切な構成モデルと、適切な計算アルゴリズム＆実装がそろって、
はじめて適切な解析が実現できる。

Numerical analysis can be executed properly only when proper numerical algorithm and proper computer implementation are ready.

弾（粘）塑性モデルの計算アルゴリズムの必要性：弾性の場合

Necessity of numerical algorithm for elasto-(visco)plasticity model: **Case of elasticity**



- 第 n ステップ（時刻 t_n に相当）での状態が既知であるとき、第 $n+1$ ステップ（時刻 t_{n+1} に相当）での諸量を求めたい。



このステップ間のひずみ増分 $\Delta\epsilon$ が与えられており、次ステップでのひずみ

$$\epsilon_{n+1} = \epsilon_n + \Delta\epsilon$$

に対応した応力 σ_{n+1} などの諸量を求める計算。

- 弾性構成則 ならば、**応力とひずみの一対一関係がある**ので、
(垂弾性を除く)

垂弾性構成則は速度形なので、応力とひずみの一対一関係は無い。

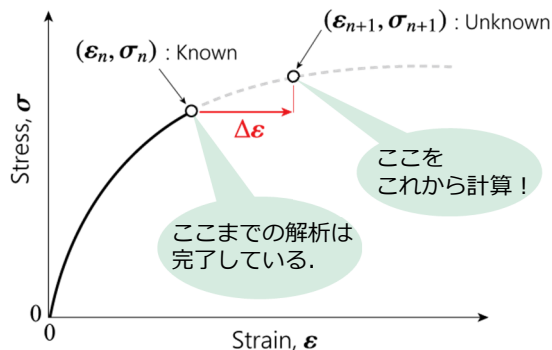
☞ 垂弾性では、ひずみ経路に沿って応力速度を時間積分する必要がある。
(有限変形のパートで詳述)

- 線形弾性ならば、 $\sigma_{n+1} = \mathbf{C} : \epsilon_{n+1}$
- 非線形弾性であっても、時刻 t_{n+1} でのひずみが与えられれば、
応力を $\sigma_{n+1} = \mathcal{F}(\epsilon_{n+1})$ と直接的に計算できる。

つまり、履歴に依存しない材料ならば、計算において“ステップ間の増分”を意識する必要が無いということ。

弾（粘）塑性モデルの計算アルゴリズムの必要性：非弾性の場合

Necessity of numerical algorithm for elasto-(visco)plasticity model: **Case of inelasticity**



- 第 n ステップ（時刻 t_n に相当）での状態が既知であるとき、第 $n+1$ ステップ（時刻 t_{n+1} に相当）での諸量を求めたい。



このステップ間のひずみ増分 $\Delta\epsilon$ が与えられており、次ステップでのひずみ

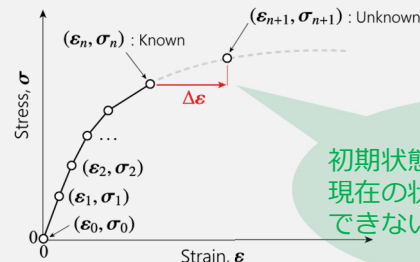
$$\epsilon_{n+1} = \epsilon_n + \Delta\epsilon$$

に対応した応力 σ_{n+1} などの諸量を求める計算。

- 弾塑性構成則 では、**応力とひずみの一対一関係が無い**ので、

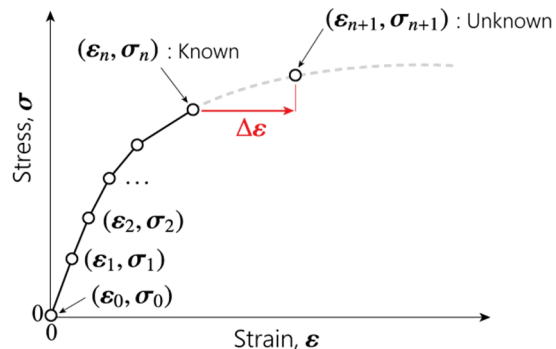
すべての量が既知である時刻 t_n の状態を基点として、時間区間 $[t_n, t_{n+1}]$ での計算によって時刻 t_{n+1} での諸量を求める必要がある。

