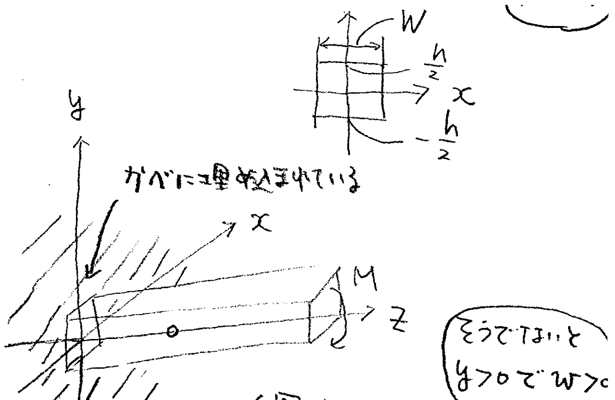
〈5〉 棒の曲げ

5.1 はり理論

- 座標軸の設定

断面の重心を通って z 軸をとる。

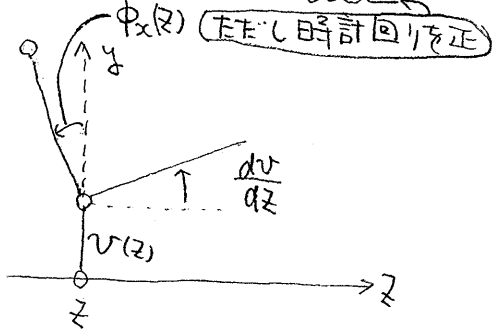


(図1)

- 変位

$$u(x,y,z)=0,\quad v(x,y,z)=v(z),\quad w(x,y,z)=y\phi_x(z) \tag{1}$$

- ひずみ－変位関係式



$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_z &= y\frac{d\phi_x}{dz} \\
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}=0 \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}=0 \\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{dv}{dz}+\phi_x(z) \\
\gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}=0 \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

- ベルヌーイ・オイラーの仮説

$$\gamma_{yz}=0 \tag{3}$$

$$\rightleftarrows\ \phi_x(z)=-\frac{dv}{dz} \tag{4}$$

これは、$y=0$ に垂直な断面は図のように変形後も垂直であることを意味する。また、(2－1)と(4)より

$$\varepsilon_z=-y\frac{d^2v}{dz^2}=\frac{y}{\rho}\quad\left(\frac{1}{\rho}=-\frac{d^2v}{dz^2}\right) \tag{5}$$

微分幾何より

- 応力分布　(構成関係より)

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_z &= Ey/\rho \\
\sigma_x &= \sigma_y=\tau_{yz}=\tau_{zx}=\tau_{xy}=0
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$M = \overline{w}\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_z\, y\, dy = \frac{EI}{\rho} \qquad \left(I = \overline{w}\int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy \right) \qquad (7)$$

$$\rightarrow \quad \frac{d^2 v}{dz^2} = -\frac{M}{EI} \qquad \text{(たわみの基礎方程式)} \qquad (8)$$

ここで、純粋曲げ（M = 一定）で、$z = 0$ にて $v = \frac{dv}{dz} = 0$ を考える

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = -\underbrace{\boxed{\frac{1}{\rho}}}_{\text{定数}} \qquad (9)$$

$$\rightleftarrows \quad \frac{dv}{dz} = -\frac{z}{\rho} \qquad \left(\because \frac{dv}{dz} = 0 \ @\ z = 0\right) \qquad (10)$$

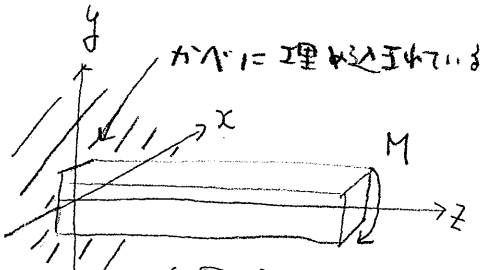
$$\rightleftarrows \quad v = -\frac{z^2}{2\rho} \qquad (\because v = 0 \ @\ z = 0) \qquad (11)$$

これを (1) に代入すると

$$u(x, y, z) = 0, \quad v(x, y, z) = -\frac{z^2}{2\rho}, \quad w(x, y, z) = \frac{yz}{\rho} \qquad (12)$$

と変位場が決定される。

・座標軸の設定



（図 3）

5.1と同様

断面の重心を通ってz軸を取り

次の関係を満たすように、x軸、y軸をとる。

$$\iint x\,dx\,dy = 0, \quad \iint y\,dx\,dy = 0, \quad \iint xy\,dx\,dy = 0 \tag{13}$$

・はり理論の応力分布を利用する。

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_z = Ey/\rho \\ &\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

・曲げモーメント

$$M = \iint \sigma_z y\,dx\,dy = \frac{E}{\rho}\iint y^2\,dx\,dy = \frac{EI_x}{\rho} \tag{15}$$

・ひずみ－変位関係式（構成関係も考慮）

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{y}{\rho} \quad \left(= \frac{\sigma_z}{E}\right) \\ &\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\nu y}{\rho} \quad \left(= -\frac{\nu}{E}\sigma_z\right) \\ &\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\nu y}{\rho} \quad \left(= -\frac{\nu}{E}\sigma_z\right) \\ &\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \\ &\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \\ &\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

