

# 非線形有限要素法

## ～全体像の理解とFRPそり解析への応用～

NEDO特別講座

先進複合材料の製造における  
高度デジタル人材育成に関する特別講座

2026年6月25日（木）

東北大学大学院工学研究科 寺田賢二郎

# 固体材料の非線形有限要素法



## 第1回：全体像の理解とFRPそり解析への応用

日程：2026.6.25, 7.23, 9.24, 10.2、担当：寺田賢二郎

概要：前半は、成形シミュレーションの基礎として、固体の非線形力学問題の分類とその解法としての有限要素法の全体像を述べ、弾塑性、粘弾性、超弾性体などの材料構成則の位置付けを解説する。後半では、それらの構成則の特徴を踏まえ、樹脂の硬化と熱変形、マルチスケール性を考慮した1方向繊維強化複合材料（FRP）のそり解析の一例を紹介する。

## 第2回：弾塑性・弾粘塑性構成則の理論的基礎と数値解析への導入

日程：2026.7.23、担当：山川優樹

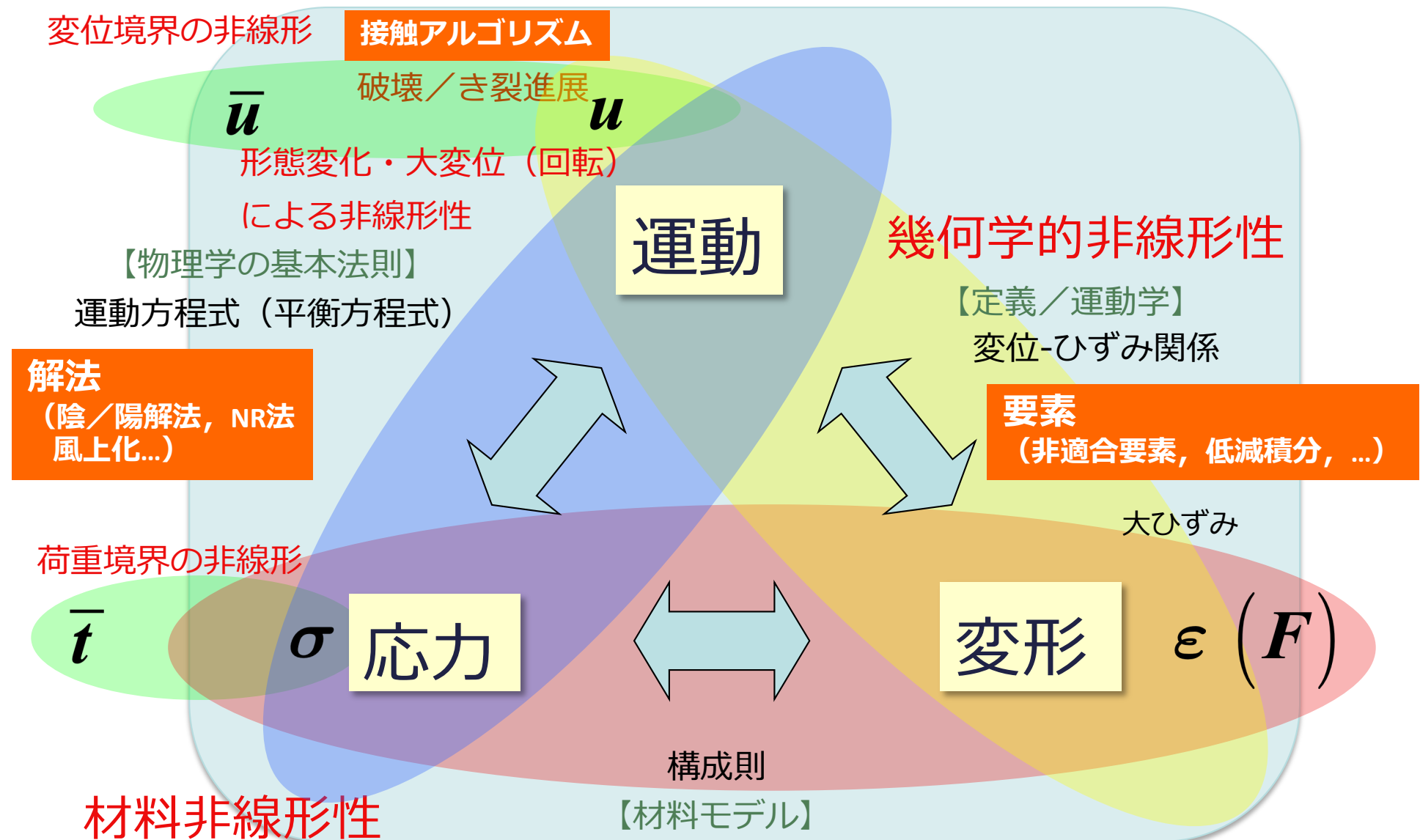
## 第3回：負荷速度・温度依存の力学挙動を表現する粘弾性構成則の基礎

日程：2026.9.24、担当：松原成志朗

## 第4回：有限変形理論の枠組みと超弾性体の基礎

日程：2026.10.2、担当：渡邊浩志

# 力学変数とその関係式：非線形性の分類



非線形弾性，弾塑性，粘弾塑性，損傷（き裂）  
局所化…（材料不安定）

**関数形の定義と初期値問題の設定**

# 固体材料の初期値・境界値問題

境界条件

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}(t) & \text{on } \varphi(\partial\Omega_u) \\ \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}}(t) & \text{on } \varphi(\partial\Omega_t) \end{cases}$$

$\mathbf{u}$

初期条件

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{V}_0 & \text{on } \Omega \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0 & \text{on } \Omega \end{cases}$$

運動

【物理学の基本法則】

運動方程式（平衡方程式）

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{u}}$$

【定義／運動学】

変位-ひずみ関係

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$$

$\boldsymbol{\sigma}$  応力

変形  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{F})$

構成則 【材料モデル】

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F} \left( \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t - s_0^\infty), \mathbf{x}, t \right)$$

# 初期値・境界値問題：局所形の支配方程式

- 運動方程式（つり合い式）

$$\operatorname{div}_x \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad \text{on } \varphi(\Omega)$$

- 運動と変形の関係式

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left( \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right)$$

- 変形と応力の関係式（構成則）

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F} \left( \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t - \underset{0}{\overset{\infty}{s}}), \mathbf{x}, t \right)$$

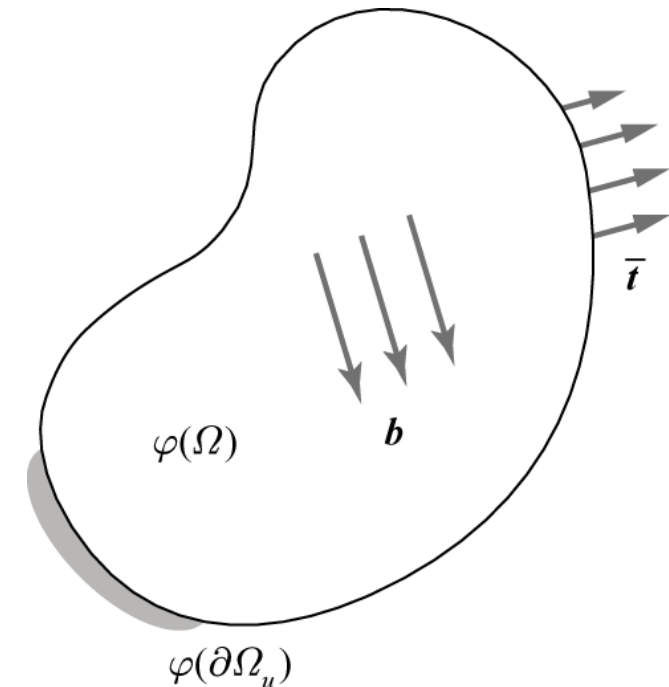
- 境界条件

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}(t) & \text{on } \varphi(\partial\Omega_u) \\ \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}}(t) & \text{on } \varphi(\partial\Omega_t) \end{cases}$$

- 初期条件

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{V}_0 & \text{on } \Omega \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0 & \text{on } \Omega \end{cases}$$

弱形式化



すべての点  $x$  について各式が成り立つ  
ように未知数を定める（無限次元の）問題

局所形の支配方程式 = 強形式

方程式が成り立つことを“強く”要請

# 局所的なのつり合い式と大域的なのつり合い式

## ● 局所形（強形式）の運動方程式

$$\operatorname{div}_x \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad \text{at } \mathbf{x} \text{ in } \varphi(\Omega)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}}(t) \quad \text{on } \varphi(\partial\Omega_t)$$

任意の変位（速度） $\boldsymbol{\eta}$  を乗じて領域全体で体積積分（ただし、 $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$  on  $\varphi(\partial\Omega_u)$ ）

## ● 大域形の運動方程式（弱形式または仮想仕事式）：FEMの基礎式

$$\int_{\varphi(\Omega)} \boldsymbol{\sigma} : \nabla_x \boldsymbol{\eta} \, dv - \int_{\varphi(\Omega)} (\mathbf{b} - \rho \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \boldsymbol{\eta} \, dv - \int_{\varphi(\partial\Omega_t)} \bar{\mathbf{t}} \cdot \boldsymbol{\eta} \, da = 0$$

つり合い式への要請を“弱め”る

大域形の平衡方程式（準静的問題の場合）

$$\int_{\varphi(\Omega)} \boldsymbol{\sigma} : \nabla_x \boldsymbol{\eta} \, dv - \int_{\varphi(\Omega)} \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dv - \int_{\varphi(\partial\Omega_t)} \bar{\mathbf{t}} \cdot \boldsymbol{\eta} \, da = 0$$

# 境界値問題：弱形式と強形式

- 大域形の平衡方程式（つり合い式）

$$\underbrace{\int_{\varphi(\Omega)} \boldsymbol{\sigma} : \nabla_x \boldsymbol{\eta} \, dv}_{\text{内部仮想仕事}} = \underbrace{\int_{\varphi(\Omega)} \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dv + \int_{\varphi(\partial\Omega_t)} \bar{\boldsymbol{t}} \cdot \boldsymbol{\eta} \, da}_{\text{外部仮想仕事}}$$

弱形式

- 運動と変形の関係式

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left( \nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^T \right)$$

強形式

- 変形と応力との関係式（構成則）

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F} \left( \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}, t - \overset{\infty}{\underset{0}{s}}), \boldsymbol{x}, t \right)$$

空間離散化

強形式

- 基本境界条件

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t) = \bar{\boldsymbol{u}}(t) \quad \text{on } \varphi(\partial\Omega_u)$$

# 形状関数による“空間”の離散化

平衡方程式 = 仮想仕事式 = 弱形式

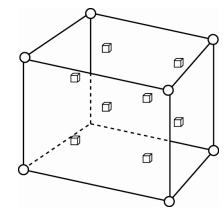
$$\int_{\varphi(\Omega)} \boldsymbol{\sigma} : \nabla_x \boldsymbol{\eta} \, dv = \int_{\varphi(\Omega)} \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dv + \int_{\varphi(\partial\Omega_t)} \bar{\mathbf{t}} \cdot \boldsymbol{\eta} \, da$$

変位-ひずみ関係式

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$$

節点値と形状関数による変位と仮想変位の補間近似

$$\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) \approx \boldsymbol{\eta}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\delta} \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{u}^h(\mathbf{X}) = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \mathbf{d}$$



離散化平衡方程式 = 有限要素方程式

$$\mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{d}) = \mathbf{f}^{\text{ext}}$$

離散化変位-ひずみ関係式

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla_x^{(s)} \mathbf{u} \approx \nabla_x \mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{B} \mathbf{d}$$

内力ベクトル:  $\mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{d}) = \int_{\varphi(\Omega)} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{d}) \, dv$

外力ベクトル:  $\mathbf{f}^{\text{ext}} = \int_{\varphi(\Omega)} \mathbf{N}^T \mathbf{b} \, dv + \int_{\varphi(\partial\Omega_t)} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} \, da$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F} \left( \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t - \overset{\infty}{s}_0), \mathbf{x}, t \right)$$

Remark: 構成則は空間的に離散化されない  
(物質点の挙動を表す方程式群だから)

# “空間離散化”された境界値問題

- 運動方程式（つり合い式）

$$\mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{d}) = \mathbf{f}^{\text{ext}}$$

$$\begin{Bmatrix} f_1^{\text{int}}(\mathbf{d}) \\ f_2^{\text{int}}(\mathbf{d}) \\ \vdots \\ f_N^{\text{int}}(\mathbf{d}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{\text{ext}} \\ f_2^{\text{ext}} \\ \vdots \\ f_N^{\text{ext}} \end{Bmatrix}$$

弱形式を離散化  
して得られた  
有限要素方程式

- 運動と変形の関係式

$$\boldsymbol{\varepsilon} \approx \mathbf{B}\mathbf{d}$$

強形式

- 変形と応力の関係式（構成則）

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F} \left( \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t - \overset{\infty}{\underset{0}{s}}), \mathbf{x}, t \right)$$

強形式

- 基本境界条件

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \bar{\mathbf{u}}(t) \quad \text{on } \varphi(\partial\Omega_u)$$

# “空間離散化”された境界値問題

$$u \approx Nd$$

運動

離散化平衡方程式

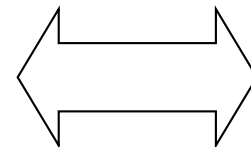
$$\mathbf{f}^{\text{int}}(d) = \mathbf{f}^{\text{ext}}$$

離散化変位-ひずみ関係

$$\varepsilon \approx Bd$$

$\sigma$

内力



構成則

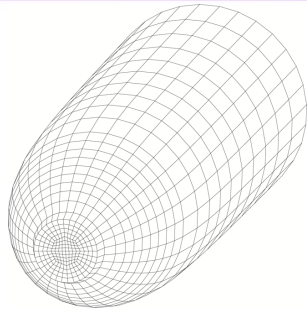
(強形式のまま)

変形

$\varepsilon(F)$

$$\sigma = \mathcal{F} \left( \varepsilon(\mathbf{x}, t - \overset{\infty}{\underset{0}{s}}, \mathbf{x}, t) \right) \quad 3.5 \text{節}$$

# 離散化つり合い方程式：解法の指針



構造全体  
(大域的)

$$u \approx Nd$$

運動

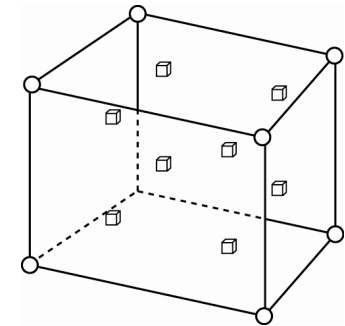
離散化線形化方程式

$$\mathbf{K}_T \delta \mathbf{d} = \mathbf{f}^{\text{ext}} - \mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{d})$$

を解いて、全節点の変位  
を予測を更新

$$\mathbf{d} \leftarrow \mathbf{d} + \delta \mathbf{d}$$

要素 (小領域)



更新された節点変位から  
要素内のひずみの近似値を算出

$$\mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{d}) = \int_{\varphi(\Omega)} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{d}) dv$$

内力ベクトル

内力

構成則

③

変形  $\boldsymbol{\varepsilon} \approx \mathbf{B} \mathbf{d}$

接線剛性

$$\mathbf{K}_T = \int_{\varphi(\Omega)} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dv$$

接線係数 (材料ヤコビアン)

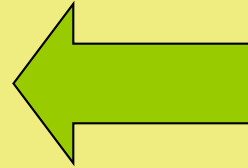
$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t - \frac{\infty}{0}), \mathbf{x}, t) \\ \mathbf{D} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \end{cases}$$

積分点のひずみ値を入力データ  
として応力と、そのひずみ対す  
る変化率 (接線係数) を算出

物質点 (=局所)

# 構成則 (構成方程式／材料モデル)

内力

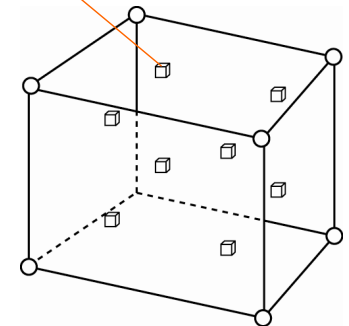


変形  $\varepsilon \approx Bd$

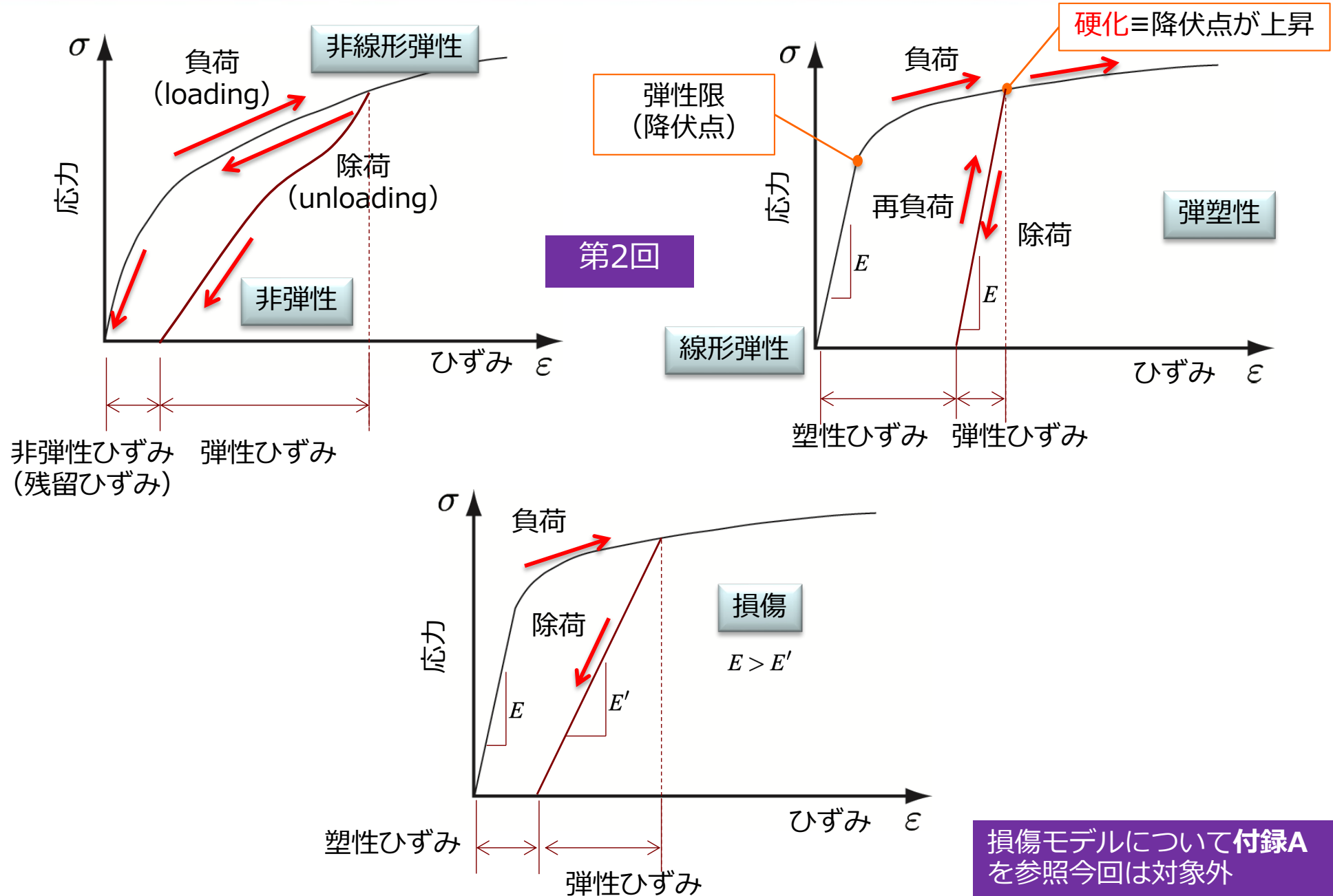
$$\begin{cases} \sigma = F(\varepsilon(\mathbf{x}, t - s_0^\infty), \mathbf{x}, t) \\ D = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \end{cases}$$