→ この増分計算を時刻 t_0 から所与のひずみ経路に沿って続けることにより、きちんと履歴が考慮された応力-ひずみ応答が求められる。



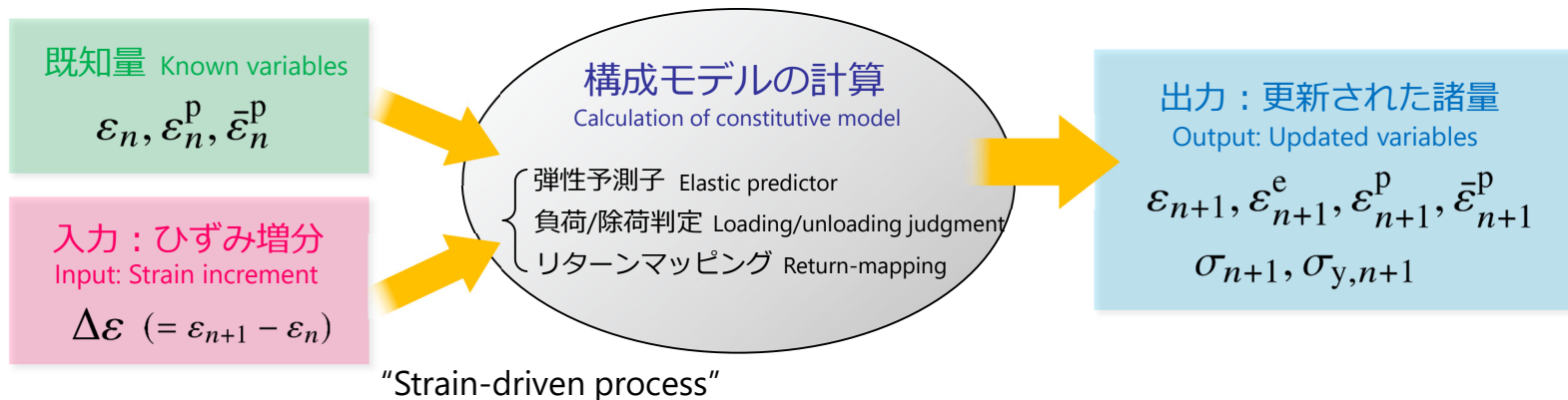
弾塑性モデルの計算手続き：全体の流れと入出力

Calculation procedure for elasto-plastic models: Overall flow and input/output



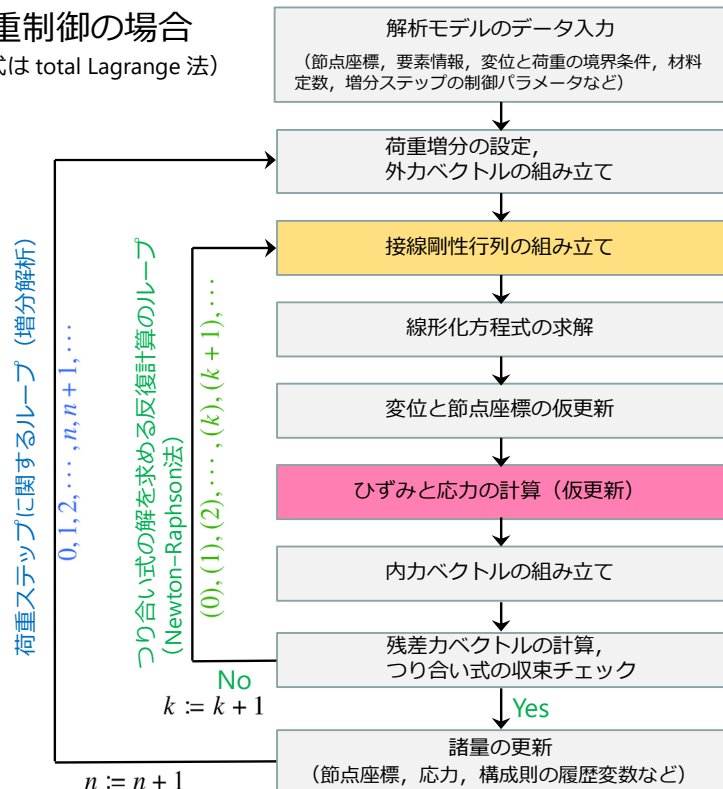
すべての量が既知である時刻 t_n (第 n ステップ) の状態を基点として、時間区間 $[t_n, t_{n+1}]$ ($t_{n+1} = t_n + \Delta t$) での計算によって時刻 t_{n+1} (第 $n+1$ ステップ) での諸量を求める。

Given the state at time t_n (n -th step), where all quantities have already been calculated and are known, we will calculate the unknown quantities at time t_{n+1} ($n+1$ -th step) by computing over the time interval $[t_n, t_{n+1}]$.



弾塑性構成則の計算手続き（概要のみ）

荷重制御の場合
(計算式は total Lagrange 法)



“不整合な” 接線係数テンソルを用いると,
つり合い式の反復求解において
Newton-Raphson法本来の2次収束が損なわれる。

4階の接線係数テンソル

$$\mathbf{C}_{n+1}^{\text{ep, algo}(k)}$$

コンシステント接線係数,
整合接線係数
アルゴリズム接線係数,
などとよばれる。

$$[\mathbf{K}_{\text{mat}, ab}^{(e)}]_{ij} = \int_{V^{(e)}} \sum_{K, L=1}^3 F_{iI} \frac{\partial N_a}{\partial X_K} C_{IKJL} F_{jJ} \frac{\partial N_b}{\partial X_L} dV$$

$$[\mathbf{K}_{\text{geo}, ab}^{(e)}]_{ij} = \int_{V^{(e)}} \sum_{K, L=1}^3 \frac{\partial N_a}{\partial X_K} S_{KL} \frac{\partial N_b}{\partial X_L} \delta_{ij} dV$$

塑性の計算アルゴリズムに
“整合した” 接線係数テンソル

Step 1. 弾性試行ステップ

👉 負荷判定：弾性 or 塑性？

Step 2. 塑性修正ステップ (リターンマッピング)

弾塑性モデルの計算手続き（概要のみ）

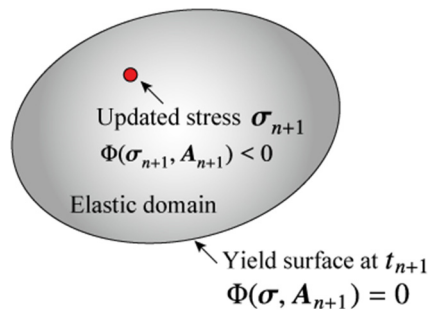
Calculation procedure for elasto-plastic models (Overview only)

● 弾塑性構成則における

塑性論的に許容／非許容な応力状態

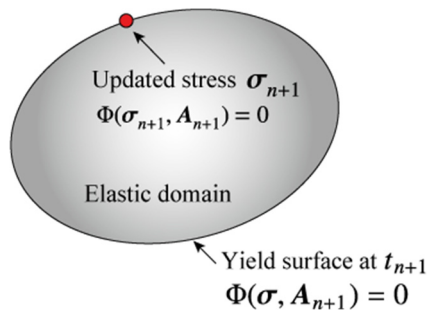
(注意：超過応力の概念に基づく粘塑性構成則では、この制約は適用されない。)

下の図は、応力空間において弾性領域を定める降伏面と
応力との位置関係を示したもの。



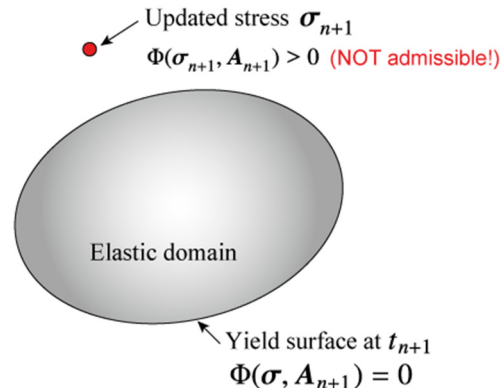
応力が降伏面の内側
(弾性状態)

☞ 許容



応力が降伏面上に乗っている
(降伏状態)

☞ 許容



応力が降伏面の外側にある

☞ 非許容

☞ 応力を許容状態へ引き戻す必要あり！

弾塑性モデルの計算手続き（概要のみ）

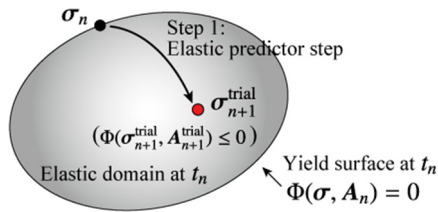
Calculation procedure for elasto-plastic models (Overview only)