(16-1) を積分して

$$w = \frac{yz}{\rho} + w_0(x, y) \tag{17}$$

これを(16-5), (16-4) に代入して積分する。

(i) (16-5) の場合

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w_0}{\partial x}$$

$$\rightleftarrows \quad u = -\frac{\partial w_0}{\partial x} z + u_0(x, y) \tag{18}$$

(ii) (16-4) の場合

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{z}{\rho} - \frac{\partial w_0}{\partial y}$$

$$\rightleftarrows \quad v = -\frac{z^2}{2\rho} - \frac{\partial w_0}{\partial y} z + v_0(x, y) \tag{19}$$

上の u, v を (16-2), (16-3) 式に代入する

(i) (16-2) の場合

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} z + \frac{\partial u_0}{\partial x} = -\frac{\nu y}{\rho}$$

$$\rightleftarrows \quad -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} z + \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\nu y}{\rho}\right) = 0$$

$$\rightleftarrows \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0, \quad u_0 = -\frac{\nu x y}{\rho} + f_1(y) \tag{20}$$

(ii) (16-3) の場合

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} z + \frac{\partial v_0}{\partial y} = -\frac{\nu y}{\rho}$$

$$\rightleftarrows \quad -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} z + \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\nu y}{\rho}\right) = 0$$

$$\rightleftarrows \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0, \quad v_0 = -\frac{\nu y^2}{2\rho} + f_2(x) \tag{21}$$

(20-2), (21-2) を (16), (17) に代入する。

$$u = -\frac{\partial w_0}{\partial x} z - \frac{\nu x y}{\rho} + f_1(y) \tag{22}$$

$$v = -\frac{z^2}{2\rho} - \frac{\partial w_0}{\partial y} z - \frac{\nu y^2}{2\rho} + f_2(x) \tag{23}$$

(22), (23) を (16-6) に代入する

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} z - \frac{\nu x}{\rho} + \frac{df_1}{dy} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} z + \frac{df_2}{dx}$$

$$= -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} z + \left(\frac{df_1}{dy} + \frac{df_2}{dx} - \frac{\nu x}{\rho} \right) = 0$$

$$\rightleftarrows \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = 0, \quad \underbrace{\frac{df_1}{dy}}_{y\text{の関数}} = \underbrace{\frac{\nu x}{\rho} - \frac{df_2}{dx}}_{x\text{の関数}} = \underbrace{C_4}_{\text{定数}}$$

$$\rightleftarrows \quad w_0 = C_1 x + C_2 y + C_3, \quad f_1(y) = C_4 y + C_5, \quad f_2(x) = \frac{\nu x^2}{2\rho} - C_4 x + C_6 \tag{24}$$

$x=y=z=0$ で次の6つの条件を考える。

$$u = v = w = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \tag{25}$$

(24)と(25)より $C_1 \sim C_6 = 0$。よって

$$u = -\frac{\nu x y}{\rho}, \quad v = -\frac{z^2 + \nu y^2 - \nu x^2}{2\rho}, \quad w = \frac{yz}{\rho} \tag{26}$$

となる。ここで $x=y=0$ とすると

$$v = -\frac{z^2}{2\rho} \equiv v_0, \quad u = w = 0 \tag{27}$$

一方，はり理論では (補足)

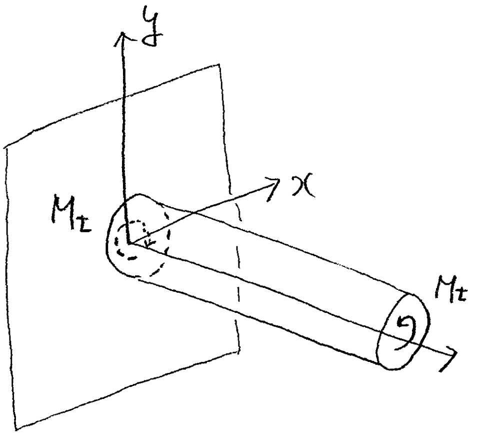
$$\frac{d^2 v}{dz^2} = -\frac{1}{\rho} \quad (\text{たわみの基礎式})$$

$$\rightleftarrows \quad v = -\frac{z^2}{2\rho} + C_7 z + C_8$$

$$\rightleftarrows \quad v = -\frac{z^2}{2\rho} \quad \left(\because\ v = 0\ @\ z=0, \ \frac{dv}{dz} = 0\ @\ z=0\right) \tag{28}$$

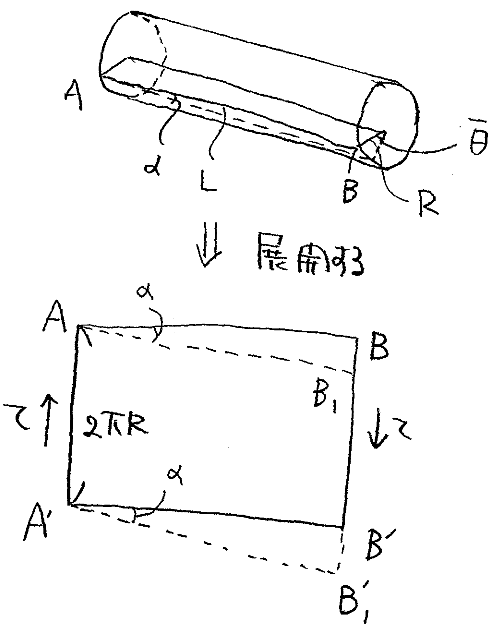
となり，(27)と(28)は一致する。

6.1 丸棒のねじり



図のような、円形断面の一様な棒の両端にねじりモーメントを作用させた場合について考える。

(材料力学による解法)