## ポイント：

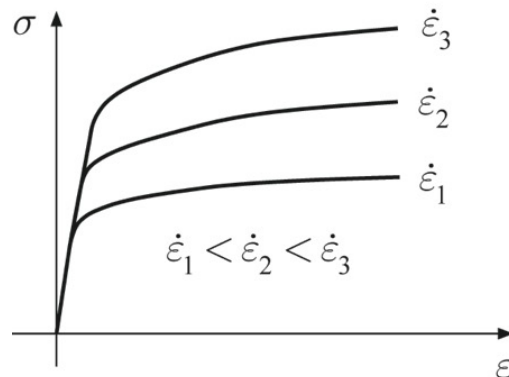
- ✓ 各積分点での関係式であること
  - 積分点同士は独立であること (局所作用の法則)
- ✓ ひずみ (およびその履歴) を入力として応力を算出する規“則”を数式化したもの
  - 必ず応力値が定まること (決定論的であること)
- ✓ 局所的な“初期値境界値問題”が設定されること



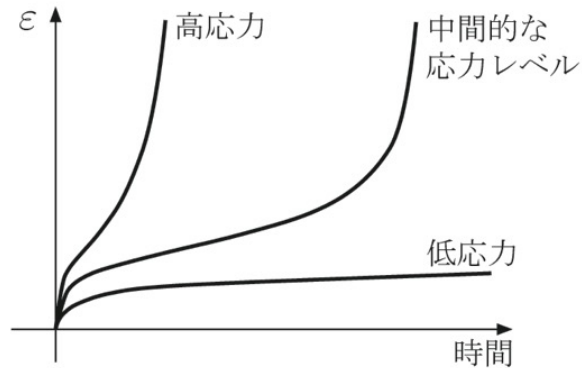
# 材料挙動：速度非依存



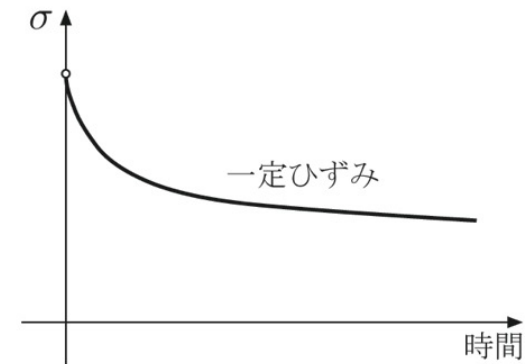
# 材料挙動：速度依存



ひずみ速度依存性  
(異なる負荷ひずみ速度により応答が異なる)

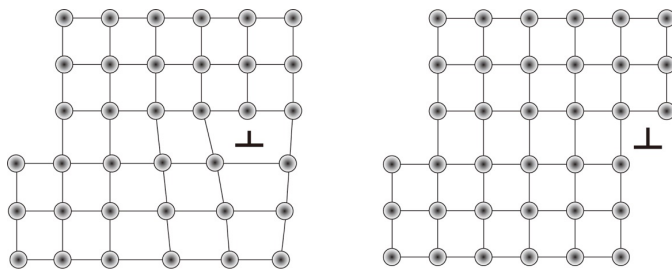


一定応力下での塑性流動  
(クリープ)

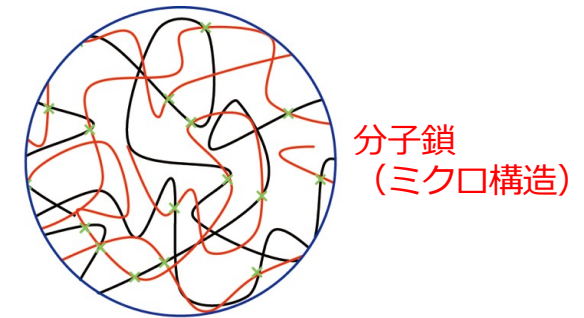


一定ひずみ下での応力緩和

結晶構造 (ミクロ構造)



$$\sigma = \mathbb{C}_0 : (\epsilon - \epsilon^i)$$



第3回

粘塑性 (クリープ) モデル :  $\epsilon^i \equiv \epsilon^c$

粘弾性 (レオロジー) モデル :  $\epsilon^i \equiv \epsilon^v$

$$\text{流れ則 : } \dot{\epsilon}^c = \dot{\gamma} N \quad \left( \Leftarrow N \equiv \frac{\partial \Phi(\sigma, q)}{\partial \sigma} = \frac{s}{\|s\|} \right)$$

$$\epsilon^c = \int_0^t \dot{\epsilon}^c dt = \left[ \int_0^t \dot{\gamma} N dt \right]$$

畳み込み積分

$$\epsilon^v = \sum_{\alpha=1}^n \mathbb{C}_0^{-1} : \mathbb{C}_\alpha : \left[ \int_0^t 1 - \exp\left[-\frac{t-s}{\tau_\alpha}\right] \dot{\epsilon}(s) ds \right]$$

$$\mathbb{C}_0 = \mathbb{C}_\infty + \sum_{\alpha=1}^n \mathbb{C}_\alpha$$

# 非弾性構成則：内部変数を用いる定式化

構成方程式の一般形  $\sigma = \mathcal{F} \left( \underbrace{\varepsilon(x, t - \underset{0}{\overset{\infty}{s}})}, x, t \right)$

すべての変形履歴情報



(熱力学に基づいて) 内部変数を導入

内部変数を用いる  
構成方程式

$$\begin{aligned} \sigma &= \mathcal{F}(\text{ひずみ、内部変数}) \\ &= \mathcal{F}(\varepsilon, \alpha_1, \alpha_2, \dots; x, t) \\ &= \mathcal{F}(\varepsilon, \alpha; x, t) \end{aligned}$$

$$\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$$

- 変形履歴への依存性を複数の“現時刻の”内部変数で表現
- 内部変数の時間発展方程式を含む支配方程式（初期値問題）を設定

現時刻の応力は、現時刻のひずみと現時刻の内部変数の値のみに依存して決まる。つまり、現時刻の応力を知るために、過去の変形履歴すべてを変数にする必要はない。

# 樹脂の硬化プロセスを考慮した CFRPのマルチスケール解析手法の開発

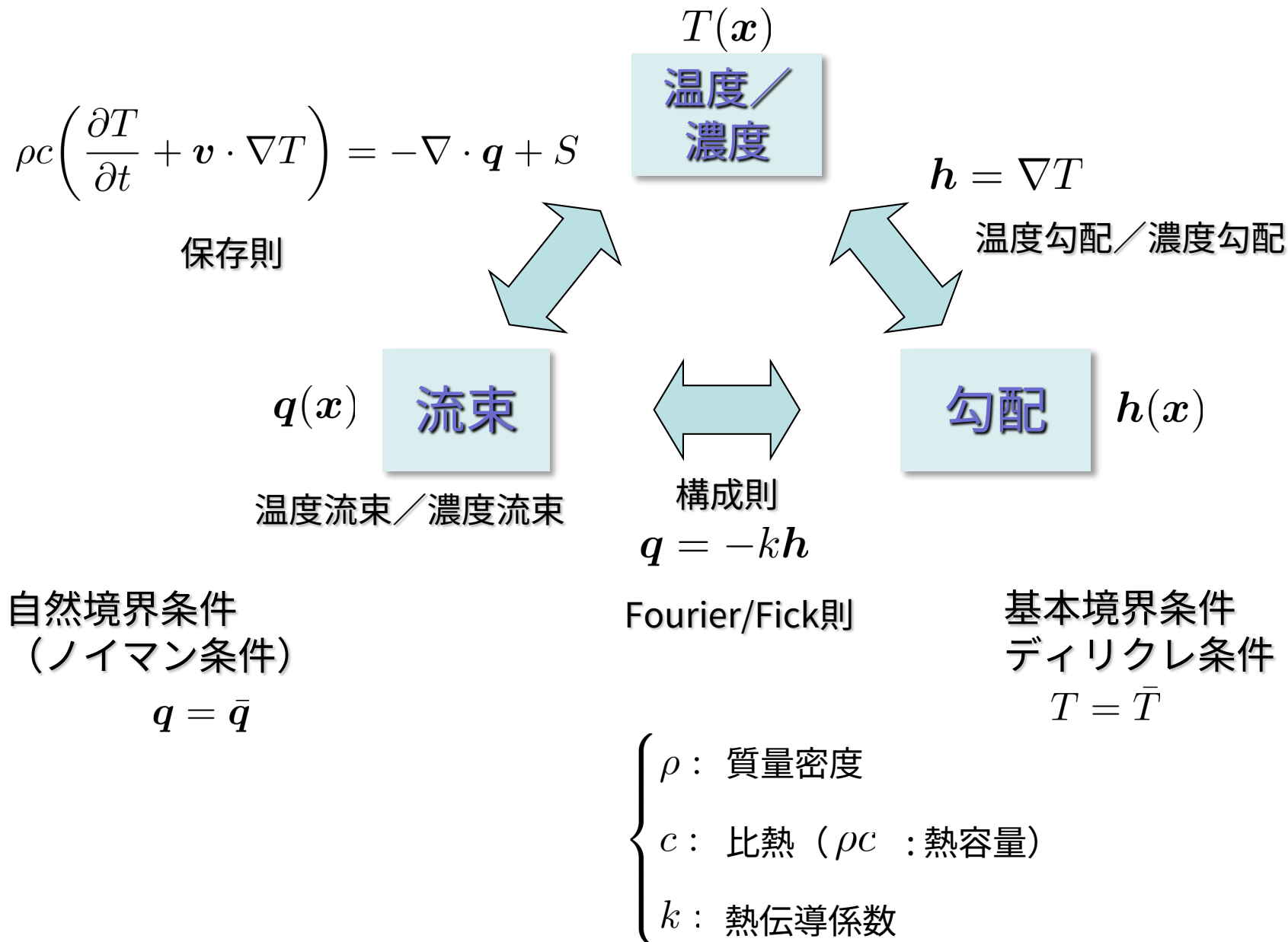
戦略的イノベーション創造プログラム(SIP)

統合型材料開発システムによるマテリアル革命 (B1)

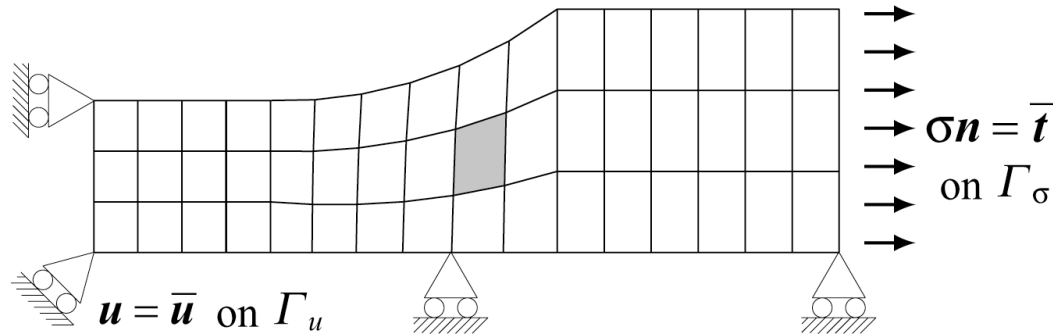
多機能CFRPの開発による高付加価値化

(2022年9月最終報告)

# 熱伝導（拡散）問題



# 変形と伝熱の連成問題



“非”機械ひずみ (変形)

$$\begin{cases} \nabla \cdot \sigma + \rho(\mathbf{g} - \ddot{\mathbf{u}}) = 0 \\ \varepsilon = \nabla^{(s)} \mathbf{u} + \alpha(T - T_0) \mathbf{1} \\ \sigma = \mathcal{F}(\varepsilon, \alpha; \mathbf{x}, t) \end{cases}$$

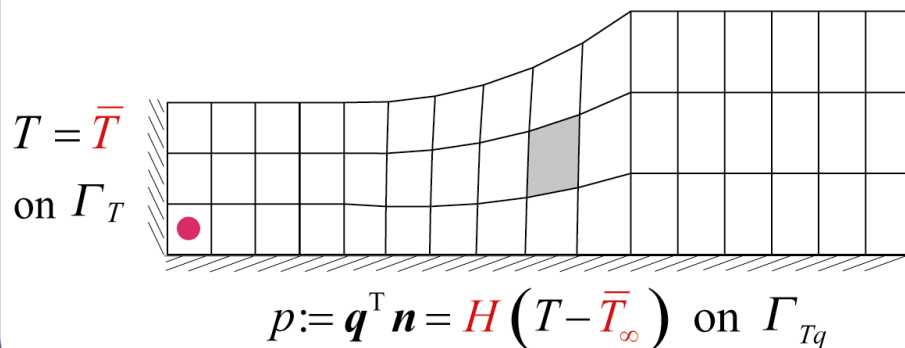
$\varepsilon(\mathbf{x})$   $\mathbf{u}, \sigma$

$T(\mathbf{x})$

線膨張係数

雰囲気温度

熱伝導係数



$$\mathbf{q}^T \mathbf{n} = \bar{\mathbf{q}} \text{ on } \Gamma_q$$

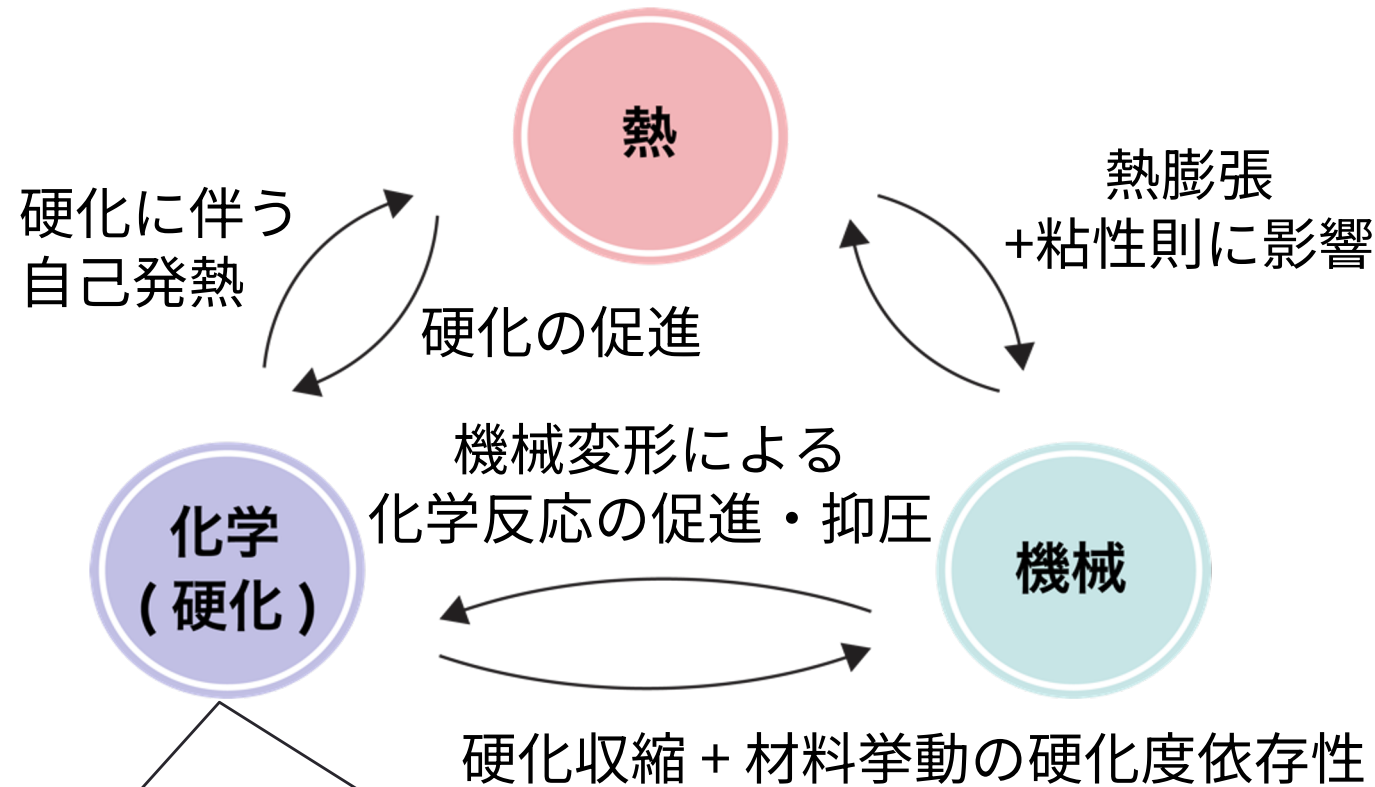
移流速度

熱源  
(変形 or 反応依存)

$$\underbrace{\rho c}_{\text{熱容量}} \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) = k \nabla^2 T + S(\varepsilon \text{ or } z)$$

熱容量

# 樹脂の熱・機械・化学連成問題



硬化度： $z = \frac{H}{H_{\text{tot}}} \quad (0 \leq z \leq 1)$

$H$  : 発熱量  
 $H_{\text{tot}}$  : 硬化過程の総発熱量

# 樹脂の応力-ひずみ関係

## ひずみの加算分解（微小変形；有限変形の場合は乗算分解）

全ひずみ  $\epsilon = \epsilon_m + \epsilon_{nm}$

機械ひずみ  
(変形が直接応力に寄与)

非機械ひずみ

$\epsilon_{nm} = (\epsilon_t + \epsilon_c) I$

熱膨張ひずみ  $\Delta \epsilon_t = \alpha \Delta T$

硬化収縮ひずみ  $\Delta \epsilon_c = \beta \Delta z$

温度 & 硬化度異存  
の材料パラメータ

## 粘弾性特性：一般化Maxwellモデル

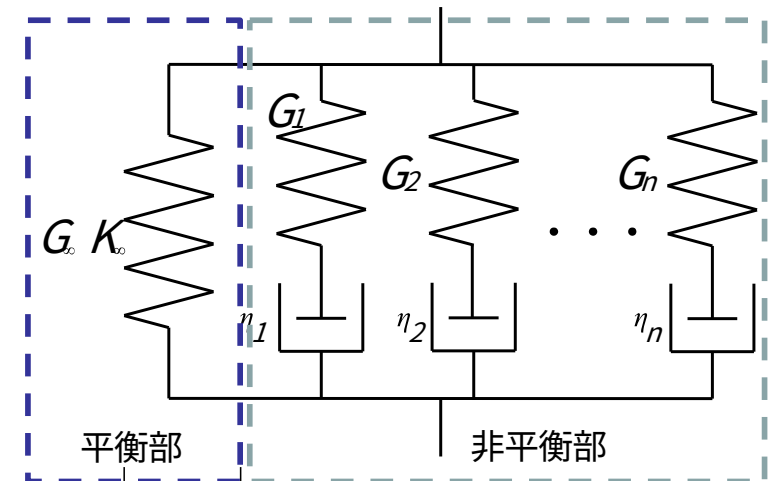
全応力  $\sigma = \sigma_\infty + \sum_{i=1}^n \sigma_i$

平衡部  
(弾性のみ)

非平衡部  
(弾性と粘性)

$\sigma_\infty = K_\infty \text{tr}(\epsilon_m) I + 2G_\infty \text{dev}(\epsilon_m)$

$\sigma_i = G_i \exp\left(-\frac{t}{\tau_i}\right) \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{s}{\tau_i}\right) \frac{d}{ds} \text{dev}(\epsilon_m) ds$



(注意：非平衡部はせん断成分のみ考慮)

# 樹脂の材料パラメータ同定-1



## 実験データ

実験データの取得（提供：東レ(株) 佐道様）

1. 示差走査熱量測定（DSC）  
硬化度とガラス転移温度を算出
2. 動的粘弾性測定（DMA）  
粘弾性特性（貯蔵弾性率，損失弾性率， $\tan\delta$ ）を測定
3. 熱硬化収縮測定  
加熱・硬化中の樹脂の体積変化を測定