- Step 1. 弾性試行ステップ：増分内での応答が弾性であると仮定して，試行応力を計算する。



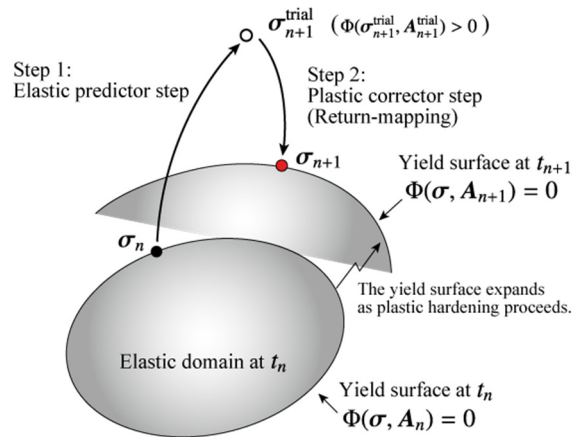
👉 負荷/除荷判定：弾性 or 塑性？

- Step 2. 塑性修正ステップ：リターンマッピングにより非許容な応力を許容状態まで引き戻す。



負荷判定で“弾性”と判定された場合

👉 許容状態なので計算終了。



負荷判定で“塑性”と判定された場合

👉 非許容状態なのでリターンマッピングで引き戻し。

1次元弾塑性モデルの弾性予測子／リターンマッピング・アルゴリズム

Elastic predictor/return-mapping algorithm for one-dimensional elasto-plastic model

(線形弾性 + 線形硬化の場合) (with linear elasticity and linear hardening)

● **Step 1.** Known values $\varepsilon_n, \varepsilon_n^p, \bar{\varepsilon}_n^p$ and input strain $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \Delta\varepsilon$ with incremental strain $\Delta\varepsilon$

● **Step 2.** Compute elastic trial values and yield function at trial elastic state

$$\begin{aligned}\varepsilon_{n+1}^{e, \text{trial}} &:= \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p = \varepsilon_n^e + \Delta\varepsilon; & \sigma_{n+1}^{\text{trial}} &:= E\varepsilon_{n+1}^{e, \text{trial}} = \sigma_n + E\Delta\varepsilon; & \bar{\varepsilon}_{n+1}^{p, \text{trial}} &:= \bar{\varepsilon}_n^p; & \sigma_{y, n+1}^{\text{trial}} &:= \sigma_{y0} + H\bar{\varepsilon}_n^p = \sigma_{y, n}; \\ \Phi_{n+1}^{\text{trial}} &:= \Phi(\sigma_{n+1}^{\text{trial}}, \sigma_{y, n+1}^{\text{trial}}) = |\sigma_{n+1}^{\text{trial}}| - (\sigma_{y0} + H\bar{\varepsilon}_{y, n}^p)\end{aligned}$$

● **Step 3.** Loading/unloading judgment

If $\Phi_{n+1}^{\text{trial}} \leq 0$ then Elastic step: $\Delta\gamma = 0 \leadsto$ Set $(\bullet)_{n+1} := (\bullet)_{n+1}^{\text{trial}}$ and Exit.

Else if $\Phi_{n+1}^{\text{trial}} > 0$ then Plastic step: $\Delta\gamma > 0 \leadsto$ Proceed to **Step 4.**

● **Step 4.** Return-mapping for plastic step

$$\begin{aligned}\Delta\gamma &:= \frac{\Phi_{n+1}^{\text{trial}}}{E + H} > 0; & \sigma_{n+1} &:= \left(1 - \frac{E\Delta\gamma}{|\sigma_{n+1}^{\text{trial}}|}\right)\sigma_{n+1}^{\text{trial}}; & \varepsilon_{n+1}^p &:= \varepsilon_n^p + \Delta\gamma \operatorname{sign}(\sigma_{n+1}^{\text{trial}}); & \varepsilon_{n+1}^e &:= \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p; \\ \bar{\varepsilon}_{n+1}^p &:= \bar{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma; & \sigma_{y, n+1} &:= \sigma_{y0} + H\bar{\varepsilon}_{n+1}^p\end{aligned}$$

- 固体材料・構造の非線形有限要素法

- 前回の復習：力学問題の全体像を俯瞰

- 弾塑性構成則

- 応力～ひずみ挙動の現象論的観察

- 1次元モデルの定式化から出発

- 3次元モデルへの一般化

- 各種の塑性モデル：どこが共通？ どこが異なる？

- 弾粘塑性構成則

- ひずみ速度依存性，クリープ，リラクゼーションの表現

- 非線形有限要素法への導入

- 材料構成則の役割と位置づけ

付録スライド

- 付録A. 主応力空間での座標変換

主応力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ を静水圧軸と偏差応力面 (π 平面) に関する直交座標 (ξ, η, ζ) 表示へ変換