図のようにABに切り込みを入れて、丸棒表面を展開する。そこにせん断応力τをかける。それをまるめて、AB_1にそうように$A_1' B_1'$を貼りつける。

幾何学的な関係より

$$R\bar{\theta} = L\alpha = L\frac{\tau}{G} \quad (1)$$

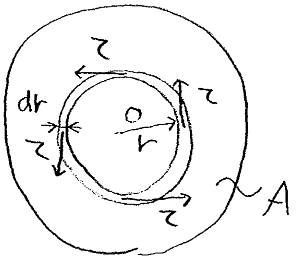
$$\rightleftarrows \quad \tau = GR\frac{\bar{\theta}}{L} = GR\omega \quad (2)$$

これは任意の半径rにて成立するから

$$\tau = Gr\omega \quad (3)$$

と書ける。

外部から加わるねじりモーメントM_tはせん断力の作るモーメントとつりあうべきであり



$$T = \int_A \tau r\, dA = G\omega \underbrace{\boxed{\int_A r^2 dA}}_{I_p} \quad (4)$$

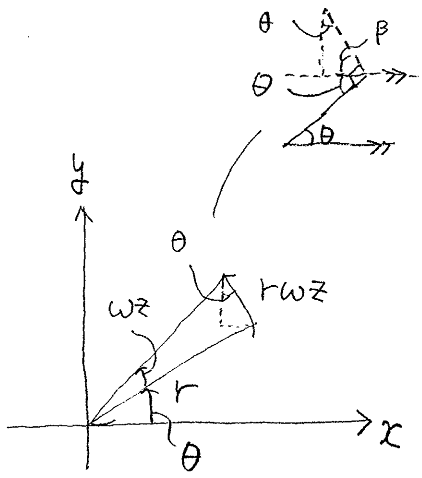
$$\rightarrow \omega = \frac{T}{I_p G} \quad (5)$$

特に棒が円形断面の時

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32} \qquad (D = 2R) \qquad (6)$$

となる。

（弾性力学による解法）



任意の位置 z における，断面内の変位は

$$\left.\begin{aligned} u &= -r\omega z \sin\theta \\ v &= r\omega z \cos\theta \\ z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

のように与えられるとする。

・ひずみ－変位関係式

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = r\omega\cos\theta = \omega x \\ & \qquad (\because x = r\cos\theta) \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = -r\omega\sin\theta = -\omega y \\ & \qquad (\because y = r\sin\theta) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

式(8)に示されたひずみ成分を Hooke の法則に代入すると

$$
\left.
\begin{aligned}
\sigma_x &= 2G\left(\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu}e\right) = 0 \\
\sigma_y &= 2G\left(\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu}e\right) = 0 \\
\sigma_z &= 2G\left(\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu}e\right) = 0 \\
\tau_{yz} &= G\gamma_{yz} = G\omega x \\
\tau_{zx} &= G\gamma_{zx} = -G\omega y \\
\tau_{xy} &= G\gamma_{xy} = 0
\end{aligned}
\right\} \quad (9)
$$

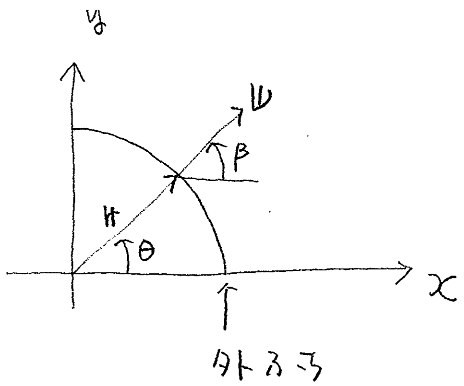
これらは、次のように平衡方程式をみたす。 $X=Y=Z=0$ とすると

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= 0 \\
\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= 0 \\
\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0
\end{aligned}
\right\} \quad (10)
$$

コーシーの公式より、表面力 (X_ν, Y_ν, Z_ν) と応力との関係は
(9)を代入することで、

$$
\begin{bmatrix} X_\nu \\ Y_\nu \\ Z_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -G\omega y n \\ G\omega x n \\ G\omega(-yl + xm) \end{bmatrix} \quad (11)
$$

と書ける。 表面における法線ベクトル $\nu = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$



円形のため
$\beta = \theta$
となる

を (11) に代入すると

$$\begin{bmatrix} X_\nu \\ Y_\nu \\ Z_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G\omega(-r\sin\theta\cos\theta + r\cos\theta\sin\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

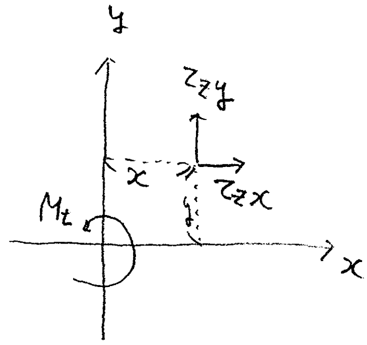
(Memo) $\nu = (\cos\beta, \sin\beta, 0)$ においては ($\beta \neq \theta$)

$$Z_\nu = G\omega(-r\sin\theta\cos\beta + r\cos\theta\sin\beta)$$
$$= G\omega r\sin(\beta - \theta)$$