## 同定対象と方法

実験データをもとに，差分進化を用いて以下の材料特性を同定

（下記以外のパラメータはSaito et al.(2021)<sup>[1]</sup>の値を使用）

パラメータ同定には差分進化（Differential evolution）（遺伝的アルゴリズムの1種）を使用

1. ガラス転移温度
2. 緩和弾性率
3. 硬化発展
4. 非機械変形特性（熱膨張係数，硬化収縮係数）

[1] Saito, Yamanaka, Matsubara, Okabe, Moriguchi, Terada, *IJNME*. 2021

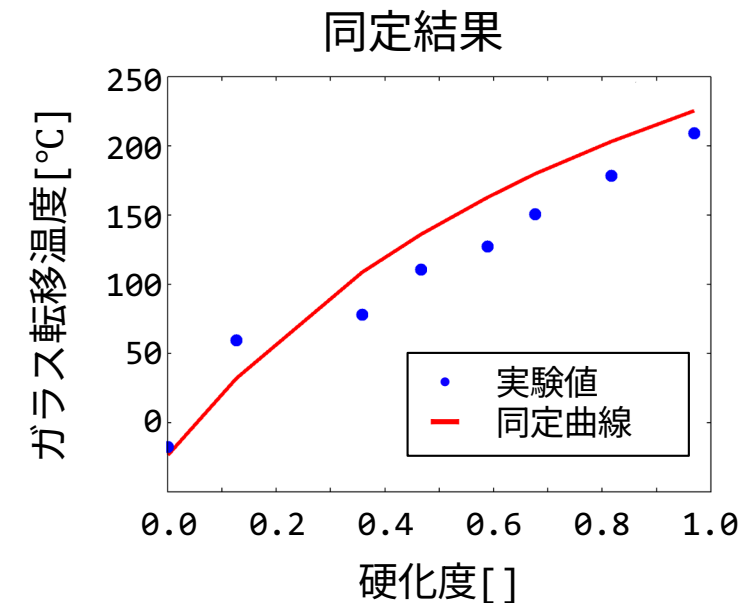
# 樹脂の材料パラメータ同定-2

ガラス転移温度      : 同定対象パラメータ

- DSCの結果から各硬化度でのガラス転移温度を算出し、次式でフィッティング

$$T_g(z) = \frac{\lambda z (T_{g\infty} - T_{g0})}{1 - (1 - \lambda) z} + T_{g0}$$

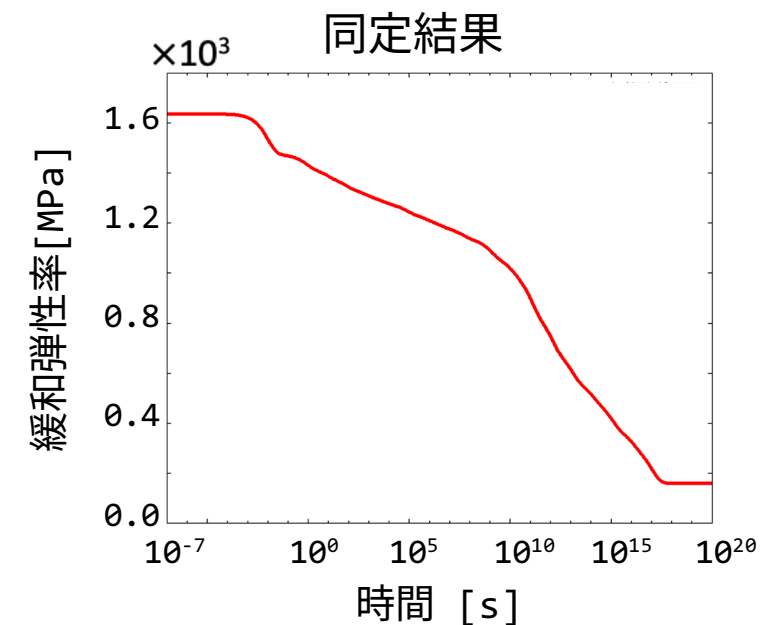
$z$ : 硬化度



緩和弾性率      : 同定対象パラメータ

- 一般化Maxwellモデルの緩和弾性率を同定
  - 平行部／非平行部の弾性率  $E^\infty / E_i$
  - 緩和時間  $\tau_i$

$$E = E^\infty + \sum_{i=1}^n E_i \exp\left(-\frac{t}{\tau_i}\right)$$



# 樹脂の材料パラメータ同定-3

## 硬化特性と非機械変形特性

- 硬化中の樹脂の収縮量の実験結果から  
以下のパラメータを同定。      : 同定対象

硬化発展則

$$\dot{z} = A_z \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right) z^m (1-z)^n \quad z: \text{硬化度}$$

非機械変形勾配

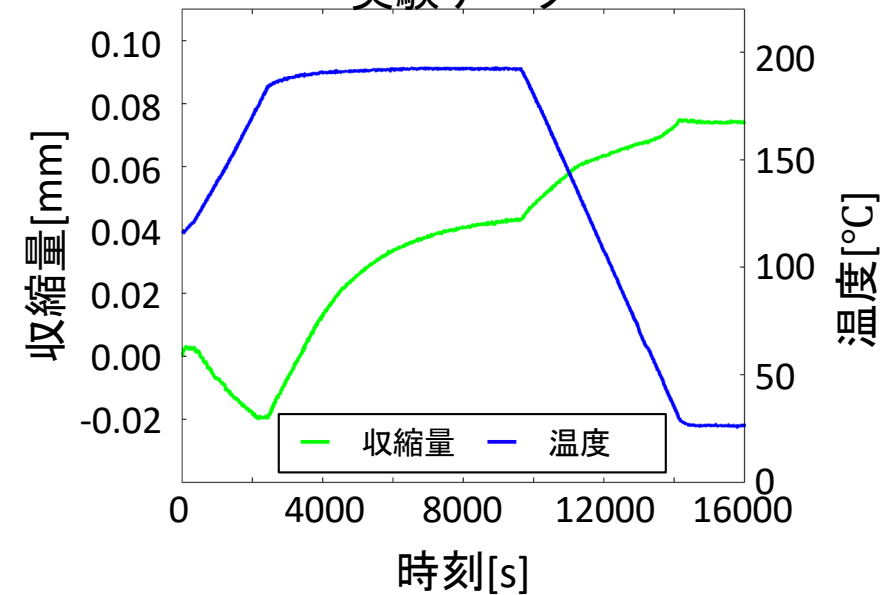
$$F^{nm}(z, T) = \alpha^{th}(z, T) (T - T_R) \mathbf{I} + \beta_{ch} z \mathbf{I}$$

熱膨張係数 (CTE)

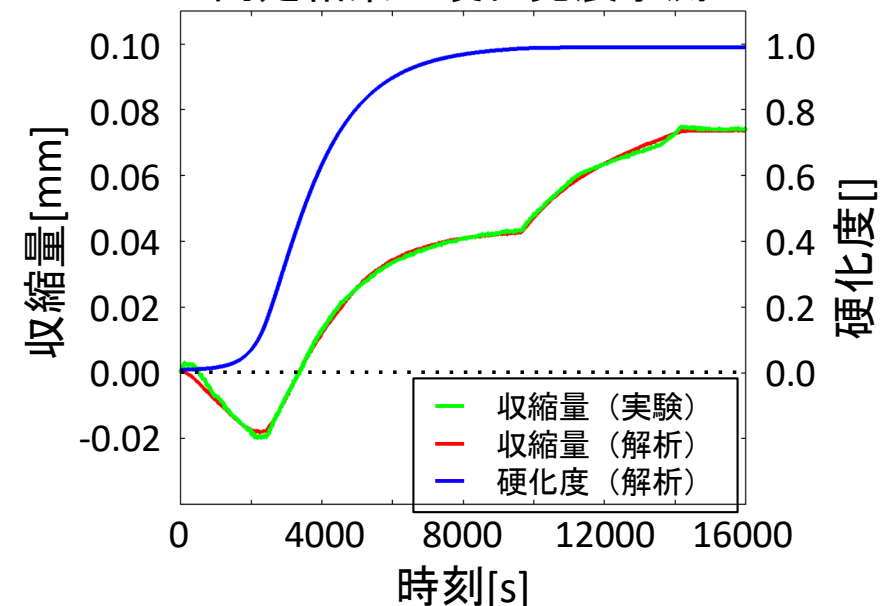
$$\alpha^{th}(z, T) = \alpha_0^{th} z + \alpha_{\infty}^{th}(z, T) (1-z)$$

$$\alpha_{\infty}^{th}(z, T) = \frac{\alpha_{\infty,1} + \alpha_{\infty,2}}{2} + \frac{(\alpha_{\infty,1} - \alpha_{\infty,2}) \arctan\{C_{\alpha}(T - T_g(z))\}}{2\pi}$$

実験データ



同定結果と硬化発展予測



# 同定したパラメータの検証：実験

## 実験概要

未硬化樹脂を塗布したシリコンウエハの硬化中の変位を計測

実施担当：東レ（株） 佐道様



実物



樹脂  
シリコンウエハ

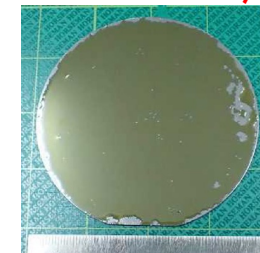
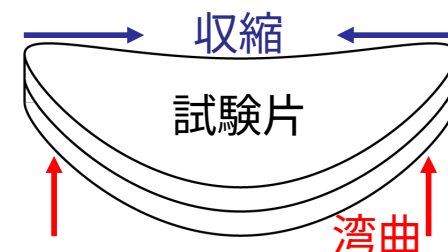
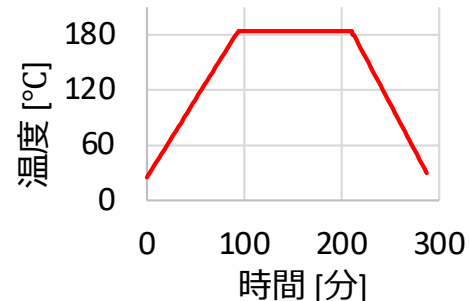
寸法 [ $\mu\text{m}$ ]

半径 6600

厚さ 樹脂：40  
シリコン：400

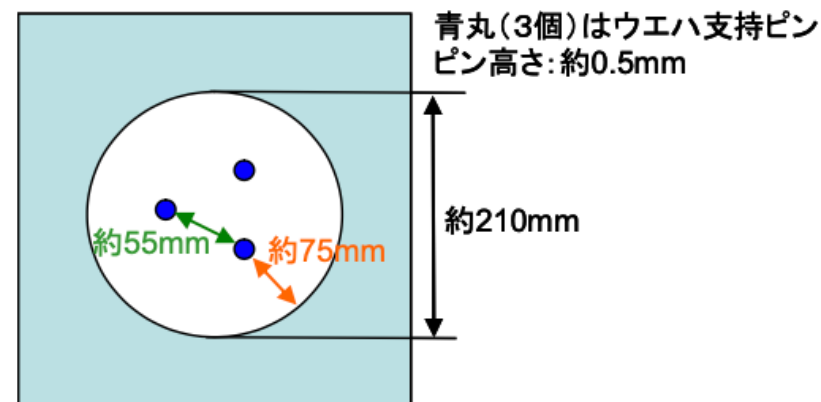
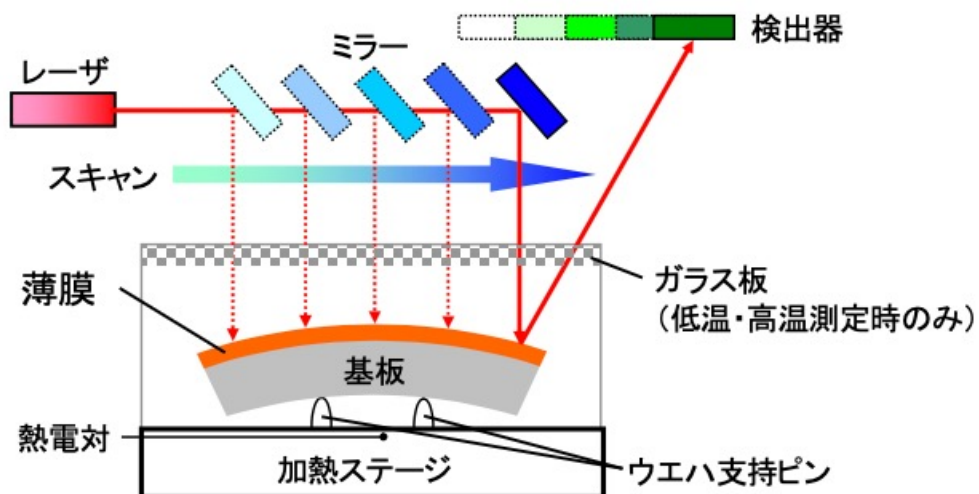


温度プロファイル



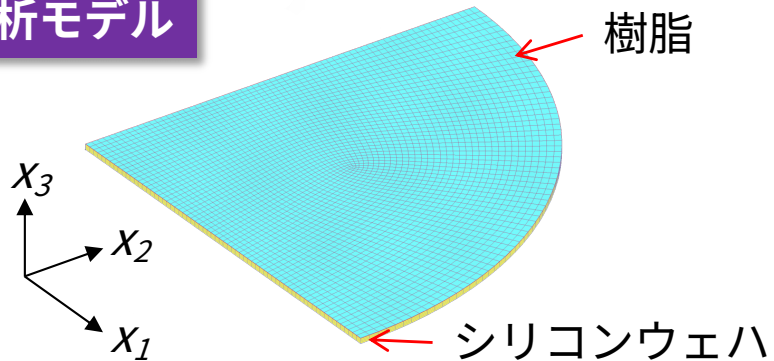
## 実験装置

下図の装置で、試験片の中央から半径3000[ $\mu\text{m}$ ]の範囲の変位を測定



# 同定したパラメータの検証：解析

## 解析モデル



要素形状 20節点六面体

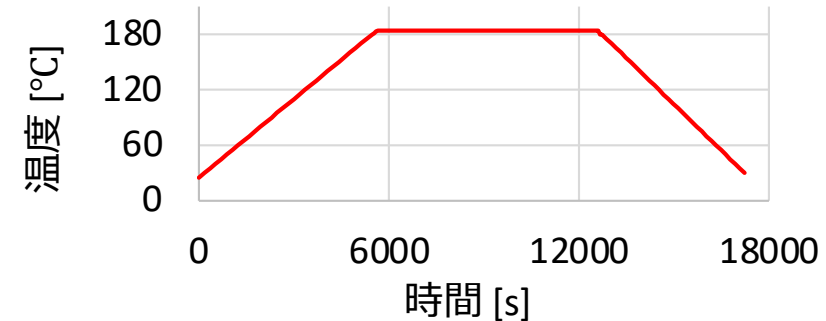
要素数 3468

備考 4分の1をモデル化

## 境界条件

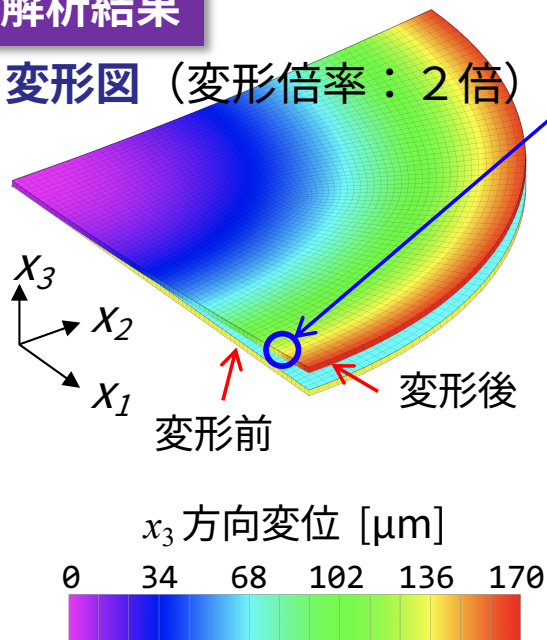
- ・ シリコンウェハ中央下面の全方向変位を拘束
- ・ 対称境界面の法線方向変位を拘束
- ・ 対称境界面以外に熱伝達境界条件

雰囲気温度プロファイル

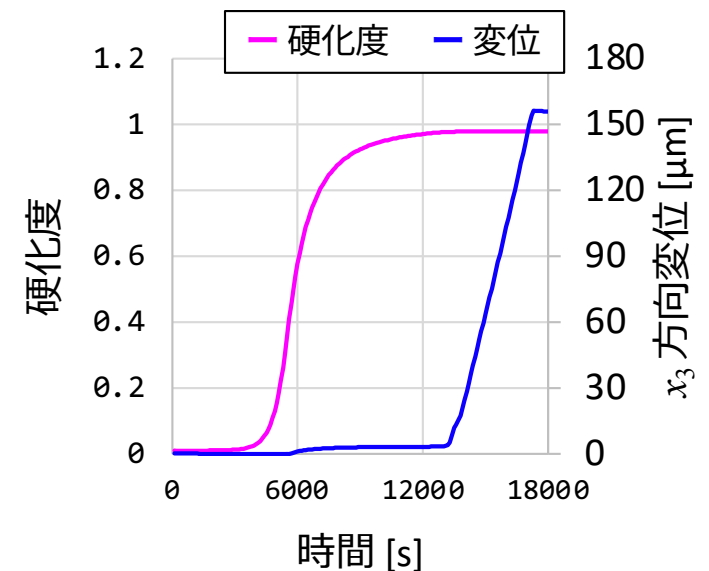
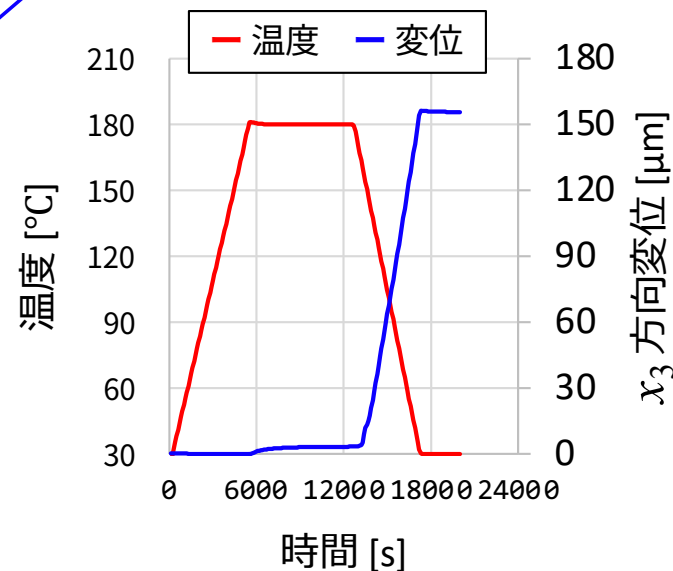


## 解析結果

変形図 (変形倍率：2倍)