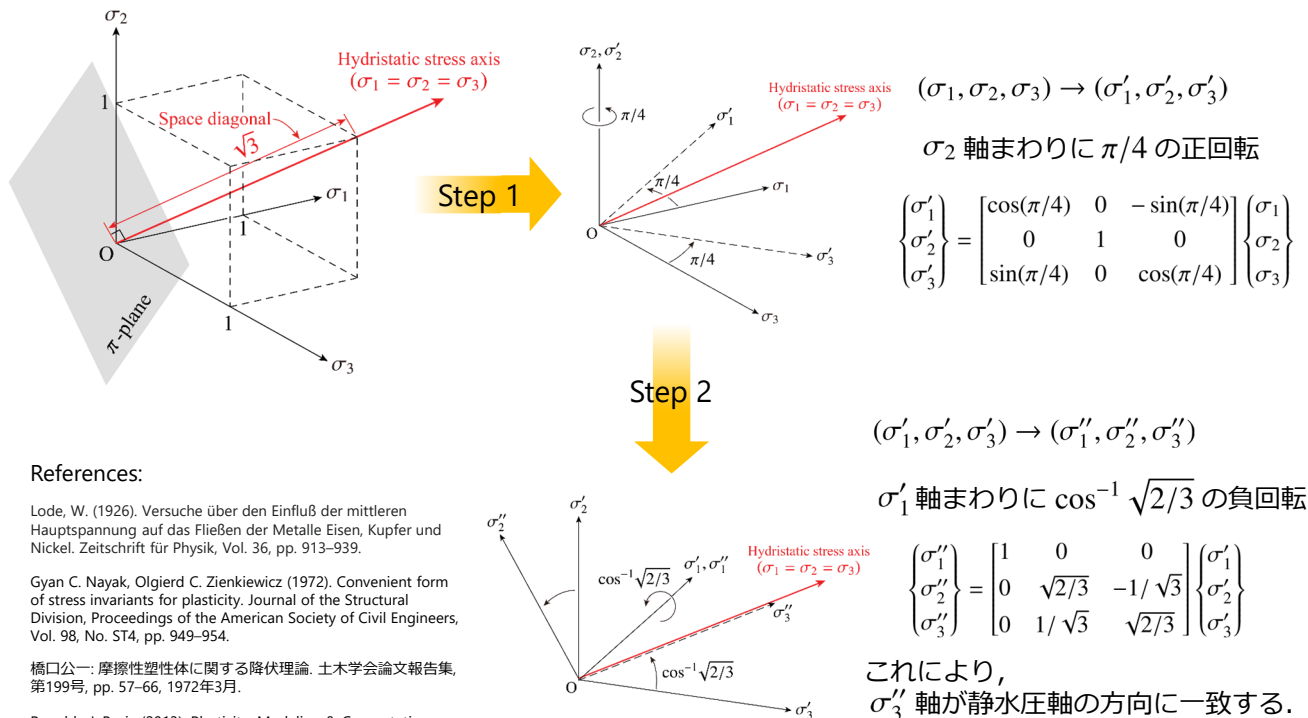
- 付録B. 粘塑性モデルによる材料挙動の表現

(a) ひずみ速度依存性, (b) クリープ, (c) リラクゼーション

付録A. 各種の塑性モデル：降伏面の形状

Appendix A. Various plasticity models: Shape of yield surface

● 主応力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ を静水圧軸と π 平面に関する直交座標 (ξ, η, ζ) 表示へ変換



References:

Lode, W. (1926). Versuche über den Einfluß der mittleren Hauptspannung auf das Fließen der Metalle Eisen, Kupfer und Nickel. Zeitschrift für Physik, Vol. 36, pp. 913–939.

Gyan C. Nayak, Olgierd C. Zienkiewicz (1972). Convenient form of stress invariants for plasticity. Journal of the Structural Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol. 98, No. ST4, pp. 949–954.

橋口公一: 摩擦性塑性体に関する降伏理論. 土木学会論文報告集, 第199号, pp. 57–66, 1972年3月.

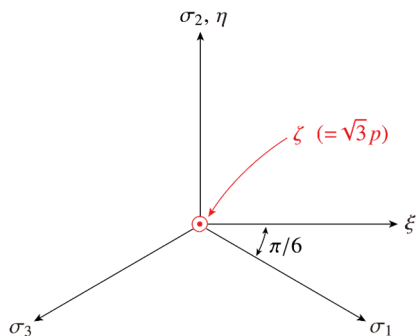
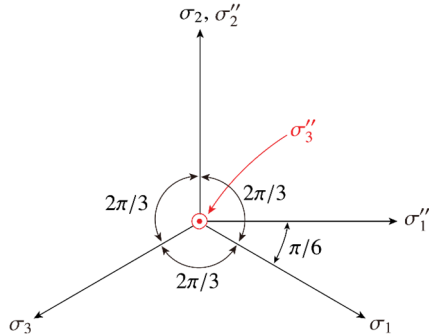
Ronaldo I. Borja (2013). Plasticity, Modeling & Computation. Springer, pp. 34–35, 66–69.

付録A. 各種の塑性モデル：降伏面の形状

Appendix A. Various plasticity models: Shape of yield surface

前ページの2段階の回転変換の逆変換は,

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2/3} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -1/\sqrt{3} & \sqrt{2/3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1'' \\ \sigma_2'' \\ \sigma_3'' \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_1'' - \frac{1}{\sqrt{6}}\sigma_2'' + \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_3'' \\ \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_2'' + \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_3'' \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_1'' - \frac{1}{\sqrt{6}}\sigma_2'' + \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_3'' \end{Bmatrix} \end{aligned}$$



$\sigma_1'' \rightarrow \xi, \sigma_2'' \rightarrow \eta, \sigma_3'' \rightarrow \zeta$ と表すことにする.

$I_\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3p = \sqrt{3}\sigma_3'' = \sqrt{3}\zeta \leadsto \zeta = \sqrt{3}p$ を考慮して,

($p = \zeta / \sqrt{3}$: 平均垂直応力)

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\xi - \frac{1}{\sqrt{6}}\eta + \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta \\ \sigma_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}\eta + \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta \\ \sigma_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\xi - \frac{1}{\sqrt{6}}\eta + \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta \end{cases}$$

☞ 静水圧軸と π 平面に関する
直交座標 (ξ, η, ζ) による表示

(ξ, η, ζ) を用いて, 応力テンソル σ の基本不変量を以下のように表すことができる.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{I}_{\sigma} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3p = \sqrt{3} \zeta \\ \text{II}_{\sigma} = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 = \zeta^2 - \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) \\ \text{III}_{\sigma} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = \frac{1}{3\sqrt{3}} \zeta^3 - \frac{1}{2\sqrt{3}} \zeta (\xi^2 + \eta^2) - \frac{1}{\sqrt{6}} \xi^2 \eta + \frac{1}{3\sqrt{6}} \eta^3 \end{array} \right.$$

偏差主応力は $\sigma_{\text{dev},\alpha} = \sigma_{\alpha} - p$ ($\alpha = 1, 2, 3$) なので,

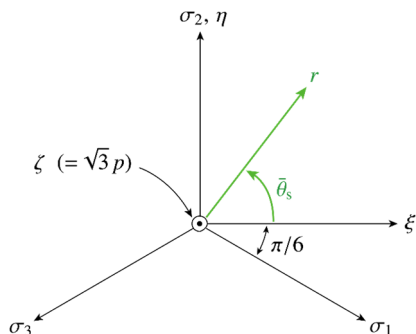
$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\text{dev},1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \xi - \frac{1}{\sqrt{6}} \eta \\ \sigma_{\text{dev},2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \eta \\ \sigma_{\text{dev},3} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \xi - \frac{1}{\sqrt{6}} \eta \end{array} \right.$$