となり, $Z_\nu \neq 0$ となる力が働かないと材料力学的なねじりが再現されてない。

・ねじりモーメント

$$M_t = \iint(\tau_{zy}x - \tau_{zx}y)\,dx\,dy \quad (13)$$



→ (9) を (13) に代入すると

$$M_t = \iint G\omega(x^2+y^2)\,dx\,dy$$
$$= G\omega\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R r^3\,dr\right)d\theta$$
$$\equiv GJ\omega \qquad \longrightarrow \quad J = \frac{\pi}{2}R^4 \quad (14)$$

→ (4) と (5) を見比べると $J = I_p$, $M_t = T$ であり同じものである。

6.2 一般形断面棒のねじり理論

円形断面以外では

$Z_\nu = Z_\nu \neq 0$ なる側面力を作らかせないと仮定した変位場は再現されない。逆に考えると，一般断面（円形以外）で $Z_\nu = 0$ では，式(7)の仮定が妥当では無い。そこで

$$\left.\begin{aligned} u &= -\omega z y \\ v &= \omega z x \\ w &= \omega \varphi(x, y) \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

と表わす。φ をワーピングという。この(14)の変位からひずみを算出する。

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\omega z + \omega z = 0 \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \omega \left(x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \omega \left(-y + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

ここで，次の Hooke 則（構成関係）を考える。

$$\sigma_x = 2G\left(\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} e\right), \quad \sigma_y = 2G\left(\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu} e\right), \quad \sigma_z = 2G\left(\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} e\right)$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz}, \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx}, \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

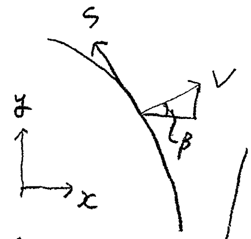
よって，応力成分は次のように与えられる。

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \quad \tau_{yz} = G\omega\left(x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right), \quad \tau_{zx} = G\omega\left(-y + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \qquad (16)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}=0\\
&\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}=0\\
&\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}=\underbrace{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}=0}_{\text{ラプラス方程式 (18)}}
\end{aligned}\right\}\quad (17)$$

式(19)はワーピングφがみたすべきはラプラス方程式であることを示している。 このφをねじり関数という。

φの境界条件を求めるべく、ここで、6.1節の式(11)で示した側面の表面力 Z_ν に $\underset{(=0)}{}$ 代入する。



$$\boxed{\begin{aligned} x &= \nu\cos\beta \\ y &= \nu\sin\beta \end{aligned}}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} l &= \frac{\partial x}{\partial \nu} \\ m &= \frac{\partial y}{\partial \nu} \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned}
Z_\nu &= \tau_{zx} l + \tau_{yz} m \\
&= G\omega\left\{\left(-y+\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)l+\left(x+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)m\right\} \\
&= G\omega\left(-\underbrace{y}_{r\sin\theta}\cos\beta+\underbrace{x}_{r\cos\theta}\sin\beta+\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \nu}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \nu}\right) \\
&= G\omega\left\{r\sin(\beta-\theta)+\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\right\} \\
&= 0 \qquad (19)
\end{aligned}$$

(19)より

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}=-r\sin(\beta-\theta)\ (=-r\sin(r,\nu)) \qquad (20)$$

が得られる。つまり、棒のねじりは次のようにまとめられる。

基礎式：(18)

境界条件：(14)

ねじり関数$\varphi(x,y)$の共役関数$\psi(x,y)$を考える。このψはコーシーリーマンの微分方程式

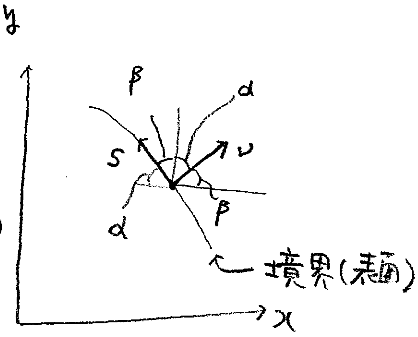
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{21}$$

を満たす必要がある。このとき，ψの基礎式は次のようになる。

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \tag{22}$$

ψの境界条件を考えよう

図を参照にすると



$$\left.\begin{aligned} l &= \frac{\partial x}{\partial \nu} = \cos(\nu, x) = \cos(s, y) = \frac{\partial y}{\partial s} \\ m &= \frac{\partial y}{\partial \nu} = \cos(\nu, y) = -\cos(s, x) \\ &= -\frac{\partial x}{\partial s} \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

(Memo)

$$\cos(\pi - \alpha) = \cos\pi\cos\alpha + \sin\pi\sin\alpha = -\cos\alpha$$

とかける。6.2の式(19)を書き直すと

$$\begin{aligned} \tau_\nu &= G\omega\left\{\left(-y + \frac{\partial \psi}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial s} + \left(x - \frac{\partial \psi}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial s}\right\} \\ &= G\omega\left\{-\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right) + \frac{\partial \psi}{\partial s}\right\} = 0 \end{aligned} \tag{24}$$

(24)を積分すると，次のように書ける

$$\psi = \frac{x^2 + y^2}{2} + \text{定数} \tag{25}$$

そこで

$$\Phi = G\omega\{\psi - (x^2 + y^2)/2\} \tag{26}$$

とすると，境界では

$$\Phi = \text{定数} \tag{27}$$

となる。

そこで，Φの基礎式を示そう。

$$\Delta\Phi = G\omega\left[\Delta\psi - \Delta\{(x^2+y^2)/2\}\right] = -2G\omega \qquad (28)$$