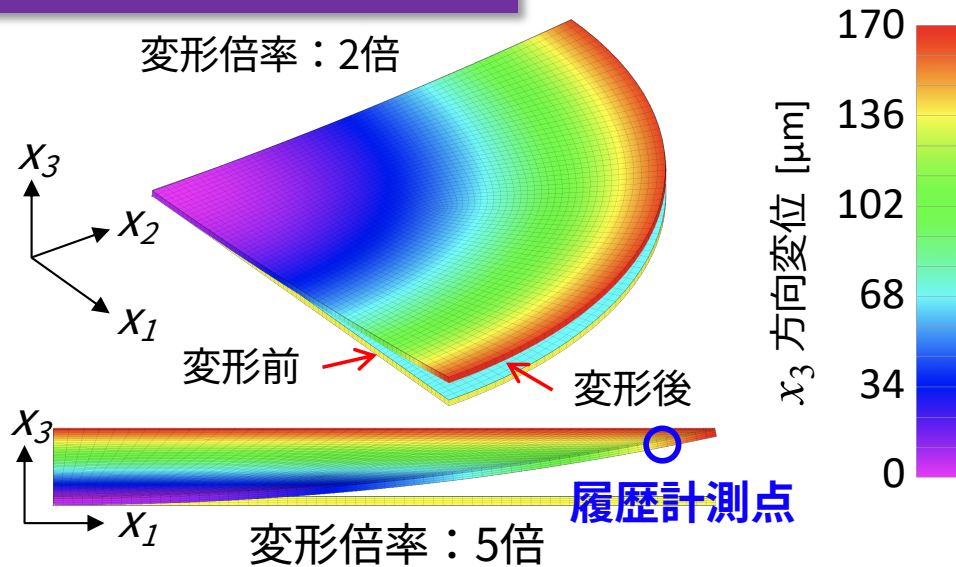


計測点における温度・硬化度・ $x_3$ 方向変位の履歴

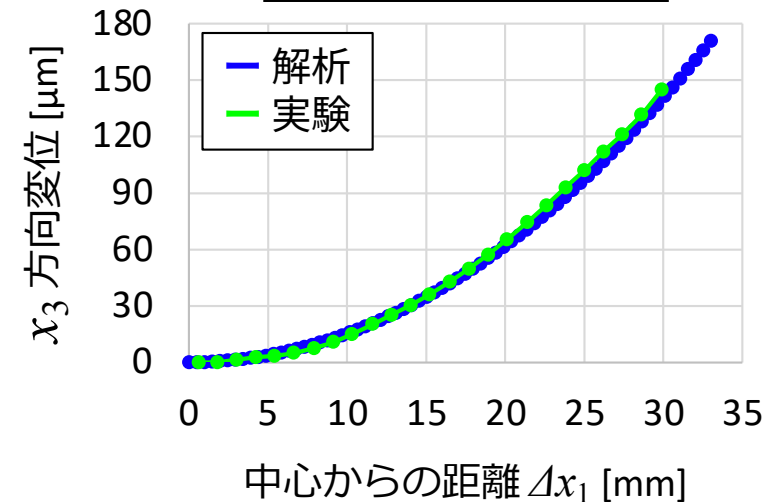


# 同定したパラメータの検証：比較

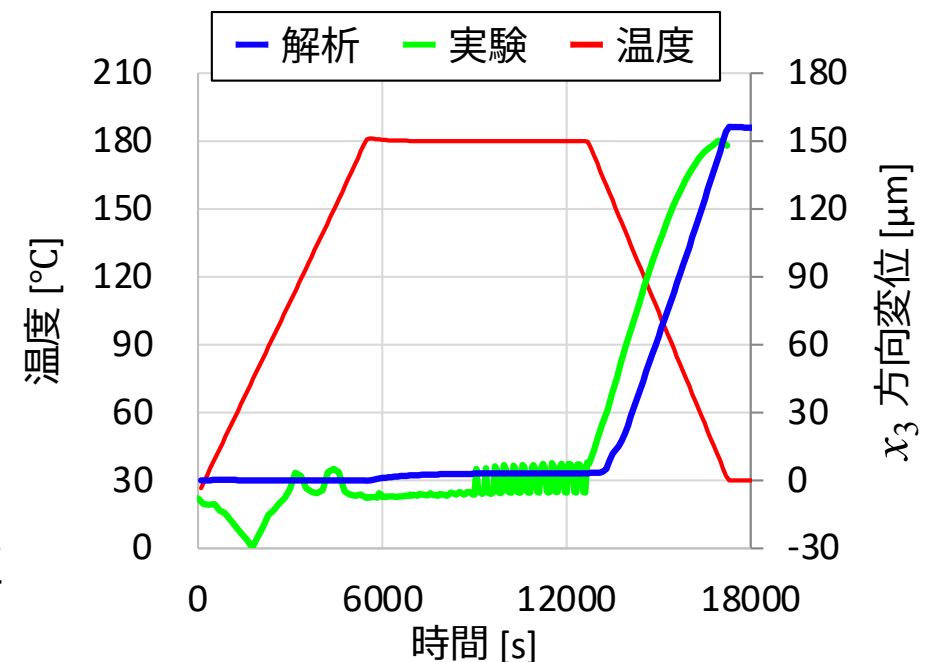
## 解析結果（最終ステップ）



## 上側表面の変形状



## 計測点における $x_3$ 方向変位時刻歴



## 解析結果からの推定

加熱中と冷却後の変形が概ね一致  
⇒ 弾性率，線膨張係数，硬化収縮率および  
硬化途中の時間-温度換算則の  
パラメータフィッティングは良好

冷却中の変位履歴において時間方向にズれる  
(解析の反り発生が600秒程度遅れる)  
⇒ 硬化後の時間-温度換算則のパラメータは要微修正

# 粘弾性の効果

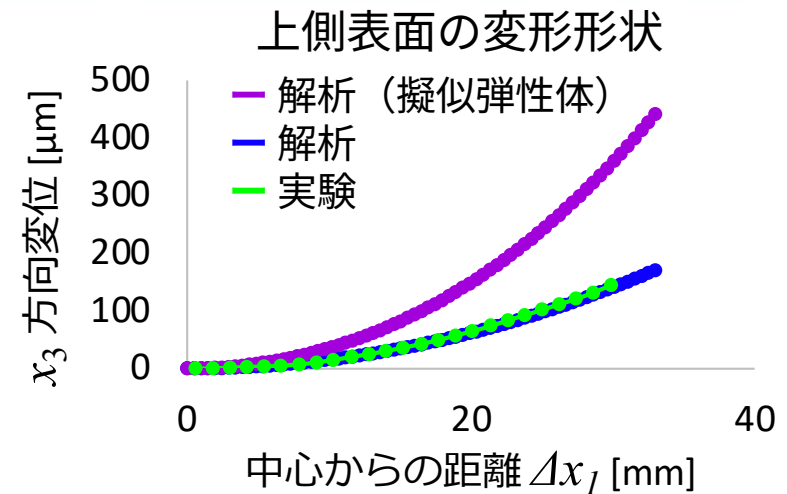
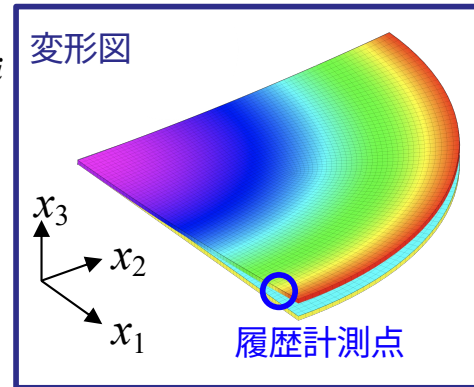
全応力：  $S = S_{\infty} + \sum_{i=1}^{n_{\text{Maxwell}}} R_i$

平衡部応力：

$$S_{\infty} = (F^{\text{th}} F^{\text{ch}})^{-1} \check{S}_{\infty} (F^{\text{th}} F^{\text{ch}})^{-T}$$

非平衡部応力：

$$R_i = \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_i}\right) \dot{S}_i ds, \quad S_i = (F^{\text{th}} F^{\text{ch}})^{-1} \check{S}_i (F^{\text{th}} F^{\text{ch}})^{-T}$$



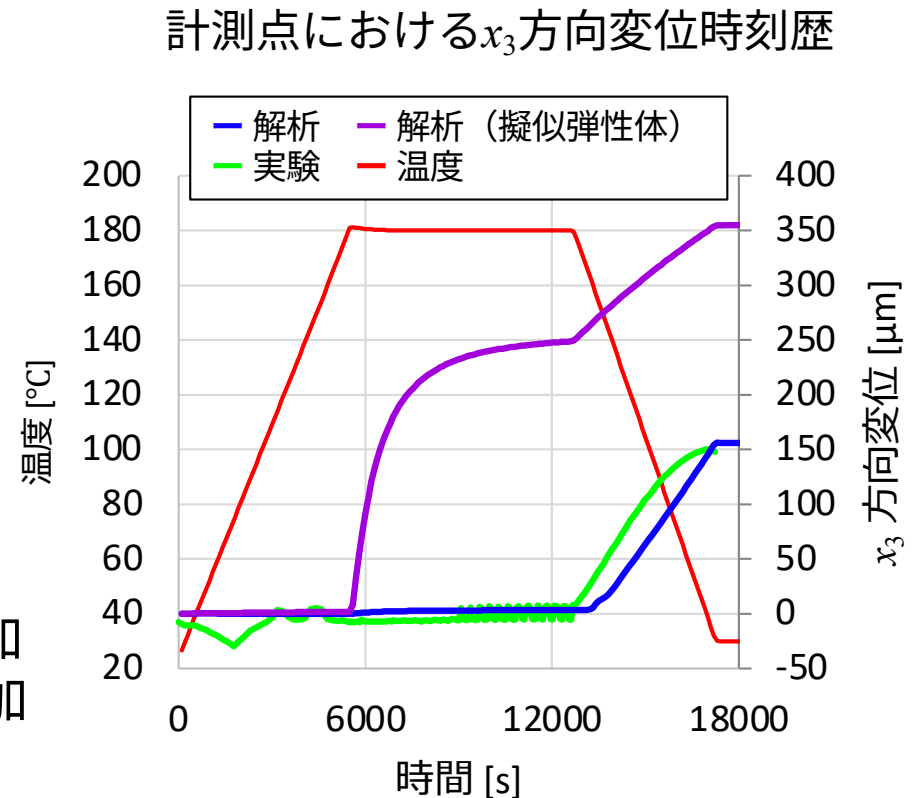
非常に大きな緩和時間  $\tau_i$  を用いることで樹脂を擬似的に弾性体として解析を実施

実際の緩和時間を使用：

- 冷却開始後(13000秒付近)から変位が発生
- 変形履歴・形状ともに実験と一致

擬似弾性体：

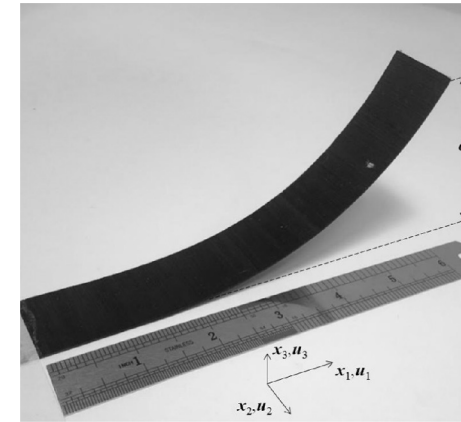
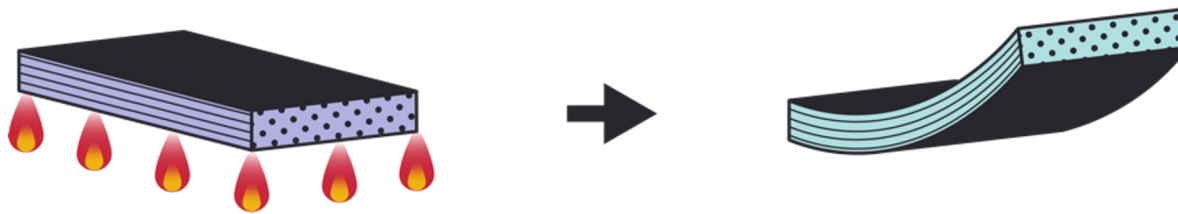
- 加熱中(6000秒付近：ゲル化時)から変位増加
- 加熱中の変位増加に伴って最終変形量も増加



# 樹脂の熱変形と硬化収縮を考慮した CFRPのそり変形解析

## 目的

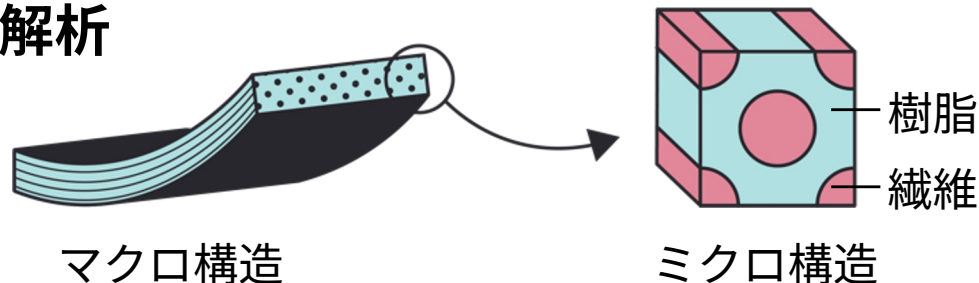
繊維強化樹脂(FRP)の製造過程加熱により樹脂が硬化する際に発生する変形や内部応力の評価



[1] Oleksandr et al, *Composites Part A*, 2017

- 熱変形と硬化収縮・熱拡散・硬化に伴う自己発熱など多重物理場・化学相互作用（熱・機械・化学連成）
- ミクロ構造の非均質性によるミクロスケールおよびマクロスケールに生じる内部応力（異なる空間スケール間の連成）

## マルチスケール解析



# 均質化法に基づく分離型マルチスケール解析

## ミクロスケール

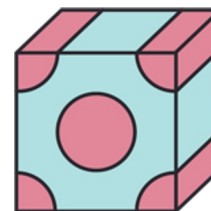
樹脂

有限変形粘弾性+熱変形+硬化収縮

繊維

超弾性+熱変形

硬化度に対して  
線形を仮定



樹脂

線形熱伝導

繊維

線形熱伝導

数値材料試験（ミクロ変形解析）<sup>[4]</sup>

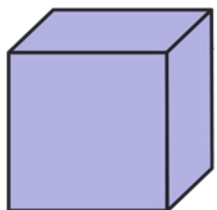
数値材料試験<sup>[4]</sup>  
（ミクロ熱伝導解析）

マクロ粘弾性係数+マクロ熱膨張・硬化収縮係数の同定

マクロ熱伝導率の同定

## マクロスケール

繊維の方向特性が反映された異方性熱・機械・化学連成構成則

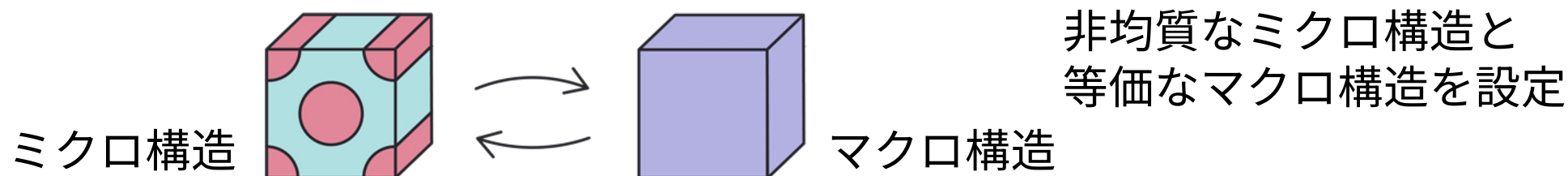


有限変形異方性粘弾性+熱変形+硬化収縮

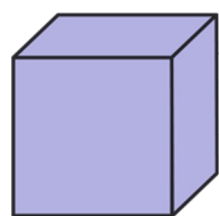
線形異方性熱伝導

[4] 寺田賢二郎, 平山紀夫, 山本晃司, 数値材料試験-有限要素法によるマルチスケール解析-, 丸善出版, 2021

# 均質化法に基づく分離型マルチスケール解析



## ① マクロ構成則の設定

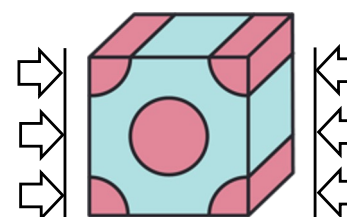


$$S = \underline{\mathcal{F}}(C)$$

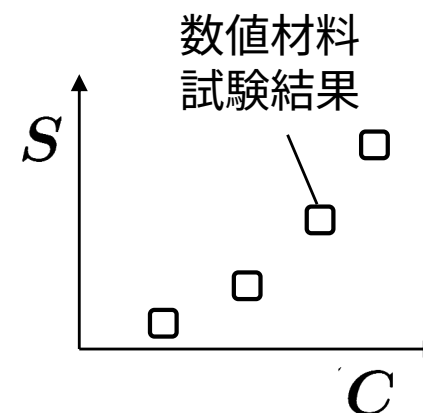
マクロ構成則

$S$ : 2ndPK応力  $C$ : 右CGテンソル

## ② 数値材料試験

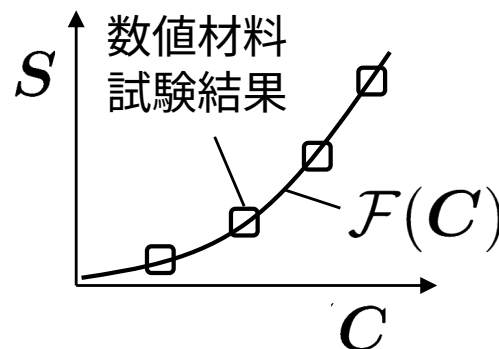


均質化法に基づく

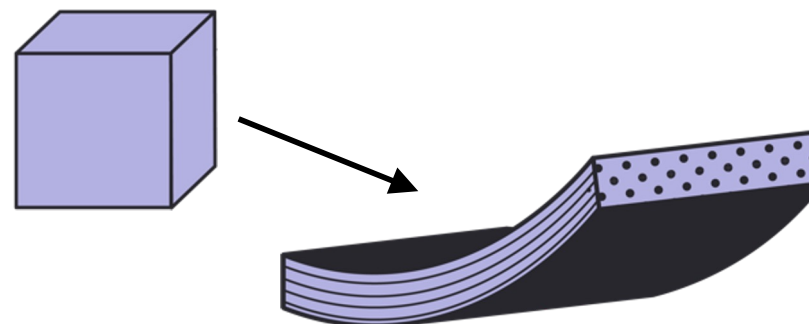


## ③ マクロ材料パラメータ同定

数値材料試験結果を  
再現できるように  
マクロ材料  
パラメータを同定



## ④ マクロ解析



## 機械問題

$$\text{全応力 } S = S_{\infty} + \sum_{i=1}^{n_{\text{Maxwell}}} R_i$$

$$\text{平衡部応力 } S_{\infty} = \underbrace{\left( F_{\infty}^{\text{th}} F_{\infty}^{\text{ch}} \right)^{-1}}_{\text{硬化収縮}} \left( \check{S}_{\infty}^{\text{iso}} + \check{S}_{\infty}^{\text{trn}} \right) \underbrace{\left( F_{\infty}^{\text{th}} F_{\infty}^{\text{ch}} \right)^{-T}}_{\text{熱膨張}}$$

$$\text{非平衡部応力 } R_i = \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_i}\right) \dot{S}_i ds, \quad S_i = \underbrace{\left( F_i^{\text{th}} F_i^{\text{ch}} \right)^{-1}}_{\text{硬化収縮}} \left( \check{S}_i^{\text{iso}} + \check{S}_i^{\text{trn}} \right) \underbrace{\left( F_i^{\text{th}} F_i^{\text{ch}} \right)^{-T}}_{\text{熱膨張}}$$

緩和の温度依存性

## 運動方程式

$$\text{div}_p \mathbf{P} + \bar{\mathbf{b}} = \bar{\rho} \ddot{\mathbf{u}} \quad \text{in } \Omega$$

$$\bar{\mathbf{t}} = \mathbf{P} \mathbf{m} \quad \text{in } \partial\Omega_t$$

$$(\mathbf{P} = \mathbf{F} \mathbf{S})$$

## 熱伝導問題 (エネルギー保存則)

$$\rho_0 c \dot{\theta} = -\text{div} \mathbf{Q} + \underbrace{\mathcal{A} \dot{z}}_{\text{硬化発熱}} + \underbrace{\left( C_{\infty}^{C\theta} + \sum_{i=1}^{n_{\text{Maxwell}}} C_i^{C\theta} \right) : \dot{\mathbf{C}}}_{\text{熱・機械連成項}} + \underbrace{\left( C_{\infty}^{z\theta} + \sum_{i=1}^{n_{\text{Maxwell}}} C_i^{z\theta} \right) : \dot{\mathbf{z}}}_{\text{熱・化学連成項}}$$