従って, 偏差応力テンソル σ_{dev} の基本不変量は

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{I}_{\sigma_{\text{dev}}} = 0 \\ \text{II}_{\sigma_{\text{dev}}} = -\frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) \\ \text{III}_{\sigma_{\text{dev}}} = -\frac{1}{\sqrt{6}} \xi^2 \eta + \frac{1}{3\sqrt{6}} \eta^3 \end{array} \right.$$

● 主応力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ を静水圧軸まわりの円筒座標 $(r, \bar{\theta}_s, \zeta)$ による表示へ変換

Lodeの座標



$$\begin{cases} \xi = r \cos \bar{\theta}_s \\ \eta = r \sin \bar{\theta}_s \end{cases} \quad \begin{array}{l} \xi \text{ 軸から反時計回りの} \\ \text{角を } \bar{\theta}_s \text{ とする。} \end{array}$$

これを用いると、主応力は以下のように表すことができる。

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} r \sin\left(\bar{\theta}_s + \frac{2}{3}\pi\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta \\ \sigma_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} r \sin \bar{\theta}_s + \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta \\ \sigma_3 = \sqrt{\frac{2}{3}} r \sin\left(\bar{\theta}_s - \frac{2}{3}\pi\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta \end{cases} \quad \begin{array}{l} (\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3) \\ \text{☞ 静水圧軸まわりの} \\ \text{円筒座標 } (r, \bar{\theta}_s, \zeta) \\ \text{による表示} \end{array}$$

偏差応力テンソル σ_{dev} の基本不変量は

$$\begin{cases} \text{I}_{\sigma_{\text{dev}}} = 0 \\ \text{II}_{\sigma_{\text{dev}}} = -\frac{1}{2}r^2 \quad (\leq 0) \\ \text{III}_{\sigma_{\text{dev}}} = -\frac{r^3}{3\sqrt{6}} \sin 3\bar{\theta}_s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{-2 \text{II}_{\sigma_{\text{dev}}}} = \sqrt{\frac{2}{3}} q = \{\text{tr}(\sigma_{\text{dev}})^2\}^{1/2} = \|\sigma_{\text{dev}}\| \\ \bar{\theta}_s = \frac{1}{3} \sin^{-1}\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{\text{III}_{\sigma_{\text{dev}}}}{(-\text{II}_{\sigma_{\text{dev}}})^{3/2}}\right) \quad \text{☞ Lode角の定義のひとつ} \end{cases}$$

次ページへ続く ☞

● Lode角の定義（いくつかのバリエーションがある）

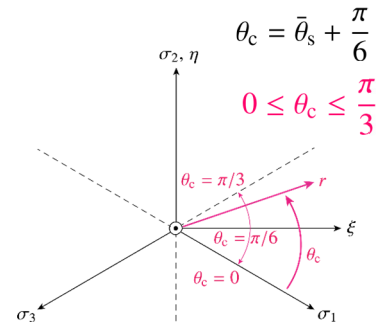
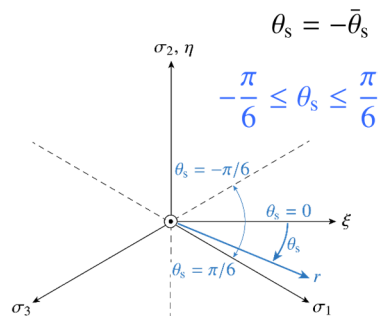
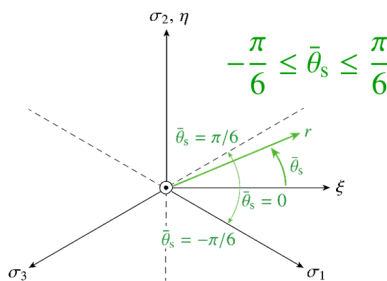
ここでは逆三角関数の主枝 (principal branch) を取る。

前述した θ の定義はこれ。

$$\bar{\theta}_s = \frac{1}{3} \sin^{-1} \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{\text{III}\sigma_{\text{dev}}}{(-\text{II}\sigma_{\text{dev}})^{3/2}} \right)$$

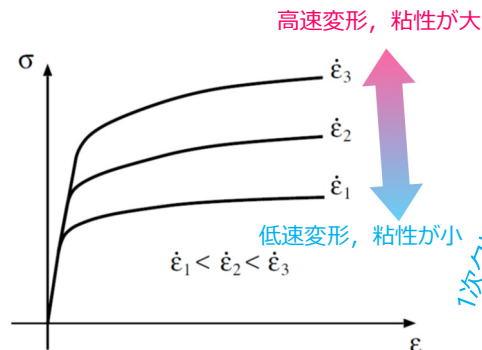
$$\theta_s = \frac{1}{3} \sin^{-1} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{\text{III}\sigma_{\text{dev}}}{(-\text{II}\sigma_{\text{dev}})^{3/2}} \right)$$

$$\theta_c = \frac{1}{3} \cos^{-1} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{\text{III}\sigma_{\text{dev}}}{(-\text{II}\sigma_{\text{dev}})^{3/2}} \right)$$



	Stress state ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$)	$\bar{\theta}_s$	θ_s	θ_c
Triaxial Extension	$\sigma_1 \geq \sigma_2 = \sigma_3$	$-\pi/6$	$\pi/6$	0
Pure Shear	$\sigma_2 = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$	0	0	$\pi/6$
Triaxial Compression	$\sigma_1 = \sigma_2 \geq \sigma_3$	$\pi/6$	$-\pi/6$	$\pi/3$
	Range of Lode angle φ	$-\pi/6 \leq \bar{\theta}_s \leq \pi/6$	$-\pi/6 \leq \theta_s \leq \pi/6$	$0 \leq \theta_c \leq \pi/3$