この Φ をねじりの応力関数という。このとき，応力成分は

$$\tau_{yz} = G\omega\left(x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = G\omega\left(x - \frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} \qquad (29)$$

$$\tau_{zx} = G\omega\left(-y + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = G\omega\left(-y + \frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = \frac{\partial\Phi}{\partial y} \qquad (30)$$

として与えられる。つまり，棒のねじりは次のようにまとめられる。

基礎式：(28)
境界条件：(27)

<u>ワーピングとねじりの応力関数の関係</u>

$w = \omega\varphi$ と (29), (30) より

(29)：$G\omega x + G\dfrac{\partial w}{\partial y} = -\dfrac{\partial\Phi}{\partial x} \rightleftarrows \dfrac{\partial w}{\partial y} = -\dfrac{1}{G}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x} - \omega x$ (31)

(30)：$-G\omega y + G\dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} \rightleftarrows \dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{1}{G}\dfrac{\partial\Phi}{\partial y} + \omega y$ (32)

(31) と (32) を積分することでワーピングが得られる。

(Memo) (31), (32) から w を消去すると (28) が得られる。

(31) を x で偏微分：$\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} = -\dfrac{1}{G}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \omega$ — ①

(32) を y で偏微分：$\dfrac{\partial^2 w}{\partial y\partial x} = \dfrac{1}{G}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \omega$ — ②

① = ② より

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = -2G\omega$$

ねじりモーメントとねじりの応力関数の関係

6.1の(13)より

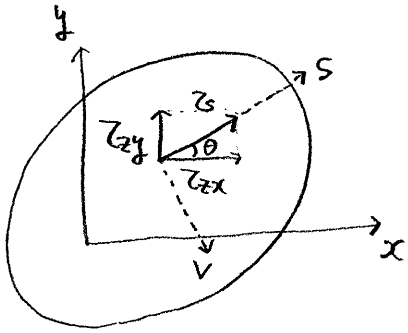
$$M_t = \iint (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y)\, dx\, dy$$

$$= -\iint \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} x + \frac{\partial \phi}{\partial y} y\right) dx\, dy$$

$$= -\underbrace{\int\left\{[\phi x]_{x_1}^{x_2} - \int \phi\, dx\right\} dy}_{x\text{についての部分積分}} - \underbrace{\int\left\{[\phi y]_{y_1}^{y_2} - \int \phi\, dy\right\} dx}_{y\text{についての部分積分}} \quad (33)$$

合せん断応力とねじりの応力関数の関係

図のような τ_s を合せん断応力という。

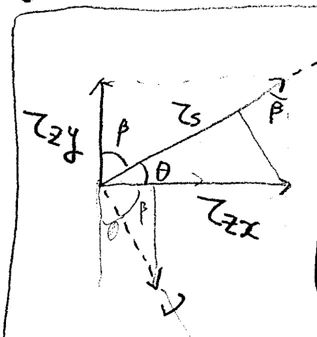


$$\tan\theta = \frac{\tau_{yz}}{\tau_{zx}} = \frac{-\partial\phi/\partial x}{\partial\phi/\partial y} \quad (34)$$

ここで、$\phi(x, y) =$ 定数の曲線で

$$\underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0}_{\text{陰関数定理}} \rightleftarrows \frac{dy}{dx} = \frac{-\partial\phi/\partial x}{\partial\phi/\partial y} = \tan\theta \quad (35)$$

となる。(35)は $\phi(x, y) =$ 定数の曲線の接線の方向が合せん断応力の方向と一致する。このとき



(77)で使う

(Memo)
$s\cos\theta = x$
$s\cos\beta = y$

$$v\cos\beta = x \to \frac{\partial x}{\partial v} = \cos\beta$$

$$-v\cos\theta = y \to \frac{\partial y}{\partial v} = -\cos\theta$$

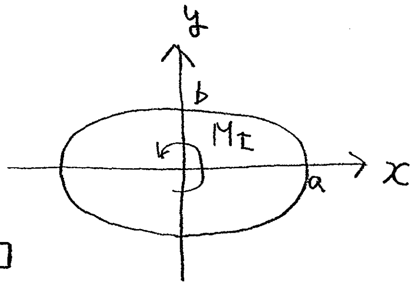
$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial y}{\partial s}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{\partial x}{\partial s} \quad (91)$$

$$\tau_s = \tau_{zx}\cos\theta + \tau_{zy}\cos\beta$$

$$= -\frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}$$

$$= -\frac{\partial \phi}{\partial v} \quad (36)$$

(36)は“合せん断応力は ϕ の減少率に等しい”ことを示している。



図のような楕円形断面の棒を座標原点($x=y=0$)まわりにねじる問題を考える。境界条件(27)で定数をゼロとすると(中実断面では多くの場合そうする。)

$$\phi = 0 \tag{37}$$

と出来る。ここで

$$\phi = -A\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) \tag{38}$$

なる関数を考えてみよう。(38)は(37)の境界条件を満たしている。

(38)を(28)に代入することでAを決定することが出来る。

$$\Delta\phi = -2A\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = -2G\omega$$

$$\rightleftarrows \quad A = G\omega \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \tag{39}$$

さて、M_tを求めよう。(33), (37)より、M_tは次のようになる。

$$M_t = 2\iint \phi \, dxdy \tag{40}$$

そこで、(38), (39), (40)より

$$M_t = -2\underbrace{G\omega \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}}_{A} \underbrace{\iint \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) dxdy}_{I}$$

$$= \pi a b A \tag{41}$$

(Memo)