## 硬化発展則

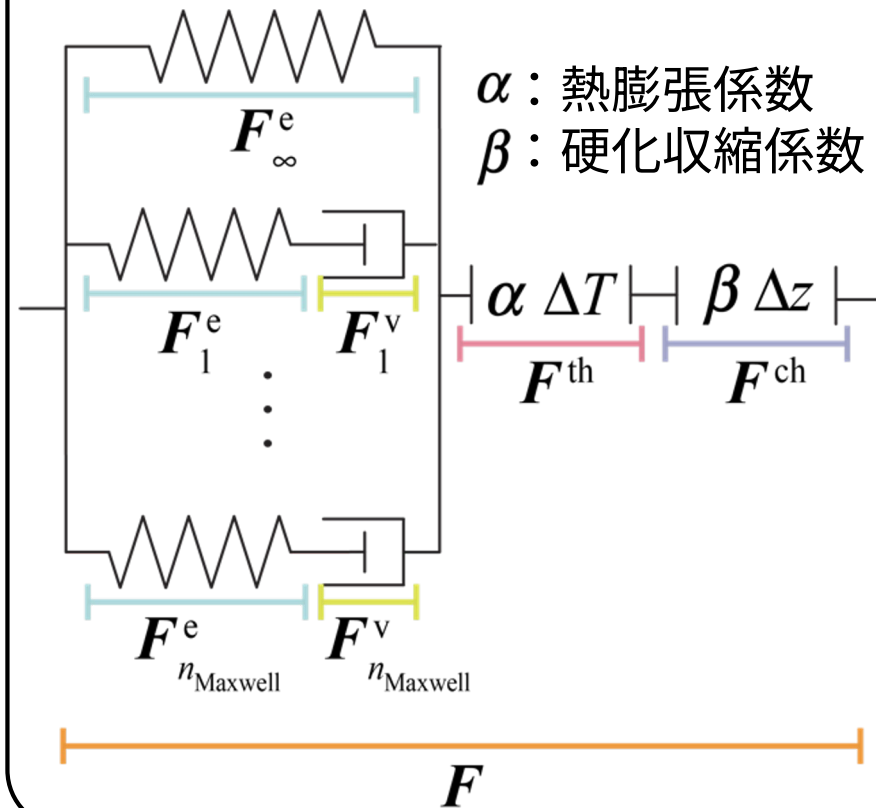
$$\dot{z} = A \exp\left(-\frac{\Delta E}{R\theta}\right) \left\langle z^{m_z} (1-z)^{n_z} + \underbrace{\frac{1}{\rho_0 a H_{\text{tot}}} \left( \mathcal{A}_{\infty} + \sum_{i=1}^{n_{\text{Maxwell}}} \mathcal{A}_i \right)}_{\text{化学・機械連成項}} \right\rangle$$

温度依存性

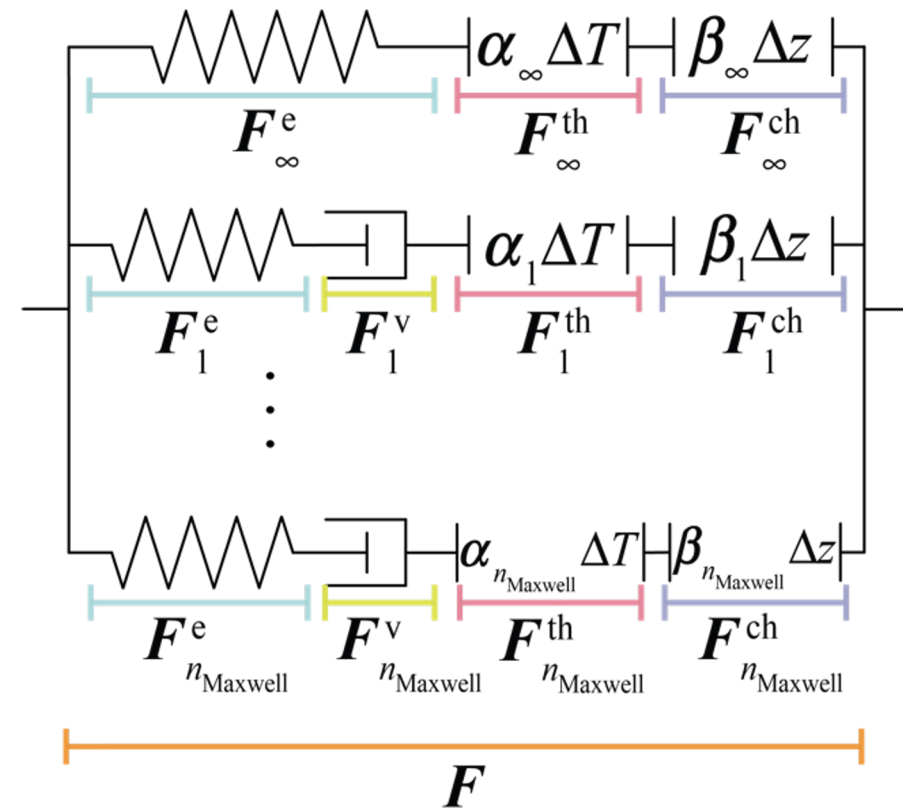
導出の詳細は[1]と付録Bを参照

# FRPのマクロ異方性熱変形・硬化収縮

## 従来のレオロジーモデル



## 提案した異方性レオロジーモデル<sup>[1]</sup>



微小変形：

$$\varepsilon = \varepsilon_{\infty}^e + \varepsilon_{\infty}^{th} + \varepsilon_{\infty}^{ch} = \varepsilon_i^e + \varepsilon_i^v + \varepsilon_i^{th} + \varepsilon_i^{ch}$$

弾性変形 熱変形 硬化収縮 粘性変形

有限変形：

$$F = F_{\infty}^e F_{\infty}^{th} F_{\infty}^{ch} = F_i^e F_i^v F_i^{th} F_i^{ch}$$

[1] Saito R, Yamanaka Y, Matsubara S, Okabe T, Moriguchi S, Terada K, A decoupling scheme for two-scale finite thermoviscoelasticity with thermal and cure-induced deformations. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 2021;122:1133–1166.

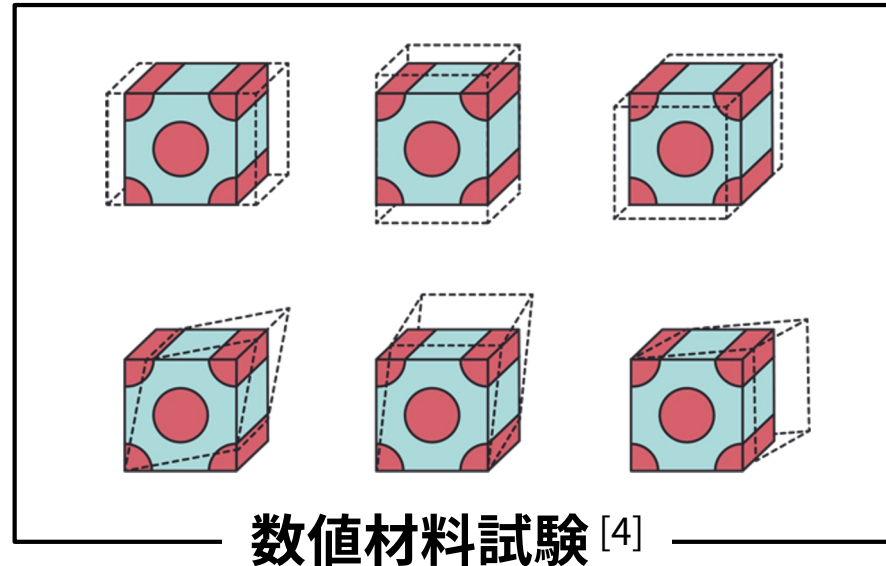
# マクロ材料パラメータの同定

～粘弾性・熱膨張・硬化収縮～



入力値：  
マクロ変形勾配

$$\mathbf{F}^\alpha \quad (\alpha = 1, \dots, 6)$$



応答値：  
マクロ応力

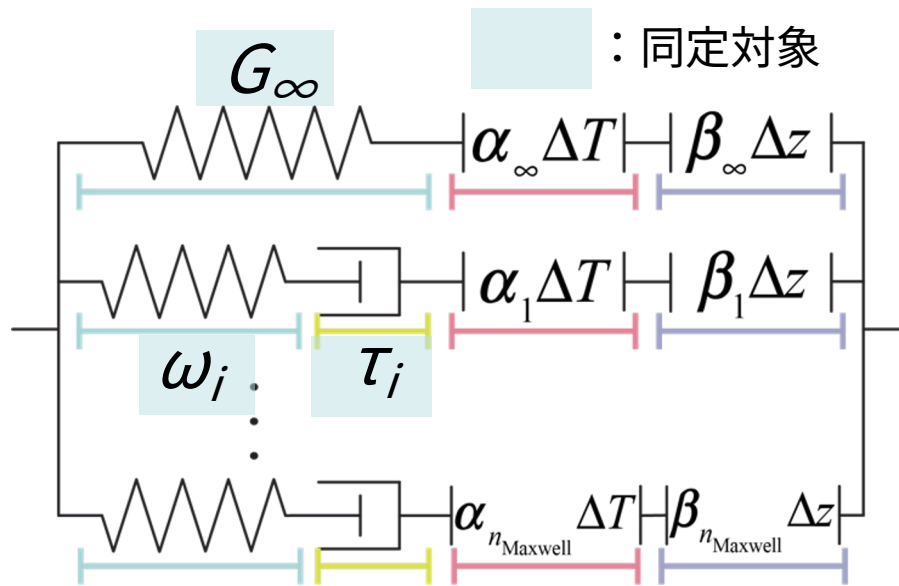
$$\hat{\mathbf{S}}^\alpha \quad (\alpha = 1, \dots, 6)$$

マクロ材料パラメータ  $(p_1, \dots, p_n)$  を決定するための誤差の最小化問題

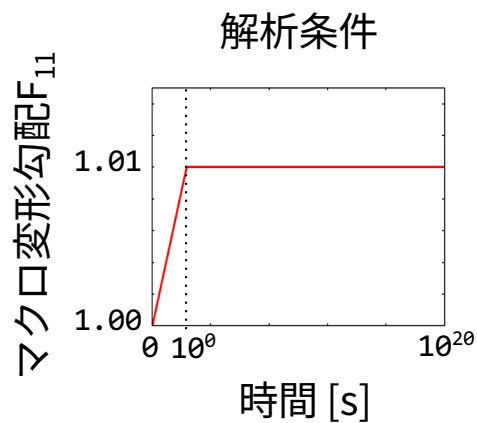
$$\min_{p_1, \dots, p_n} \chi, \quad \chi = \frac{1}{n_{\text{step}}^\alpha} \sum_{i=1}^{n_{\text{step}}^\alpha} \frac{\left| \hat{\mathbf{S}}_i^\alpha - \mathbf{S}(\mathbf{F}_i^\alpha) \right|^2}{\left| \hat{\mathbf{S}}_i^\alpha \right|^2}$$

$\mathbf{S}(\mathbf{F}_i^\alpha)$ : 係数  $p_1, \dots, p_n$  を適用した場合のマクロ材料構成則（提案式）の応答値

# マクロ異方性粘弾性係数の同定

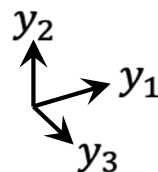


例： $y_1$ - $y_1$ 方向引張試験

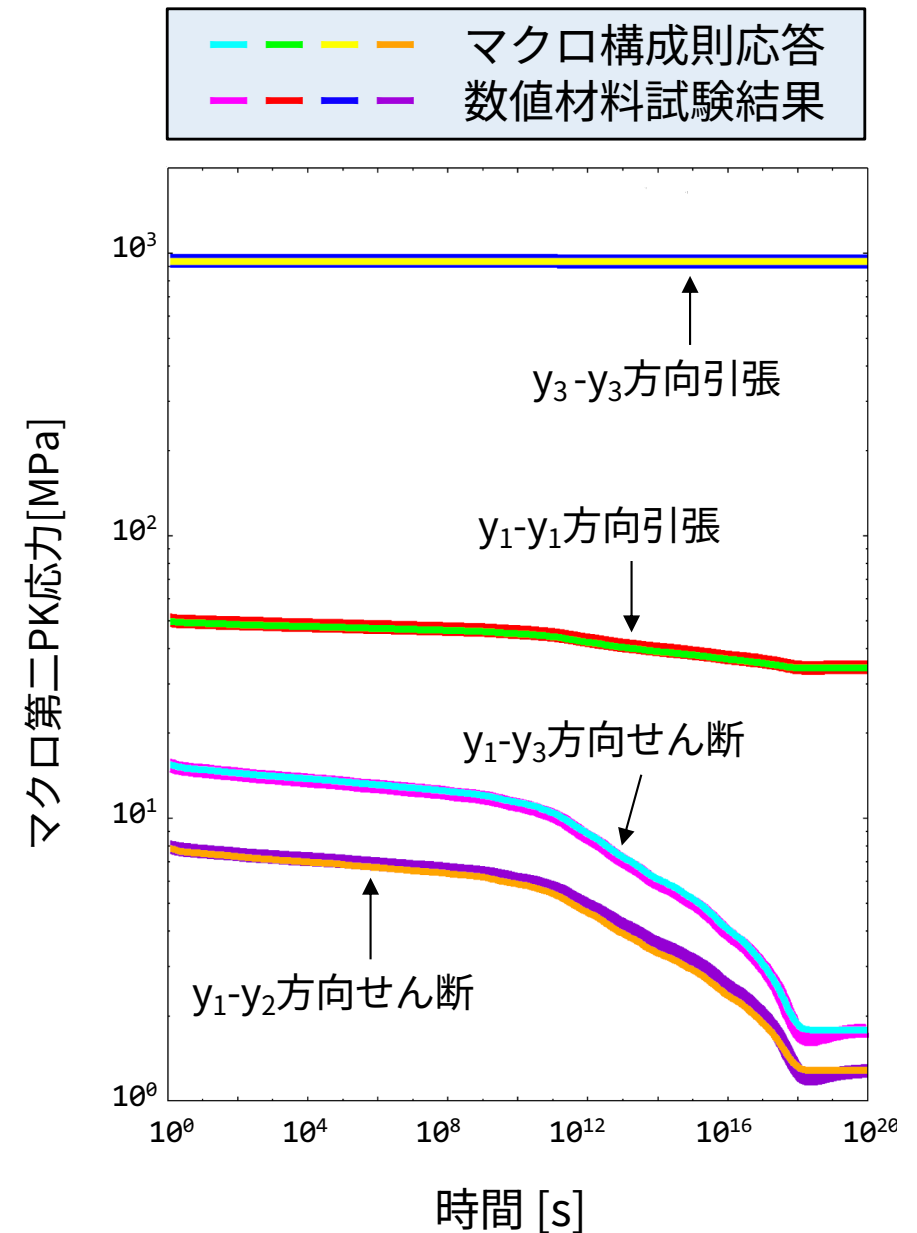
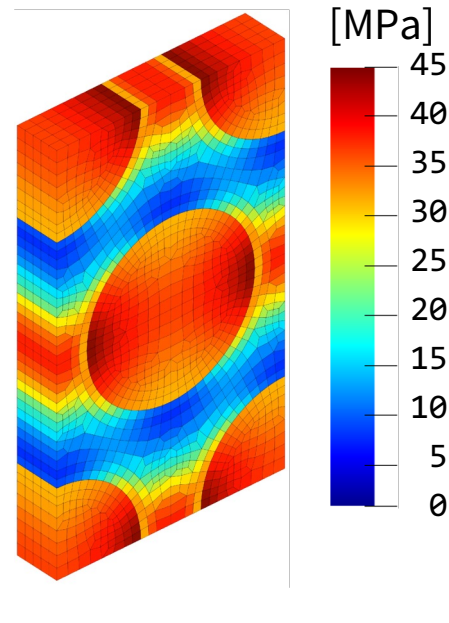


その他の成分は常に：

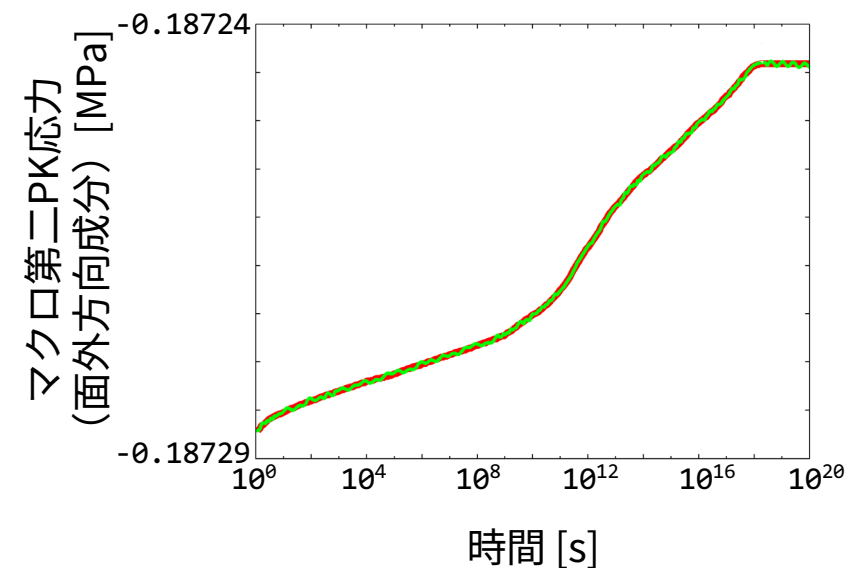
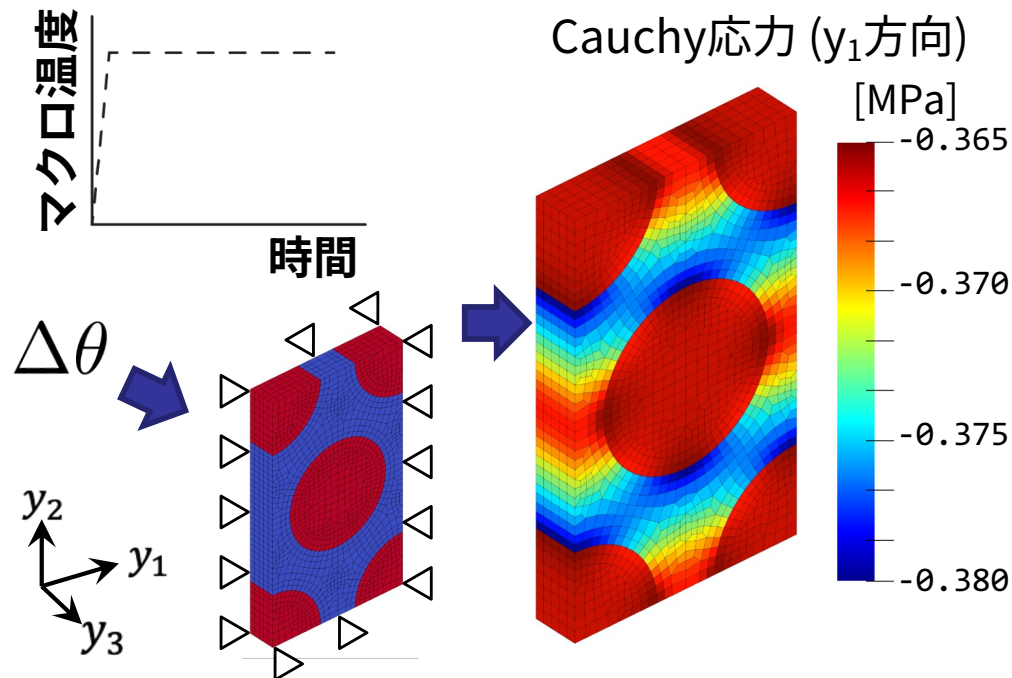
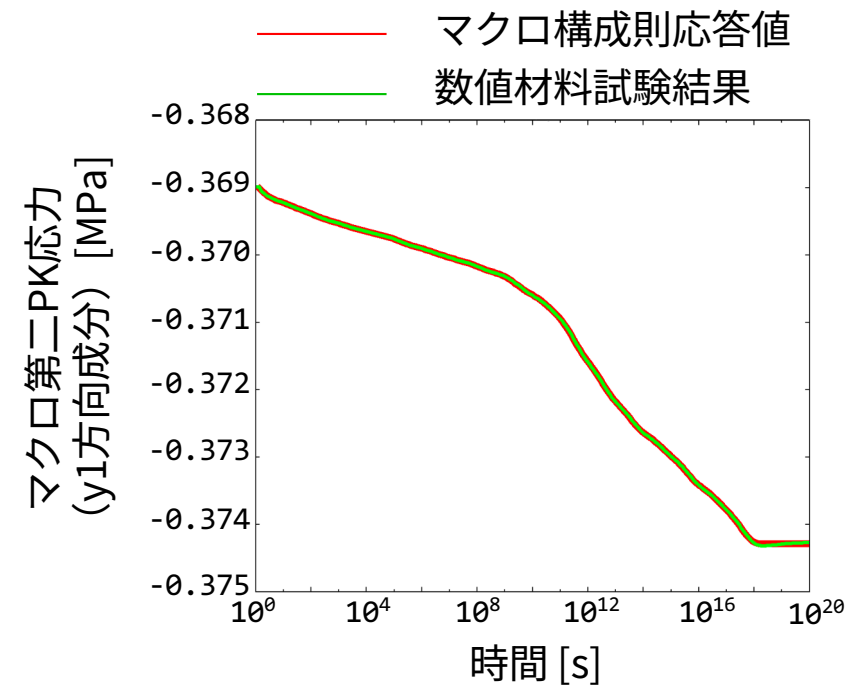
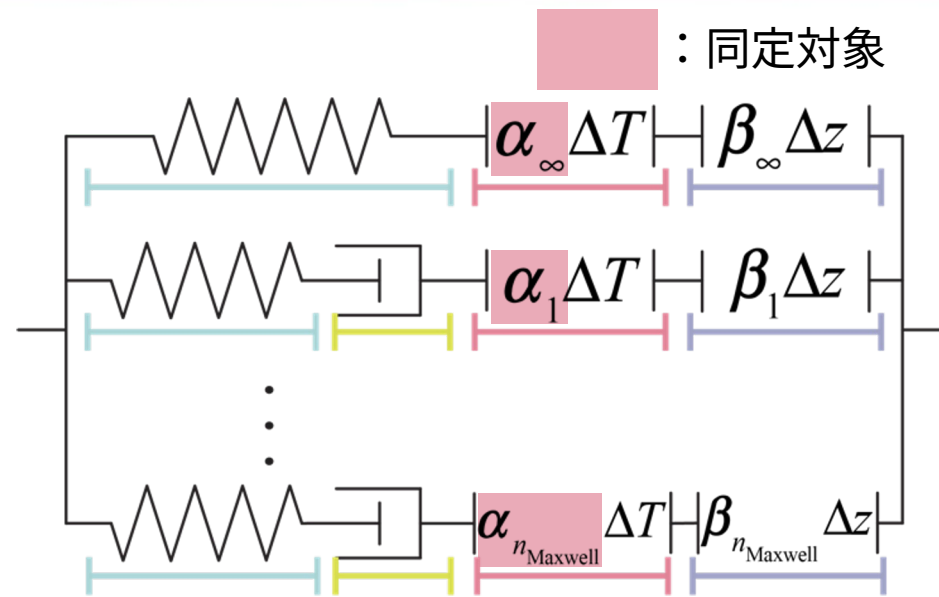
$$F_{ij} = \begin{cases} 1.00 & (i = j, i \neq 1) \\ 0.00 & (i \neq j) \end{cases}$$