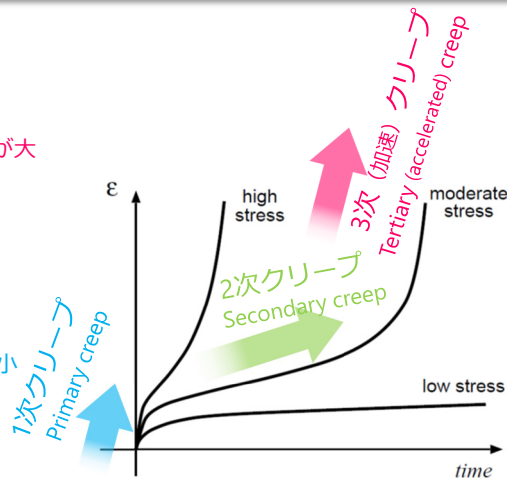
● 典型的な粘塑性挙動



(a) ひずみ速度に依存した応力応答
Strain-rate dependence of stress response

はやい変形ほど大きな応力応答を示す。

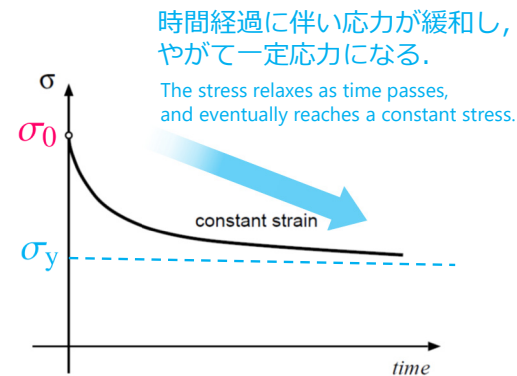
The faster the deformation, the greater the stress response.



(b) 一定応力でのクリープひずみ
Creeping at constant stress

ある応力を与えたあと、一定応力で保持すると、時間経過に伴って粘塑性ひずみが進行する。

When a certain stress is applied and then held at a constant level, viscoelastic strain evolves over time.

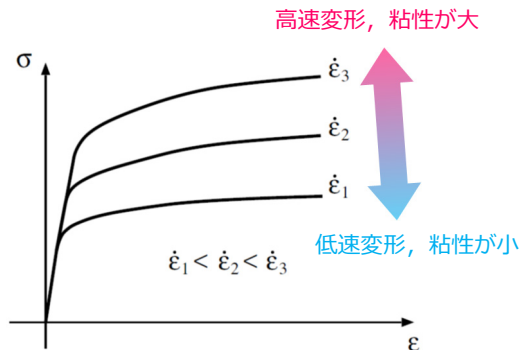


(c) 一定ひずみでの応力緩和
Stress relaxation at constant strain

あるひずみを与えたあと、一定ひずみで保持すると、時間経過に伴って応力が緩和し、やがて一定応力になる。

After applying a certain amount of strain and holding it at that level, the stress relaxes over time and eventually reaches a constant value.

● 典型的な粘塑性挙動



(a) ひずみ速度に依存した応力応答

Strain-rate dependence of stress response

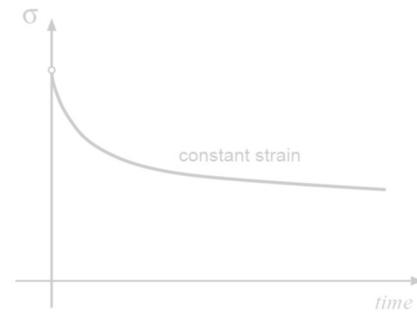
はやい変形ほど大きな応力応答を示す。

The faster the deformation, the greater the stress response.



(b) 一定応力でのクリープひずみ

Creeping at constant stress



(c) 一定ひずみでの応力緩和

Stress relaxation at constant strain

付録B. 粘塑性挙動の表現 : (a) ひずみ速度依存性

Appendix B. Description of viscoplastic behaviors: (a) Strain-rate dependence

一定ひずみ速度での単調な引張り過程を考える。簡単のため非硬化 ($\sigma_y = \text{const.}$) を仮定する。

弾性範囲では, $\sigma = E\varepsilon$ ($\sigma < \sigma_y$, i.e., $\varepsilon < \sigma_y/E$) ここで $\varepsilon^* := \sigma_y/E$ とおく。

以下では, 粘塑性流動が生じる $\sigma \geq \sigma_y$, $\varepsilon \geq \sigma_y/E$ のときを考え,

全ひずみが次式で与えられるとする。



弾性限界を超えて
粘塑性流動が開始するひずみ
Strain at which viscoplastic flow initiates
beyond the elastic limit

$$\varepsilon(t) = \varepsilon^* + \alpha t \quad (\alpha > 0 : \text{ひずみ速度}; t = 0 : \text{粘塑性流動の開始時点})$$

前述の粘塑性流れ則 (簡単のため $\epsilon = 1$ とする. $\mu > 0$) より,

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\varepsilon}^p(t) &= \frac{1}{\mu} \left[\frac{\sigma(t)}{\sigma_y} - 1 \right] = \frac{1}{\mu} \left[\frac{E\{\varepsilon(t) - \varepsilon^p(t)\}}{\sigma_y} - 1 \right] = \frac{1}{\mu} \left[\frac{\varepsilon(t) - \varepsilon^p(t)}{\varepsilon^*} - 1 \right] = \frac{1}{\mu\varepsilon^*} [\alpha t - \varepsilon^p(t)] \\ \text{初期条件: } \varepsilon^p(0) &= 0 \quad \text{粘塑性流動の開始時点} \end{aligned} \right.$$

この時間に関する
微分方程式を解くと,



$$\text{解析解: } \varepsilon^p(t) = \alpha \left[t - \mu\varepsilon^* (1 - e^{-t/(\mu\varepsilon^*)}) \right]$$

$$\text{これを } \sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^p) \text{ へ代入して, } \sigma(t) = \sigma_y [1 + \alpha\mu(1 - e^{-t/(\mu\varepsilon^*)})]$$

👉 つづき

$$\varepsilon(t) = \varepsilon^* + \alpha t \leadsto t(\varepsilon) = \frac{\varepsilon - \varepsilon^*}{\alpha} \quad \text{これを前ページの結果へ代入すると ...}$$

応力 σ とひずみ ε の関係が得られる :