$x = ar\cos\theta, \quad y = br\sin\theta \quad (0 < r < 1,\ 0 < \theta < 2\pi)$

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^2 - 1) \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} dr d\theta = 2\pi ab \int_0^1 (r^3 - r) dr = -\frac{\pi ab}{2}$$

(41) と $M_t = GJ\omega$ より, ねじり剛性 GJ は

$$GJ = G\pi a^3 b^3/(a^2+b^2) \tag{42}$$

にて与えられる。

次にせん断応力は

$$\tau_{yz} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{2Ax}{a^2} = 2G\omega\frac{\cancel{a^2}b^2}{a^2+b^2}\cdot\frac{x}{\cancel{a^2}} = \frac{2G\omega b^2 x}{a^2+b^2} \tag{43}$$

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{2Ay}{b^2} = -2G\omega\frac{a^2\cancel{b^2}}{a^2+b^2}\cdot\frac{y}{\cancel{b^2}} = -\frac{2G\omega a^2 y}{a^2+b^2} \tag{44}$$

合せん断応力は

$$|\tau_s| = \sqrt{\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2} \tag{45}$$

に (43), (44) を代入することより得られる。

ワーピングは (31) と (32) より

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{1}{G}\frac{\partial \phi}{\partial x} - \omega x = -\frac{1}{G}\left(-2A\frac{x}{a^2}\right) - \omega x$$

$$= 2\omega\frac{\cancel{a^2}b^2}{a^2+b^2}\cdot\frac{x}{\cancel{a^2}} - \omega x = \frac{-a^2+b^2}{a^2+b^2}\omega x \tag{46}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{G}\frac{\partial \phi}{\partial y} + \omega y = \frac{1}{G}\left(-2A\frac{y}{b^2}\right) + \omega y$$

$$= -2\omega\frac{a^2\cancel{b^2}}{a^2+b^2}\cdot\frac{y}{\cancel{b^2}} + \omega y = \frac{-a^2+b^2}{a^2+b^2}\omega y \tag{47}$$

(46) を積分すると

$$w = \frac{-a^2+b^2}{a^2+b^2}\omega xy + C(x) \tag{48}$$

$$\rightleftarrows \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{-a^2+b^2}{a^2+b^2}\omega y + \frac{dC(x)}{dx} \tag{49}$$

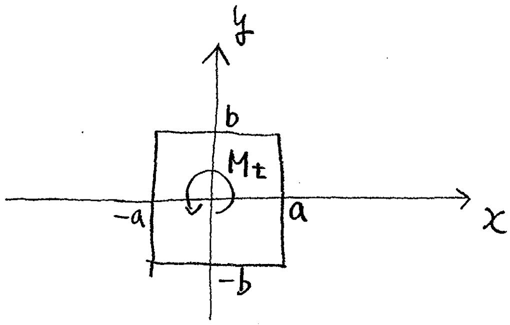
$$\rightleftarrows \frac{dC(x)}{dx} = 0 \tag{50}$$

$$\therefore \ C(x) = C \tag{51}$$

$x=y=0$ で $w=0$ とすると、(48)、(51) より $C(x)=0$。よって

$$w = -\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\,\omega x y \tag{52}$$

6.5 長方形断面棒のねじり



x、y の偶関数で、調和関数、

かつ $\phi(-a,y)=\phi(a,y)=0$

となるように

$$\phi = G\omega\left(a^2 - x^2 + \sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty} A_n \cosh\frac{n\pi y}{2a}\cos\frac{n\pi x}{2a}\right) \tag{53}$$

を仮定する。そこで $y=\pm b$ においては

$$\frac{\phi|_{y=\pm b}}{G\omega} = a^2 - x^2 + \sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty} A_n \cosh\frac{n\pi y}{2a}\cos\frac{n\pi x}{2a} = 0 \tag{54}$$

を満たさせる必要がある。そこで、次のようにフーリエ級数に展開する

$$a^2 - x^2 = \sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty} C_n \cos\frac{n\pi x}{2a} \tag{55}$$

$$C_n = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)\cos\frac{n\pi x}{2a}\,dx$$

$$= \frac{32a^3}{\pi^3 n^3}(-1)^{(n-1)/2} \tag{56}$$

(54) と (56) より

$$\sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty}\left\{\frac{32a^3}{\pi^3 n^3}(-1)^{(n-1)/2} + A_n\cosh\frac{n\pi b}{2a}\right\}\cos\frac{n\pi x}{2a} = 0 \tag{57}$$

$$\therefore \ A_n = -\frac{32a^3}{\pi^3 n^3}(-1)^{(n-1)/2}\,\mathrm{sech}\,\frac{n\pi b}{2a} \tag{58}$$

(53)と(58)より，ねじりの応力関数 ϕ は次のように求まる。

$$\phi = G\omega\left[a^2 - x^2 - \frac{32a^3}{\pi^3}\sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^3}(-1)^{(n-1)/2}\frac{\cosh\{n\pi y/(2a)\}}{\cosh\{n\pi b/(2a)\}}\cos\frac{n\pi x}{2a}\right] \tag{59}$$