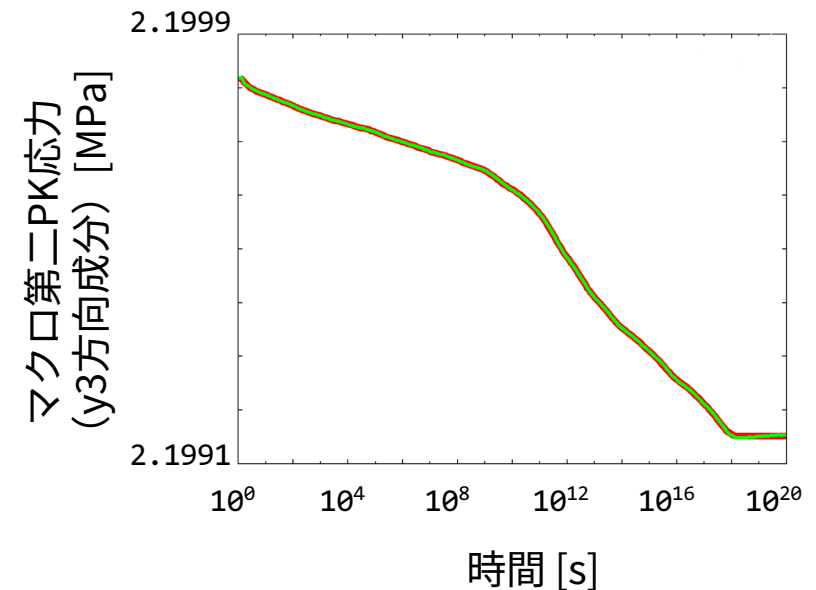
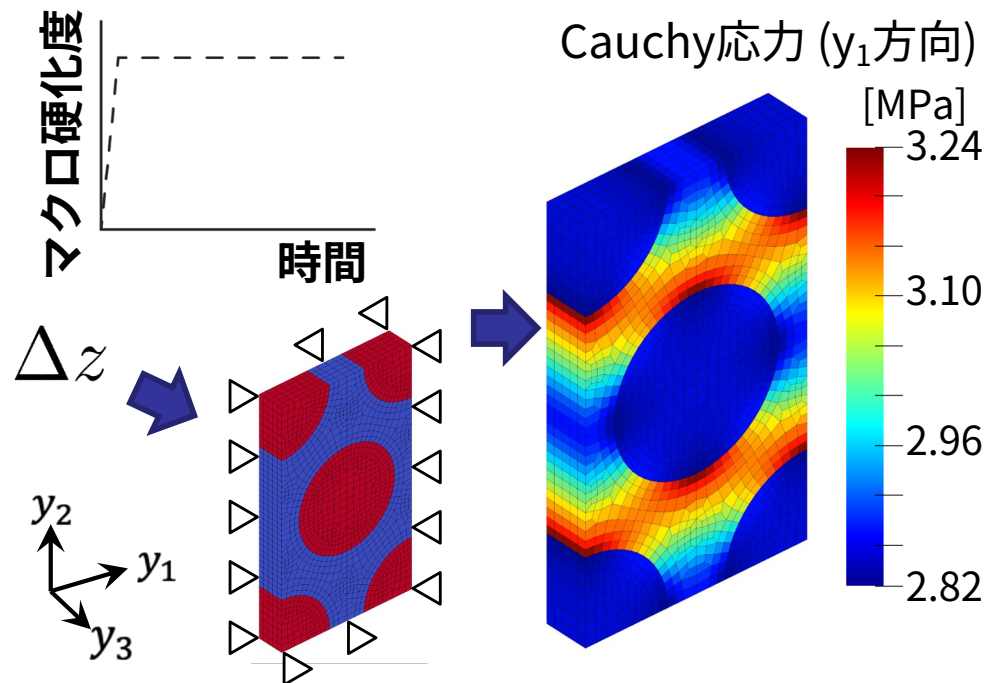
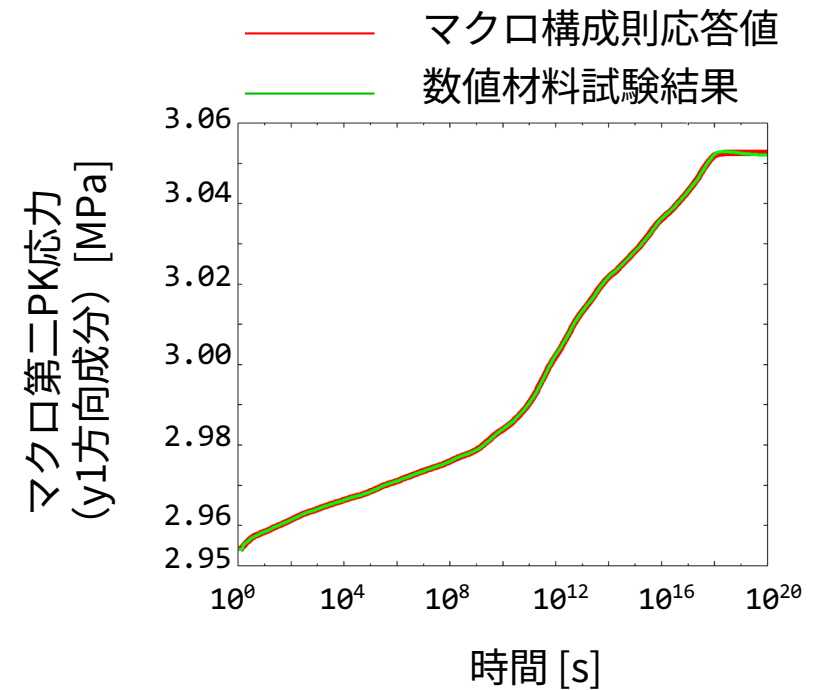
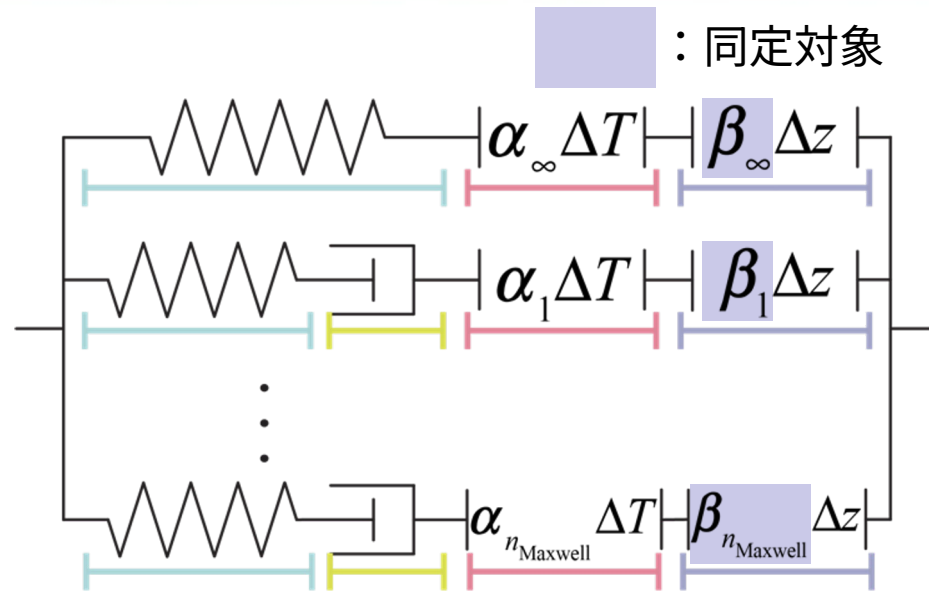
von Mises 応力



# マクロ異方性熱膨張係数の同定



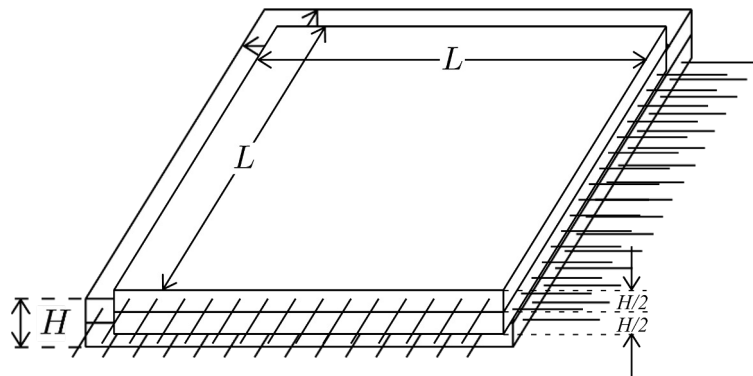
# マクロ異方性硬化収縮係数の同定



# マクロ熱座屈解析：概要と実験

**対象**  $0^\circ$ - $90^\circ$  反対称FRP積層板（2層）  
（東レ様提供のプリプレグを使用）

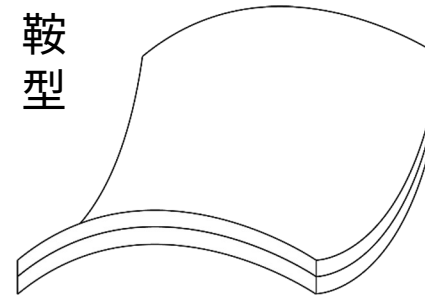
寸法と材料特性（剛性 & 熱膨張）に依存 [2]



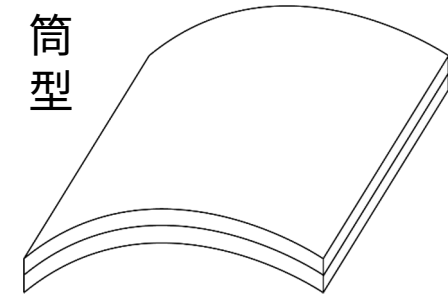
硬化



鞍型

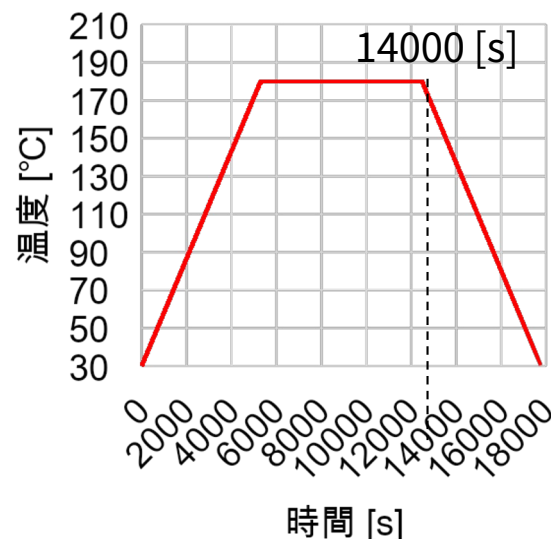


筒型

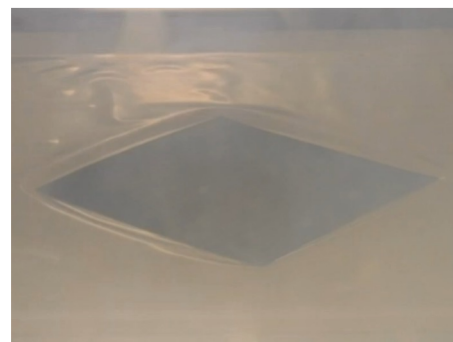


**実験** 協力：川越吉晃（グリーンクロステック研究センター 准教授）

温度プロファイル

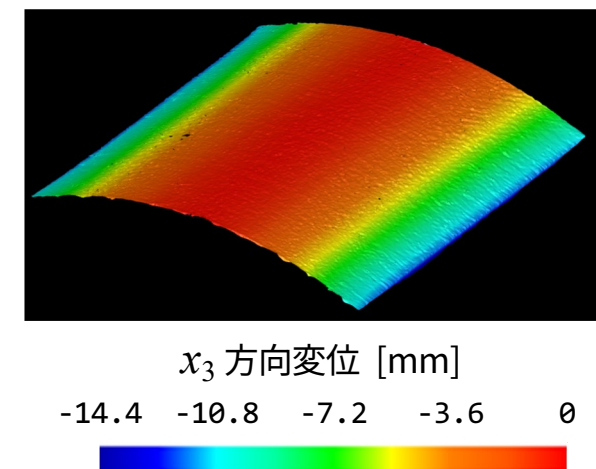


筒型への変化



12000（冷却開始）から  
14000 [s] 付近まで

最終変形図（3D測定）



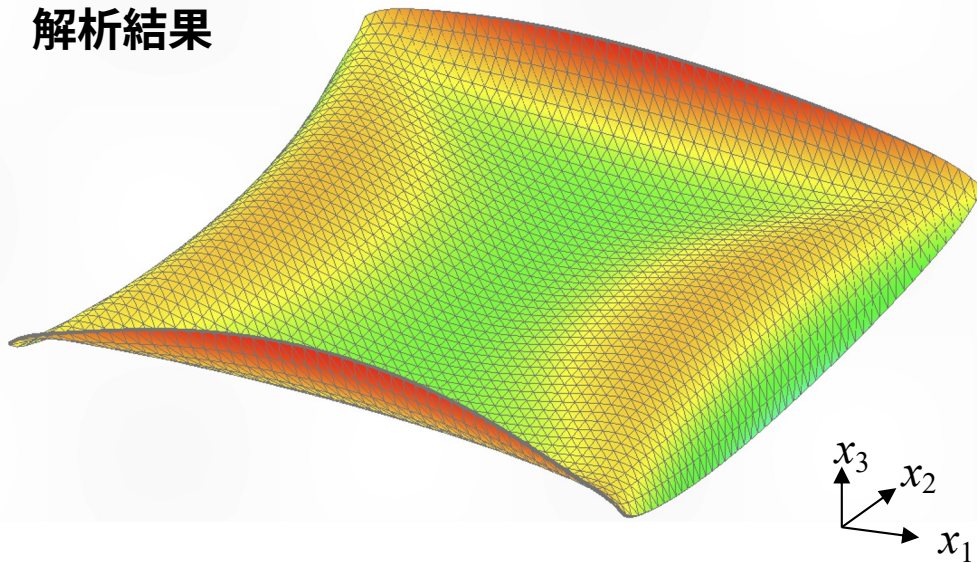
[2] 元木 信弥, 福田 武人, 反対称直交積層板の成形後の形状解析, 材料, 1997, 46 巻, 4 号, p. 349-353

[3] Y. Kawagoe, K. Kawai, Y. Kumagai, K. Shirasu, G. Kikugawa, T. Okabe. Mechanics of Materials, 2022

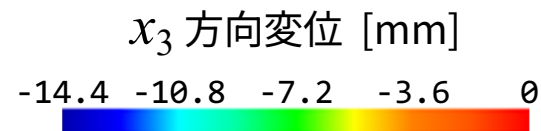
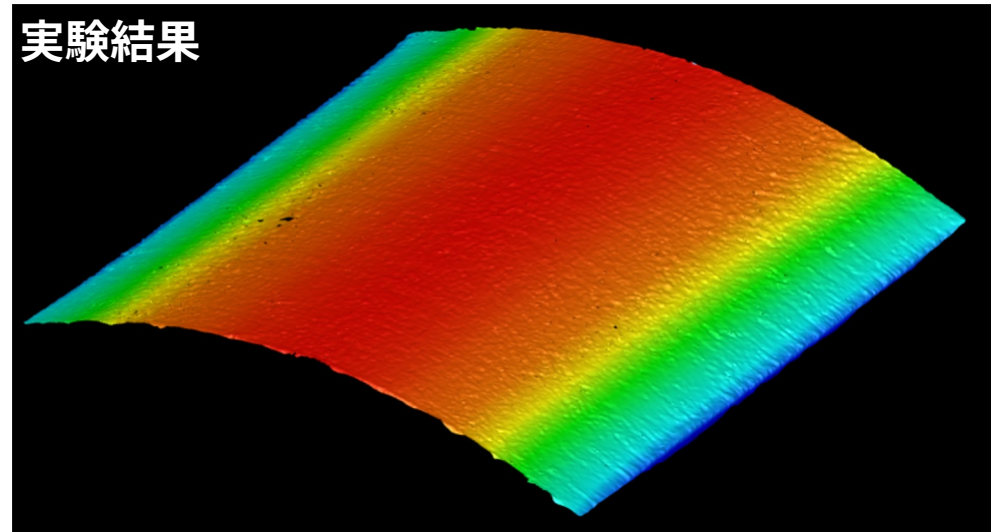
# マクロ熱座屈解析：解析結果