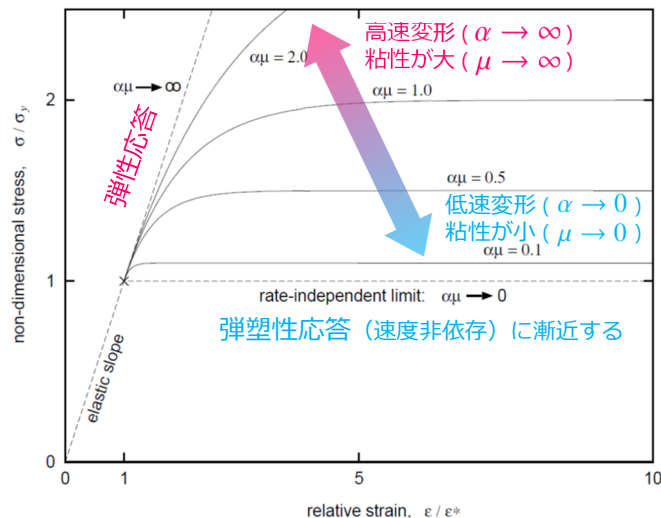
$$\sigma(t(\varepsilon)) = \sigma_y \left[1 + \alpha \mu (1 - e^{\{1/(\mu \alpha)\}(1 - \varepsilon/\varepsilon^*)}) \right], \quad 1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon^*} < 0$$

● ひずみ速度 α が

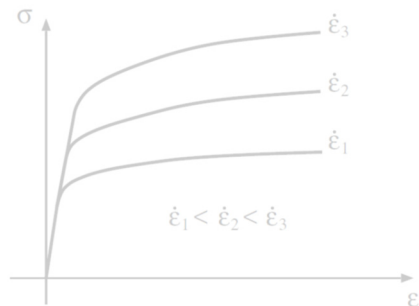
- 極低速のとき : $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \sigma(t(\varepsilon)) = \sigma_y \leadsto$ 弾塑性 (速度非依存) の応答に漸近
- 極高速のとき : $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \sigma(t(\varepsilon)) = E\varepsilon \leadsto$ 弾性応答 に漸近

● 粘塑性パラメータ μ が

- 極めて小さいとき : $\lim_{\mu \rightarrow 0} \sigma(t(\varepsilon)) = \sigma_y \leadsto$ 弾塑性 (速度非依存) の応答に漸近
- 極めて大きいとき : $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \sigma(t(\varepsilon)) = E\varepsilon \leadsto$ 弾性応答 に漸近

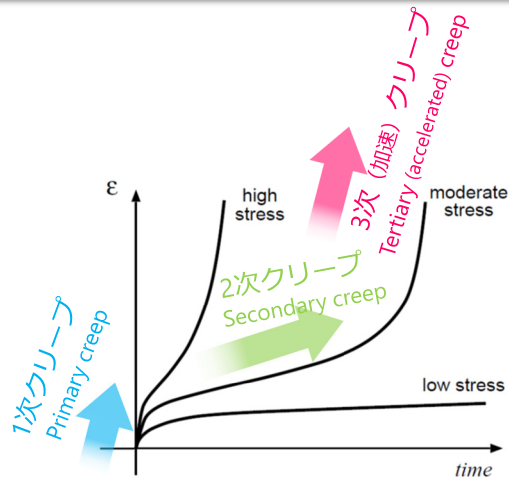


● 典型的な粘塑性挙動



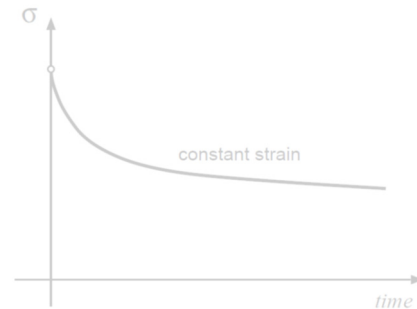
(a) ひずみ速度に依存した応力応答

Strain-rate dependence of stress response



(b) 一定応力でのクリープひずみ

Creeping at constant stress



(c) 一定ひずみでの応力緩和

Stress relaxation at constant strain

ある応力を与えたあと、一定応力で保持すると、時間経過に伴って粘塑性ひずみが進行する。

When a certain stress is applied and then held at a constant level, viscoelastic strain evolves over time.

簡単のため, ここでも非硬化 ($\sigma_y = \text{const.}$) を仮定する.

はじめに, 時刻 $t = 0$ で “瞬間的” に引張応力 $\sigma > \sigma_y$ を作用させる. 先に (a) で議論したように, 極高速負荷の直後は瞬間的に弾性応答を示す.

$$\sigma = E\varepsilon|_{t=0} \leadsto \varepsilon|_{t=0} = \frac{\sigma}{E} = \varepsilon^e|_{t=0} \quad \text{☞ 極高速負荷の直後は弾性応答}$$

その後, 応力を一定 ($\sigma = \text{const.}$) に保持する. このときの ε^e と ε^p の経時変化を検討する.

弾性構成則によれば, 一定の応力に対して弾性ひずみは一定:

$$\varepsilon^e(t) = \varepsilon^e|_{t=0} = \frac{\sigma}{E} = \text{const.} \quad \dots (1)$$

一方, 粘塑性ひずみの進行は前掲の粘塑性流れ則で与えられる:

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\gamma} \text{sign}(\sigma), \quad \dot{\gamma} = \frac{1}{\mu} \left[\left(\frac{|\sigma|}{\sigma_y} \right)^{1/\epsilon} - 1 \right]$$

$\sigma = \text{const.} > 0, \sigma_y = \text{const.}$
を考慮して時間積分

$$\varepsilon^p(t) = \frac{1}{\mu} \left[\left(\frac{|\sigma|}{\sigma_y} \right)^{1/\epsilon} - 1 \right] t \quad \dots (2)$$

☞ 変形速度・時間依存性が無い弾性を考えている (not 粘弾性).