このとき，せん断応力は

$$\underbrace{\tau_{yz}}_{=-\frac{\partial\phi}{\partial x}} = G\omega\left[-2x + \frac{16a^2}{\pi^2}\sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^2}(-1)^{(n-1)/2}\frac{\cosh\{n\pi y/(2a)\}}{\cosh\{n\pi b/(2b)\}}\sin\frac{n\pi x}{2a}\right] \tag{60}$$

$$\tau_{zx} = \frac{\partial\phi}{\partial y} = G\omega\left[-\frac{16a^2}{\pi^2}\sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^2}(-1)^{(n-1)/2}\frac{\sinh\{n\pi y/(2a)\}}{\cosh\{n\pi b/(2a)\}}\cos\frac{n\pi x}{2a}\right] \tag{61}$$

(40) を利用すると，ねじりモーメント M_t は

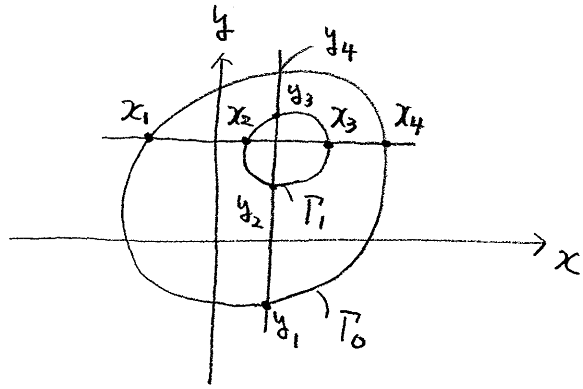
$$M_t = 2\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\phi\, dy\, dx = \frac{1}{3}G\omega(2a)^3(2b)\left\{1 - \frac{192a}{\pi^5 b}\sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^5}\tanh\frac{n\pi b}{2a}\right\} \tag{62}$$

となる。ワーピングは $\partial w/\partial x$，$\partial w/\partial y$ を求め，$x=y=0$ で $w=0$ を積分定数を決めると

$$w = \omega\left[xy - \frac{32a^2}{\pi^3}\sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty}(-1)^{(n-1)/2}\frac{1}{n^3}\frac{\sinh\{n\pi y/(2a)\}}{\cosh\{n\pi b/(2a)\}}\sin\frac{n\pi x}{2a}\right] \tag{63}$$

が得られる。

6.6 中空断面棒のねじり



式(27)で示したように，境界では，ϕ は定数となる。そこで，外側の Γ_0 をゼロ，内側を未定乗数とした

$$\Gamma_0 : \phi = 0 \quad , \Gamma_1 : \phi = C_1 \tag{64}$$

を仮定してみよう。そこで (33) を利用して，ねじりモーメントについて検討する。

$$M_t = -\iint \left(x\frac{\partial\phi}{\partial x} + y\frac{\partial\phi}{\partial y} \right) dx\,dy$$

$$= -\iint \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(x\phi) - \phi + \frac{\partial}{\partial y}(y\phi) - \phi \right\} dx\,dy$$

$$= 2\left(\iint \phi\,dx\,dy + C_1 \underbrace{A_1}_{\text{中空部分の面積}} \right) \qquad (65)$$

ここで，$x_1 \sim x_4$ を図のようにとると

$$\iint \frac{\partial}{\partial x}(x\phi)\,dx\,dy = \int \left([x\phi]_{x_1}^{x_2} + [x\phi]_{x_3}^{x_4} \right) dy$$

$$= \int C_1 (x_2 - x_3)\,dy = -C_1 A_1 \qquad (66)$$

となり，また $y_1 \sim y_4$ を図のようにとると

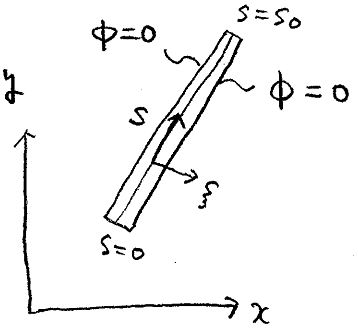
$$\iint \frac{\partial}{\partial y}(y\phi)\,dx\,dy = \int \left([y\phi]_{y_1}^{y_2} + [y\phi]_{y_3}^{y_4} \right) dx$$

$$= \int C_1 (y_2 - y_3)\,dx = -C_1 A_1 \qquad (67)$$

となることを用いている。

6.7 薄肉部材のねじり

<u>開き断面部材</u>(簡単のために直線部材としよう)



断面の中央に沿って $s-\xi$ 座標を考える。ここで境界条件を

$$\phi = 0 \quad @ \ \xi = \pm t/2 \qquad (68)$$

とおこう。つまり表面における ϕ にはs方向に勾配がない。(28)でsについての勾配項を落とした

$$\frac{d^2\phi}{d\xi^2} = -2G\omega \qquad (69)$$

について考えよう。

(69)について解く

$$\phi = -G\omega\xi^2 + C_1\xi + C_2 \tag{70}$$

境界条件より

$$\left.\begin{aligned} -G\omega\left(\frac{t}{2}\right)^2 + C_1\left(\frac{t}{2}\right) + C_2 = 0 \\ -G\omega\left(\frac{t}{2}\right)^2 - C_1\left(\frac{t}{2}\right) + C_2 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

$$\rightarrow \quad C_1 = 0, \quad C_2 = G\omega\left(\frac{t}{2}\right)^2 \tag{72}$$