## 最終的な変形状態の比較

解析結果



実験結果



- 筒型の変形モードや変位量が一致しない

# 非機械変形モデルの見直し

- マクロの熱膨張係数とミクロ、マクロの硬化収縮係数がガラス転移温度を基準として温度依存するモデルに変更

例：マクロ硬化収縮係数（平衡部・等方成分） $\beta_{0,iso}^{ch}$

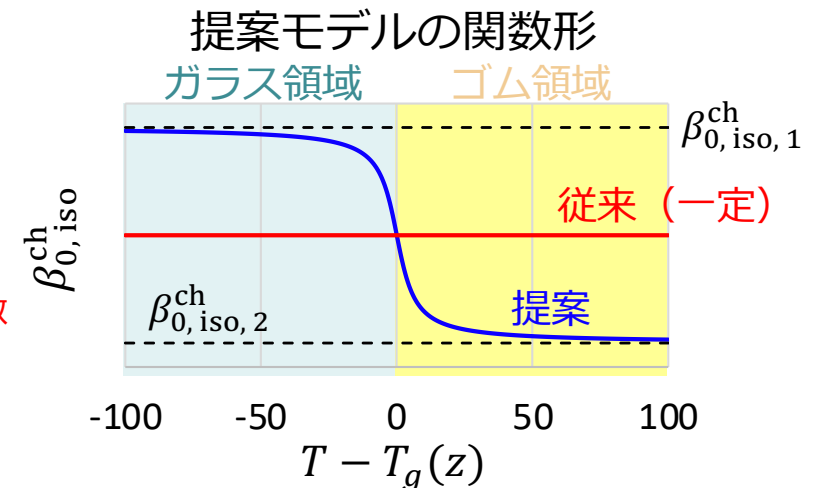
従来のモデル

$$\beta_{0,iso}^{ch} = (\text{const})$$

新たな提案モデル

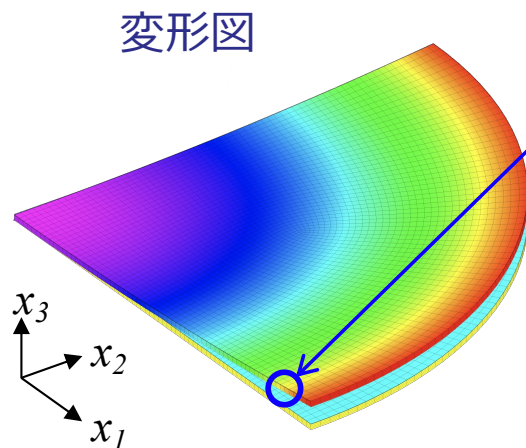
$$\beta_{0,iso}^{ch} = \frac{\beta_{0,iso,1}^{ch} + \beta_{0,iso,2}^{ch}}{2} + \frac{\beta_{0,iso,2}^{ch} - \beta_{0,iso,1}^{ch}}{\pi} \text{atan}(C^{nm}(T - T_g(z)))$$

非平衡部や繊維方向成分および  
マクロ熱膨張係数・ミクロ硬化収縮係数  
の各成分も同様の関数形を採用

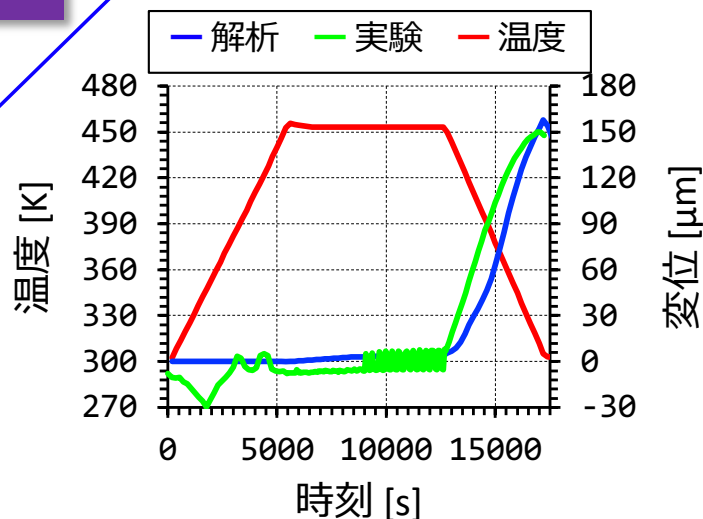


- ミクロとマクロの材料パラメータを実験結果と数値材料試験から改めて同定

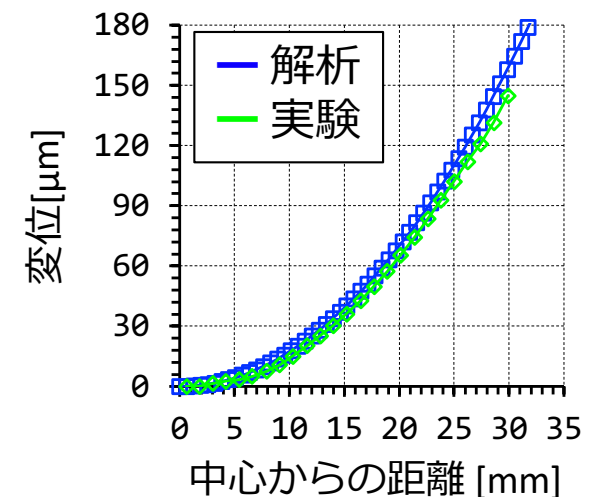
## 新たなモデルでのミクロ解析結果



### 計測点の $x_3$ 方向変位履歴



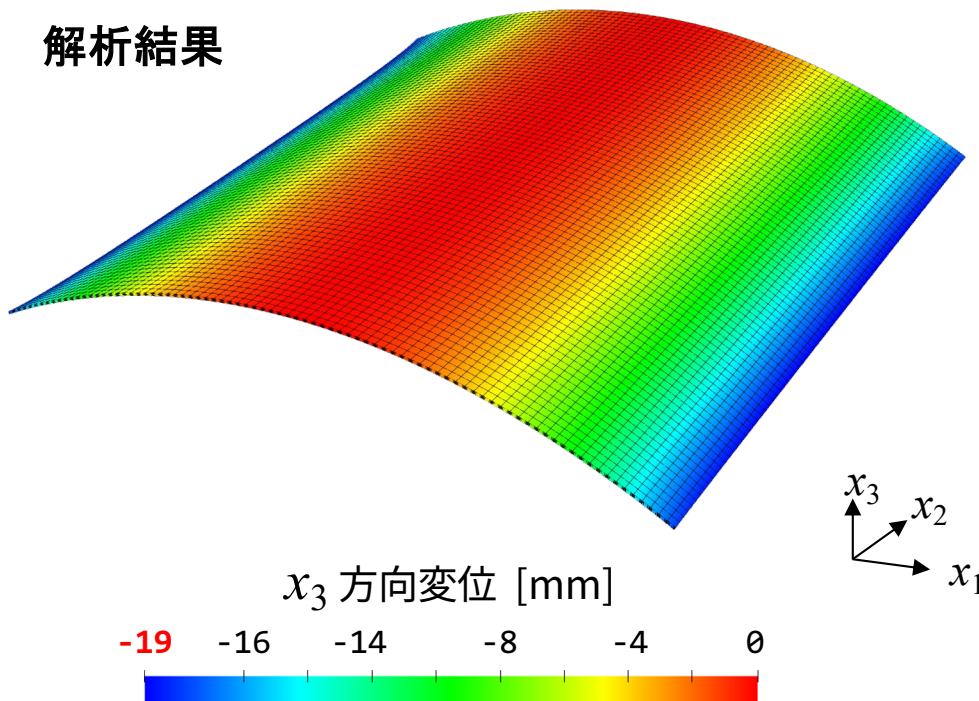
### 上側表面の変形形状



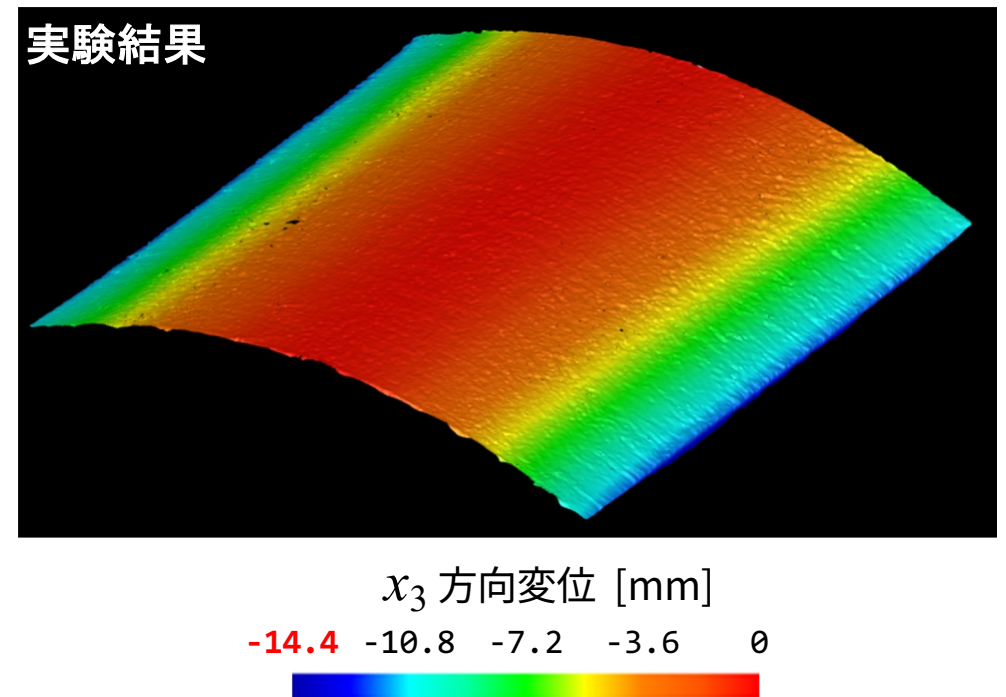
# マクロ熱座屈解析：再解析結果

## 最終的な変形状態の比較

解析結果



実験結果



- 変形モードが両者とも筒型で一致
- 最大変形量は解析が実験の 132 [%]：今後改善

# まとめ

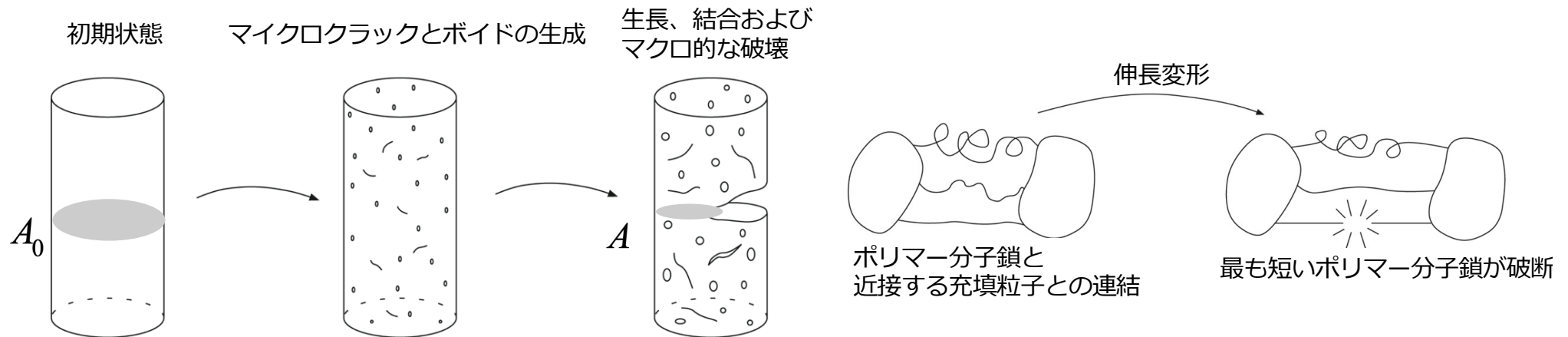
- 固体の非線形有限要素法
  - ✓ 強形式と弱形式
  - ✓ 支配方程式の空間離散化
  - ✓ 空間離散化された境界値問題：解法の指針と構成則の位置付け
- 材料挙動（速度非依存、速度依存）
  - ✓ 非弾性構成則：内部変数を用いる定式化
- 樹脂の熱変形と効果収縮を考慮したCFRPのそり変形解析
  - ✓ 変形と伝熱の連成問題
  - ✓ 熱・機械・化学連成問題
  - ✓ 樹脂の応力-ひずみ関係
  - ✓ 樹脂の材料パラメータ同定
  - ✓ 同定したパラメータの検証
  - ✓ 粘弾性の効果：粘弾性（応力緩和）を考慮することの重要性
- 均質化法に基づくマルチスケール熱・機械・化学連成解析
  - ✓ 数値材料試験を行うことでFRPのマクロな応答を算出してマクロ構成則<sup>[1]</sup>のパラメータを決定
  - ✓ 従来モデルではFRP積層板のマクロ熱座屈解析の結果と実験結果は不一致
  - ✓ 非機械変形特性にガラス転移温度を基準とした温度依存性を考慮することで実験結果と一致

# 付録

- A 損傷モデル
- B 熱・化学・機械連成問題の定式化
- C マクロ熱膨張係数の同定方法
- D 別パラメータを用いたCFTPマクロ解析

# 付録A-1 材料挙動：損傷

内部損傷：微視的スケールにおける不連続変形に起因した剛性／強度低下



荷重を受け持つ有効断面積  $A$  は損傷の進展に伴い減少

有効断面積の減少率として  
**損傷変数  $D$**  を定義

$$D = \frac{A_0 - A}{A_0}$$

$D=0$  : 無損傷  
 $D=1$  : 完全に耐荷性能を失った状態

有効断面積の計測は困難

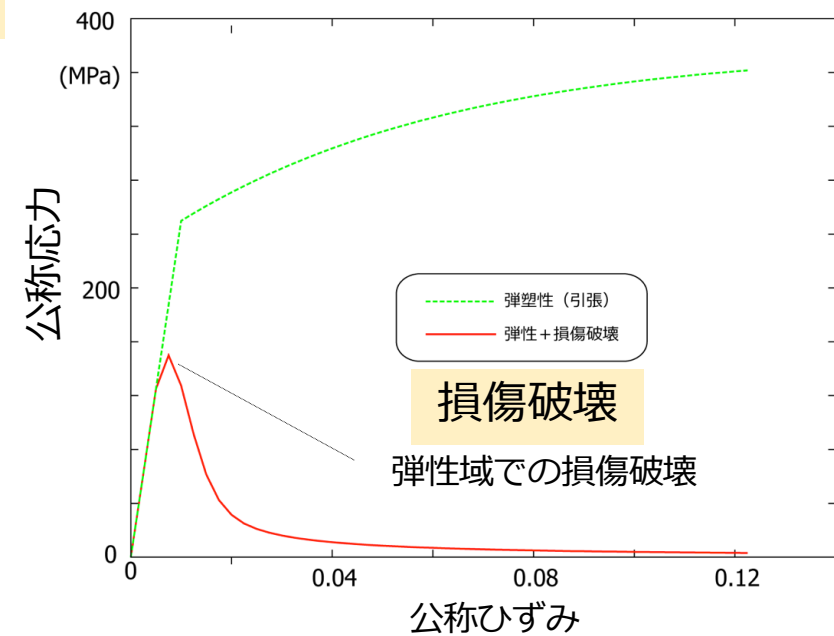
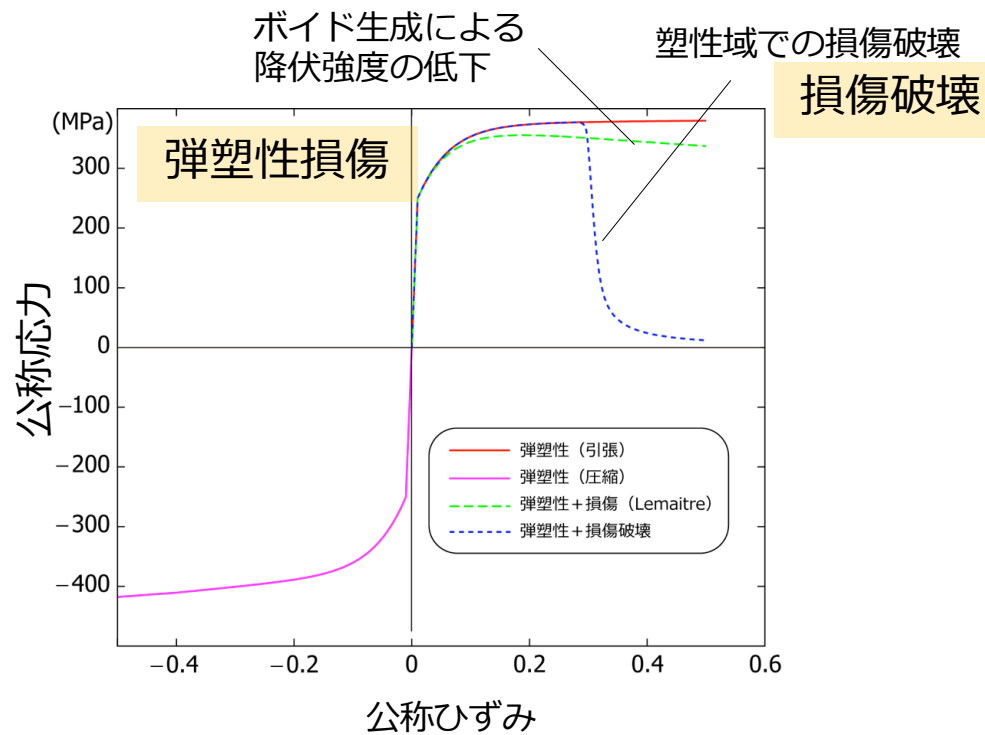
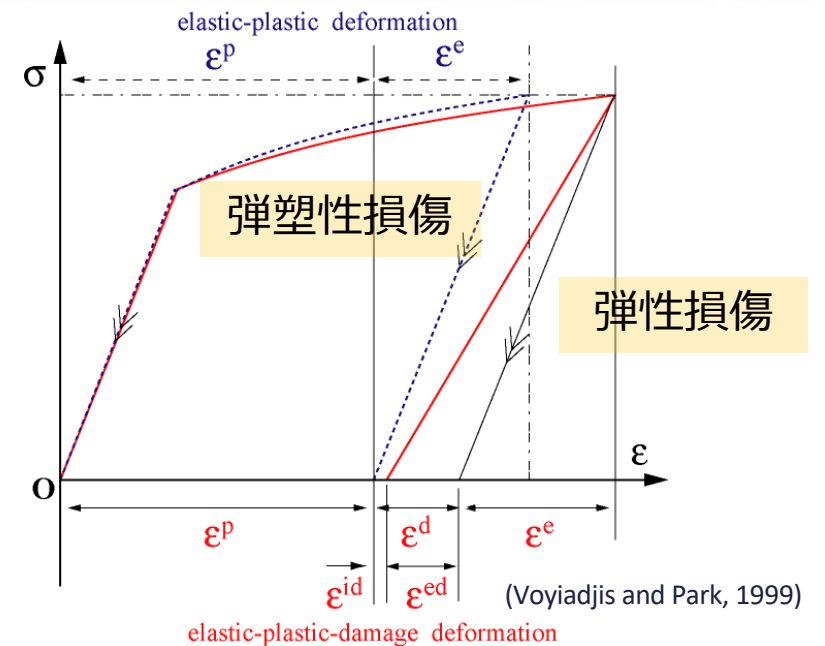
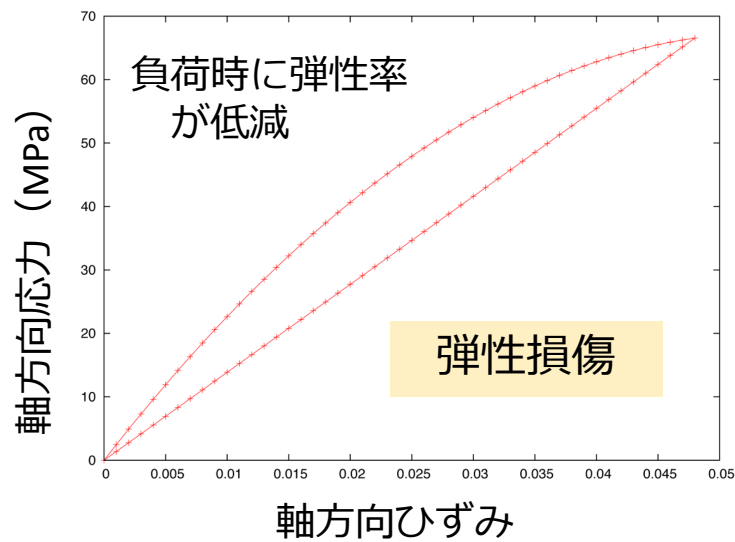
見かけの弾性係数の低減率であれば計測可能

$$D = \frac{E_0 - E}{E_0}$$

損傷のない（健全な状態の）弾性率

$$\sigma = E\varepsilon = (1 - D)E_0\varepsilon$$

# 付録A-2 材料挙動：損傷



# 付録B-1 熱・化学・機械連成問題



## 熱力学法則に基づき定式化

自由エネルギーの加算分解

$$\psi = \underbrace{\psi_{\infty}^m(\mathbf{C}, \theta, z)}_{\text{機械変形}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n_{\text{Maxwell}}} \Upsilon_i(\mathbf{C}, \mathbf{\Gamma}_i, \theta, z)}_{\text{熱}} + \underbrace{\psi^{\text{th}}(\theta) + \psi^{\text{ch}}(z)}_{\text{化学}}$$