付録B. 粘塑性挙動の表現 : (b) クリープ

Appendix B. Description of viscoplastic behaviors: (b) Creep

👉 つづき

前ページの (1), (2) より,

$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$ を計算すると,

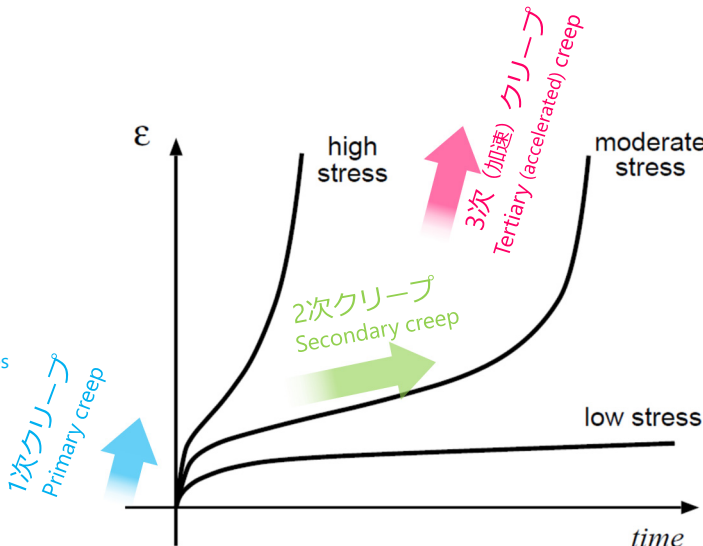
$$\varepsilon(t) = \underbrace{\frac{\sigma}{E}}_{= \varepsilon^e(t) = \text{const.}} + \underbrace{\frac{1}{\mu} \left[\left(\frac{|\sigma|}{\sigma_y} \right)^{1/\epsilon} - 1 \right] t}_{= \varepsilon^p(t) = (\text{const.}) \times t}$$

👉 一定速度で
粘塑性クリープひずみが進行

☹️ 2次～3次クリープは表現できない。

上式は1次クリープを
表現する。

The above equation describes
primary creep.



3次クリープ材料の内部損傷の進展と関連しているとされ、
連続体力学の枠組みでは“損傷モデル”で表現される。

Tertiary creep is associated with the evolution of internal damage in
the material and can be represented by a “damage model” within the
framework of continuum mechanics.

ひずみ硬化則を導入すれば
2次クリープを表現できる。

Second-order creep can be described
by introducing a strain-hardening.

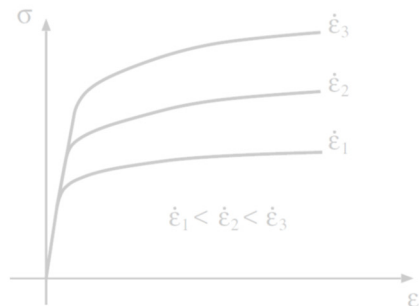
ε^p の進行に伴い σ_y が上昇

⇒ クリープ速度 (上式の係数部分) が次第に降下

σ_y increases as ε^p progresses

⇒ The creep rate (the coefficient in the above equation)
gradually decreases

● 典型的な粘塑性挙動



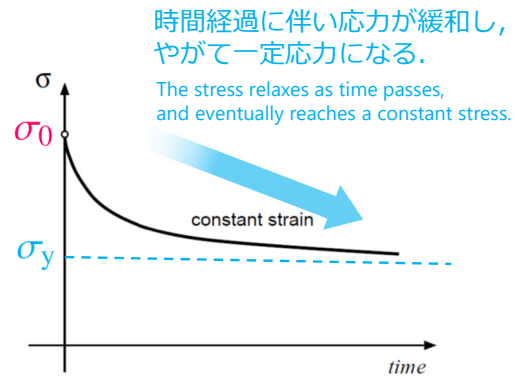
(a) ひずみ速度に依存した応力応答

Strain-rate dependence of stress response



(b) 一定応力でのクリープひずみ

Creeping at constant stress



(c) 一定ひずみでの応力緩和

Stress relaxation at constant strain

あるひずみを与えたあと、一定ひずみで保持すると、時間経過に伴って応力が緩和し、やがて一定応力になる。

After applying a certain amount of strain and holding it at that level, the stress relaxes over time and eventually reaches a constant value.

簡単のため, ここでは $\sigma_y = \text{const.}$, $\epsilon = 1$ と仮定する.

はじめに, 時刻 $t = 0$ で “瞬間的” に引張ひずみ $\epsilon (> \sigma_y/E)$ を作用させる. 先に (a) で議論したように, 極高速負荷の直後は瞬間的に弾性応答を示す.

負荷直後の応力は $\sigma|_{t=0} = E\epsilon$, 弾性ひずみは $\epsilon^e|_{t=0} = \epsilon$, 粘塑性ひずみは $\epsilon^p|_{t=0} = 0$ ☞ 極高速負荷の直後は弾性応答

その後, ひずみを一定 ($\epsilon = \text{const.}$) に保持する. このときの応力 σ の経時変化を検討する.

$$\sigma(t) = E\epsilon^e = E(\epsilon - \epsilon^p(t)) = \underbrace{E\epsilon}_{= \sigma|_{t=0} =: \sigma_0} - E\epsilon^p(t) = \sigma_0 - E\epsilon^p(t) \quad \dots (1)$$

粘塑性ひずみの発展則：

$$\epsilon^p = \frac{1}{\mu} \left[\left(\frac{|\sigma|}{\sigma_y} \right)^{1/\epsilon} - 1 \right] \text{sign}(\sigma) = \frac{1}{\mu} \left[\frac{\sigma}{\sigma_y} - 1 \right] \quad \begin{matrix} \text{式(1)を代入} \\ \text{☞} \end{matrix} \quad \epsilon^p(t) = \frac{1}{\mu} \left[\frac{\sigma_0 - E\epsilon^p(t)}{\sigma_y} - 1 \right] = \underbrace{\frac{1}{\mu} \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_y} - 1 \right)}_{=: c_1} - \underbrace{\frac{E}{\mu\sigma_y}}_{=: c_2} \epsilon^p(t) \quad \dots (2)$$

$\epsilon = 1, \sigma > 0$

つづき

前ページの式(2)より,

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}^p(t) = c_1 - c_2 \varepsilon^p(t) & \text{1階線形微分方程式} \\ \text{初期条件: } \varepsilon^p(0) = 0 \end{cases} \quad \xrightarrow{\text{これを解くと,}} \quad \varepsilon^p(t) = \frac{c_1}{c_2} (1 - e^{-c_2 t}) \quad \dots (3)$$

式(3)を式(1)へ代入すると,

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= E(\varepsilon - \varepsilon^p(t)) \\ &= \sigma_0 - (\sigma_0 - \sigma_y)(1 - e^{-(E/\mu\sigma_y)t}) \quad \dots (4) \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\quad} \begin{cases} \sigma(0) = \sigma_0 > \sigma_y \\ \sigma(t \rightarrow \infty) = \sigma_y \end{cases}$$