熱力学第二法則に代入すると

$$\begin{aligned} & \left( S - 2\rho_0 \frac{\partial \psi_{\infty}^m}{\partial \mathbf{C}} - \sum_{i=1}^{n_{\text{Maxwell}}} 2\rho_0 \frac{\partial \Upsilon_i}{\partial \mathbf{C}} \right) : \frac{1}{2} \dot{\mathbf{C}} + \left( -\rho_0 \eta - \rho_0 \frac{\partial \psi_{\infty}^m}{\partial \theta} - \sum_{i=1}^{n_{\text{Maxwell}}} \rho_0 \frac{\partial \Upsilon_i}{\partial \theta} - \rho_0 \frac{\partial \psi^{\text{th}}}{\partial \theta} \right) \dot{\theta} \\ & + \left( -\rho_0 \frac{\partial \psi_{\infty}^m}{\partial z} - \sum_{i=1}^{n_{\text{Maxwell}}} \rho_0 \frac{\partial \Upsilon_i}{\partial z} - \rho_0 \frac{\partial \psi^{\text{ch}}}{\partial z} \right) \dot{z} - \sum_{i=1}^{n_{\text{Maxwell}}} \rho_0 \frac{\partial \Upsilon_i}{\partial \mathbf{\Gamma}_i} : \dot{\mathbf{\Gamma}}_i - \frac{1}{\theta} \mathbf{Q} \cdot \nabla \theta \geq 0 \end{aligned}$$

⇒ 機械問題の支配方程式，硬化発展則が導出される

上式に加えて，熱力学第一法則，ルジャンドル変換より  
熱伝導方程式が導出される

# 付録B-2 熱・化学・機械連成問題



## 機械問題

全応力  $S = S_{\infty} + \sum_{i=1}^{n_{\text{Maxwell}}} R_i$

平衡部応力

$$S_{\infty} = \left( F_{\infty}^{\text{th}} F_{\infty}^{\text{ch}} \right)^{-1} \left( \check{S}_{\infty}^{\text{iso}} + \check{S}_{\infty}^{\text{trn}} \right) \left( F_{\infty}^{\text{th}} F_{\infty}^{\text{ch}} \right)^{-T}$$

$$\check{S}_{\infty}^{\text{iso}} = K_{\infty} \ln J_{\infty}^e C_{\infty}^{e,-1} + G_{\infty} J_{\infty}^{e,-\frac{2}{3}} \left( I - \frac{1}{3} \text{tr} C_{\infty}^e (C_{\infty}^e)^{-1} \right)$$

$$\check{S}_{\infty}^{\text{trn}} = 2\beta_{\infty} (I_{4,\infty}^e - 1) C_{\infty}^{e,-1} + 2 \left\{ \alpha_{\infty} + 2\beta_{\infty} \ln J_{\infty}^e + 2\gamma_{\infty} (I_{4,\infty}^e - 1) \right\} A \otimes A - \alpha_{\infty} (C_{\infty}^e A + A \otimes C_{\infty}^e A)$$

非平衡部応力

$$R_i = \int_{-\infty}^t \exp \left( -\frac{t-s}{\tau_i} \right) \dot{S}_i ds, \quad S_i = \left( F_i^{\text{th}} F_i^{\text{ch}} \right)^{-1} \left( \check{S}_i^{\text{iso}} + \check{S}_i^{\text{trn}} \right) \left( F_i^{\text{th}} F_i^{\text{ch}} \right)^{-T}$$

$$\check{S}_i^{\text{iso}} = w_i \left\{ (K_0 - K_{\infty}) \ln \check{J}_i^e \check{C}_i^{e,-1} + (G_0 - G_{\infty}) \check{J}_i^{e,-\frac{2}{3}} \left( I - \frac{1}{3} \text{tr} \check{C}_i^e (\check{C}_i^e)^{-1} \right) \right\}$$

$$\check{S}_i^{\text{trn}} = 2w_i \left[ (\beta_0 - \beta_{\infty}) (I_{4,i}^e - 1) C_i^{e,-1} + 2 \left\{ (\alpha_0 - \alpha_{\infty}) + 2(\beta_0 - \beta_{\infty}) \ln J_0^e + 2(\gamma_0 - \gamma_{\infty}) (I_{4,0}^e - 1) \right\} A \otimes A - (\alpha_0 - \alpha_{\infty}) (C_0^e A + A \otimes C_0^e A) \right]$$

# 付録B-3 熱・化学・機械連成問題



## 熱伝導問題

$$\rho_0 c \dot{\theta} = -\operatorname{div} \mathbf{Q} + \underbrace{\mathcal{A} \dot{z}}_{\text{硬化発熱}} + \underbrace{\left( C_{\infty}^{C\theta} + \sum_{i=1}^{n_{\text{Maxwell}}} C_i^{C\theta} \right) : \dot{\mathbf{C}}}_{\text{熱・機械連成項}} + \underbrace{\left( C_{\infty}^{z\theta} + \sum_{i=1}^{n_{\text{Maxwell}}} C_i^{z\theta} \right) : \dot{\mathbf{z}}}_{\text{熱・化学連成項}}$$

## 硬化発展則

$$\dot{z} = A \exp \left( -\frac{\Delta E}{R\theta} \right) \underbrace{\left\langle z^{m_z} (1-z)^{n_z} + \frac{1}{\rho_0 a H_{\text{tot}}} \left( \mathcal{A}_{\infty} + \sum_{i=1}^{n_{\text{Maxwell}}} \mathcal{A}_i \right) \right\rangle}_{\mathcal{A} / \rho_0 a H_{\text{tot}}}$$

化学・機械連成項

$$\mathcal{A}_{\infty} = \mathbf{S}_{\infty} : \left\{ \mathbf{F}_i^{\text{ch},T} \left( \mathbf{F}_{\infty}^{\text{ch},-T} \ominus \mathbf{F}_{\infty}^{\text{ch},-1} : \beta_{\infty} \right) \mathbf{C} + \mathbf{C} \left( \mathbf{F}_{\infty}^{\text{ch},-1} \odot \mathbf{F}_{\infty}^{\text{ch},-T} : \beta_{\infty} \right) \mathbf{F}_{\infty}^{\text{ch}} \right\}$$

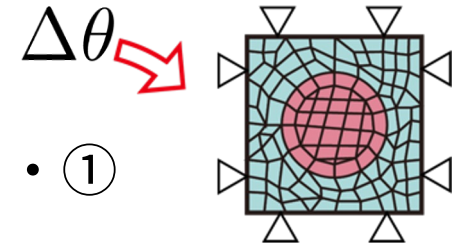
$$\mathcal{A}_i = \mathbf{R}_i : \left\{ \mathbf{F}_i^{\text{ch},T} \left( \mathbf{F}_i^{\text{ch},-T} \ominus \mathbf{F}_i^{\text{ch},-1} : \beta_i \right) \mathbf{C} + \mathbf{C} \left( \mathbf{F}_i^{\text{ch},-1} \odot \mathbf{F}_i^{\text{ch},-T} : \beta_i \right) \mathbf{F}_i^{\text{ch}} \right\}$$

# 付録C-1 マクロ熱膨張係数の同定

1次元微小変形問題の場合：

マクロ全ひずみ0の条件下で温度増分を与えると

$$\underbrace{\varepsilon}_{\text{マクロ全ひずみ}} = \underbrace{\varepsilon^e}_{\text{マクロ弾性ひずみ}} + \underbrace{\varepsilon^{\text{th}}}_{\text{マクロ熱ひずみ}} = 0 \iff \underbrace{\varepsilon^{\text{th}}}_{\text{マクロ熱ひずみ}} = -\underbrace{\varepsilon^e}_{\text{マクロ弾性ひずみ}} \dots \textcircled{1}$$



応力  $\sigma$  は(弾性ひずみ)  $\times$  (剛性) で得られるので

$$\sigma = E \underbrace{\varepsilon^e}_{\text{マクロ弾性ひずみ}} \iff \underbrace{\varepsilon^e}_{\text{マクロ弾性ひずみ}} = \frac{\sigma}{E} \dots \text{マクロ弾性ひずみが計算できる}$$

①の関係より

$$\underbrace{\varepsilon^{\text{th}}}_{\text{マクロ熱膨張係数}} = \underbrace{\alpha}_{\text{マクロ熱膨張係数}} \Delta\theta = -\underbrace{\varepsilon^e}_{\text{マクロ弾性ひずみ}} \iff \boxed{\alpha = -\frac{\varepsilon^e}{\Delta\theta}}$$

数値材料試験結果  $\sigma$  から  
マクロ弾性ひずみ  $\varepsilon^e$  が  
得られる



マクロ弾性ひずみ  $\varepsilon^e$  から  
マクロ熱膨張係数を計算

# 付録C-2 マクロ熱膨張係数の同定

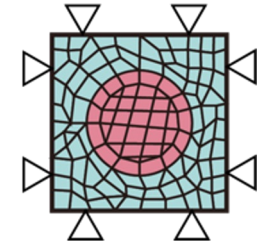
有限変形問題の場合：

マクロ変形勾配  $\underline{F} = \underline{I}$  の条件下で温度増分を与えると  $\Delta\theta$

$$\underline{F} = \underline{F}^e \times \underline{F}^{th} = \underline{I} \iff \underline{F}^{th,-1} = \underline{F}^e$$

マクロ変形勾配   弾性成分   熱成分

... ①



応力  $\underline{S}$  は次式で求められる

$$\underline{S} = \underline{F}^{th,-1} \check{\underline{S}}(\underline{F}^e) \underline{F}^{th,-T} = \underline{F}^e \check{\underline{S}}(\underline{F}^e) \underline{F}^{e,T} \quad (\because \textcircled{1})$$

マクロ構成則の応答値

$$\left( \check{\underline{S}}(\underline{F}^e) = \rho_0 \frac{\partial \psi(\underline{C}^e)}{\partial \underline{C}^e} \right)$$

数値材料試験の応答値  $\hat{\underline{S}}$  から  $\underline{F}^e$  を算出

$$\text{目的関数： } \chi(\underline{F}^e) = \left\{ \hat{\underline{S}} - (\underline{F}^e \check{\underline{S}}(\underline{F}^e) \underline{F}^{e,T}) \right\} / \|\hat{\underline{S}}\|^2$$

数値材料試験の応答値

目的関数  $\chi$  は  $\underline{F}^e$  の非線型関数  
→NR法によって最小問題を解く

# 付録C-3 マクロ熱膨張係数の同定

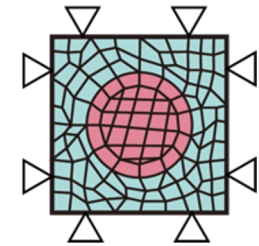
有限変形問題の場合：

マクロ変形勾配  $\underline{F} = \underline{I}$  の条件下で温度増分を与えると  $\Delta\theta$

$$\underline{F} = \underline{F}^e \times \underline{F}^{th} = \underline{I} \iff \underline{F}^{th} = \underline{F}^{e,-1}$$

マクロ変形勾配   弾性成分   熱成分

... ①



①の関係より

$$\underline{F}^{th} = \underline{I} + \underline{\alpha} \Delta\theta = \underline{F}^{e,-1} \iff \underline{\alpha} = \frac{1}{\Delta\theta} (\underline{F}^{e,-1} - \underline{I})$$

マクロ熱膨張係数

数値材料試験結果  $\hat{S}$  から変形勾配の弾性成分  $\underline{F}^e$  を求める



変形勾配の弾性成分  $\underline{F}^e$  からマクロ熱膨張係数  $\underline{\alpha}$  を計算

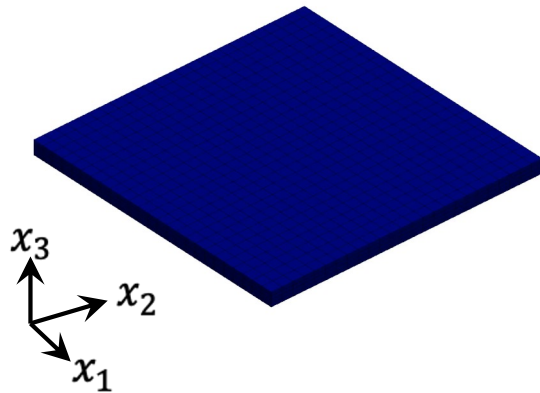
# 付録D-1 マクロ解析結果（別パラメータ利用）

材料パラメータ： **Saito et al.(2021)<sup>[1]</sup>** の値を使用した場合

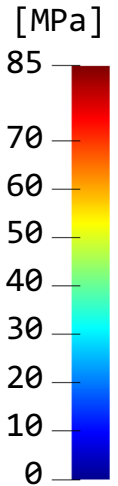
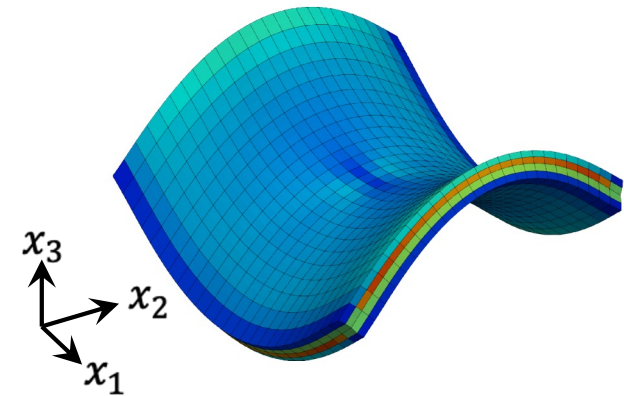
Model 1 :  $L = 100$  [mm]

von Mises 相当応力分布

冷却前（変形倍率：90倍）

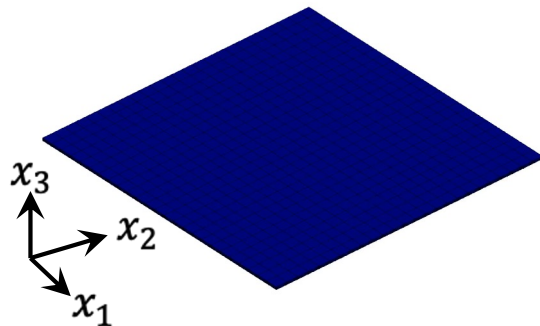


冷却後（変形倍率：30倍）

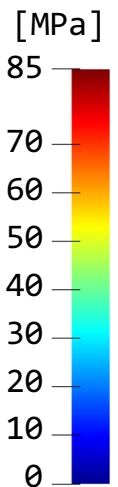
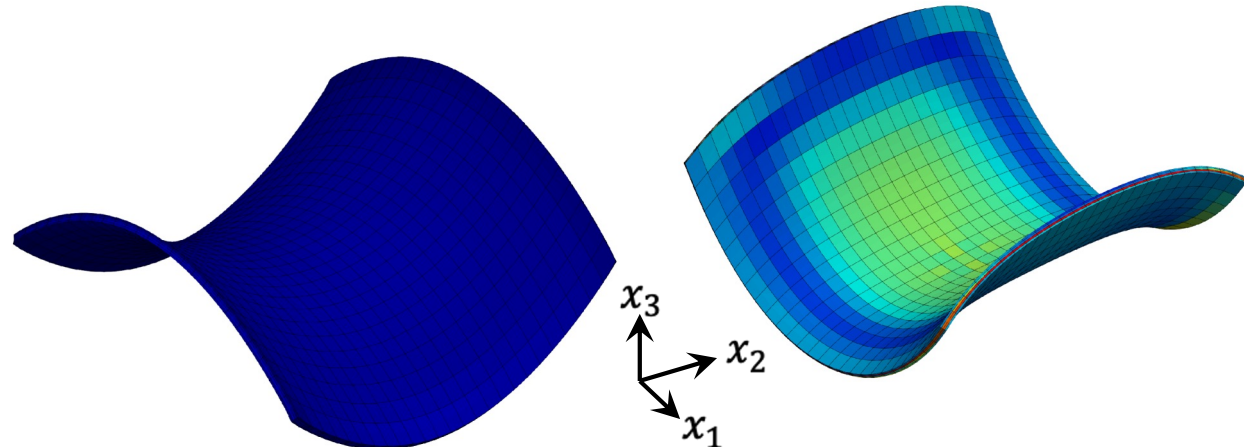


Model 2 :  $L = 500$  [mm]

冷却前（変形倍率：30倍）



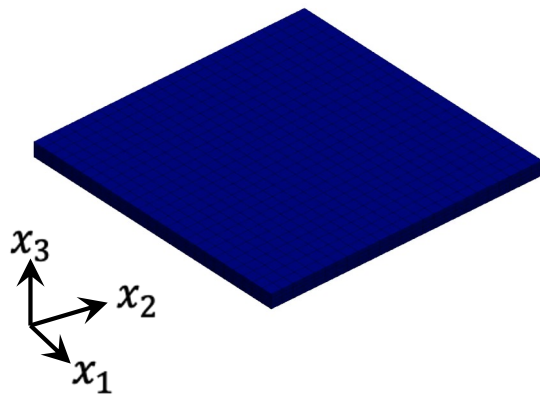
冷却後（変形倍率：10倍）



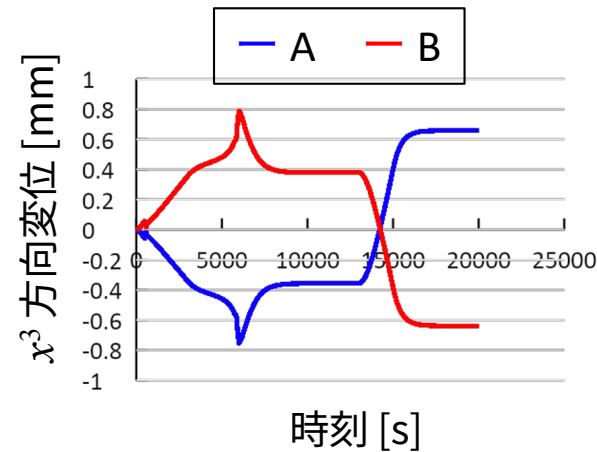
# 付録D-2 マクロ解析結果（別パラメータ利用）

材料パラメータ： **Saito et al.(2021)<sup>[1]</sup>** の値を使用した場合

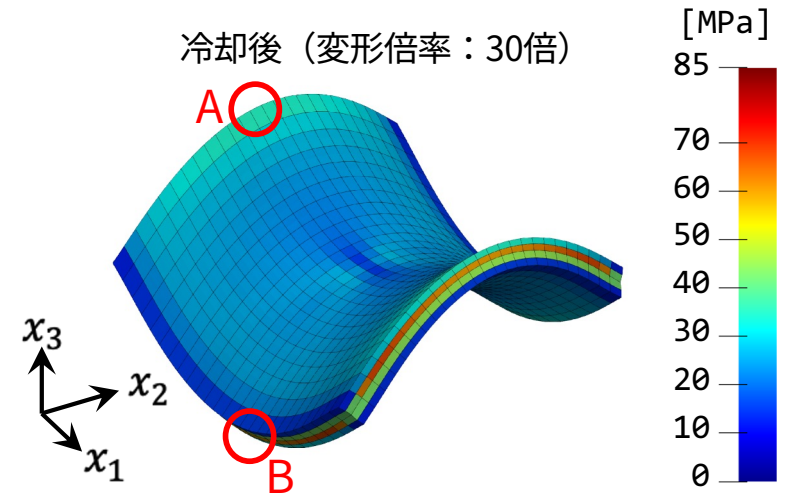
Model 1 : L = 100 [mm]



点A & Bの変位時刻歴



von Mises 相当応力分布



Model 2 : L = 500 [mm]