(72)を(70)に代入すると，次式が得られる。

$$\phi = G\omega\left\{\left(\frac{t}{2}\right)^2 - \xi^2\right\} \tag{73}$$

これを(33)に代入し，(37)を考慮すると，(40)より

$$\begin{aligned} M_t &= 2\int_0^{s_0}\left(\int_{-t/2}^{t/2}\phi\, d\xi\right)ds \\ &= 2G\omega\int_0^{s_0}\left[\left(\frac{t}{2}\right)^2\xi - \frac{1}{3}\xi^3\right]_{-(t/2)}^{t/2} ds \\ &= 2G\omega\int_0^{s_0}\left(\frac{t^3}{4} - \frac{1}{3}\cdot\frac{t^3}{4}\right)ds \\ &= \frac{1}{3}G\omega\int_0^{s_0} t^3\, ds \end{aligned} \tag{74}$$

つまり，ねじり剛性 GJ は次のように与えられる。

$$GJ = \frac{M_t}{\omega} = \frac{1}{3}G\int_0^{s_0} t^3\, ds \tag{75}$$

また，せん断応力は(36)より

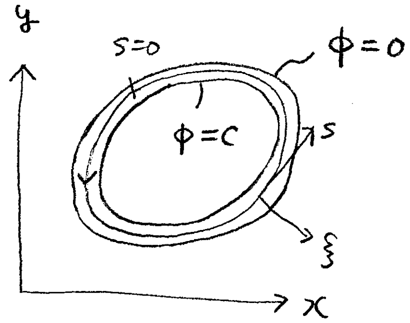
$$\tau_s = -\frac{\partial\phi}{\partial\xi} = 2G\omega\xi \tag{76}$$

$$\tau_\xi = \tau_{zx}\cos\beta + \tau_{zy}\cos\theta \qquad (s\cos\theta = x,\ s\cos\beta = y)$$

$$= \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial\phi}{\partial s} = 0 \tag{77}$$

となる。

内外表面におけるϕには次のような境界条件を与える。



$$\phi = 0 \quad @ \ \xi = \frac{t}{2} \qquad (78)$$

$$\phi = C \quad @ \ \xi = -\frac{t}{2} \qquad (79)$$

表面におけるϕにはs方向に関して勾配がないので、(69)と同様に次の微分方程式が成り立つ

$$\frac{d^2\phi}{d\xi^2} = -2G\omega \qquad (80)$$

(80)について解こう。

$$\phi = -G\omega\xi^2 + C_1\xi + C_2 \qquad (81)$$

(81)に(78),(79)を代入する。

$$-G\omega\left(\frac{t}{2}\right)^2 + C_1\left(\frac{t}{2}\right) + C_2 = 0 \qquad (82)$$

$$-G\omega\left(\frac{t}{2}\right)^2 - C_1\left(\frac{t}{2}\right) + C_2 = C \qquad (83)$$

$$\longrightarrow \quad C_1 = -\frac{C}{t}, \quad C_2 = \frac{C}{2} + G\omega\left(\frac{t}{2}\right)^2 \qquad (84)$$

(84)を(81)に代入すると

$$\phi = C\left(\frac{1}{2} - \frac{\xi}{t}\right) + \underbrace{G\omega\left\{\left(\frac{t}{2}\right)^2 - \xi^2\right\}}_{2次項}$$

$$\fallingdotseq C\left(\frac{1}{2} - \frac{\xi}{t}\right) \qquad (85)$$

となる。よって、ねじりモーメントは(65)より

$$M_t = 2\left(\iint \phi \, dxdy + C\underbrace{A_1}_{中空部分の面積}\right) = 2C\underbrace{A}_{s曲線の面積} \qquad (86)$$

となる。

このとき、せん断応力は (76), (77) より

$$\tau_s = -\frac{\partial \phi}{\partial \xi} = \frac{C}{t} \tag{87}$$

$$\tau_\xi = \frac{\partial \phi}{\partial s} = 0 \tag{88}$$

として与えられ、

$$q \equiv \tau_s t = C \tag{89}$$

となる q が定義できる。q は厚みによらず一定であり、せん断流と呼ばれる。さて、ねじりモーメント M_t と τ_s の関係は

$$\tau_s = \frac{M_t}{2At} \tag{90}$$

として与えられる。

次にワーピングの連続条件を考えよう。部材を一周したときにワーピングギャップ Δw は次式で与えられる。

$$
\begin{aligned}
\Delta w &= \oint dw \\
&= \oint \left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \right) ds \\
&= \oint \left\{ \left(\frac{1}{G}\frac{\partial \phi}{\partial y} + \omega y \right)\frac{\partial x}{\partial s} + \left(-\frac{1}{G}\frac{\partial \phi}{\partial x} - \omega x \right)\frac{\partial y}{ds} \right\} ds \\
&\qquad \left(\frac{\partial x}{\partial s} = -\frac{\partial y}{\partial \xi},\ \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \\
&= \oint \left(-\frac{1}{G}\frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \omega y \frac{\partial x}{\partial s} - \frac{1}{G}\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} - \omega x \frac{\partial y}{ds} \right) ds \\
&= -\oint \frac{1}{G}\frac{\partial \phi}{\partial \xi} ds - \omega \oint (y\,dx - x\,dy) \\
&\qquad \left(\oint x\,dy = -\oint y\,dx = A \right) \\
&= \frac{1}{G}\oint \tau_s\, ds - 2\omega A
\end{aligned}
\tag{91}
$$

$\Delta w = 0$ より

$$\oint \tau_s\, ds = 2G\omega A \tag{92}$$

を得る。

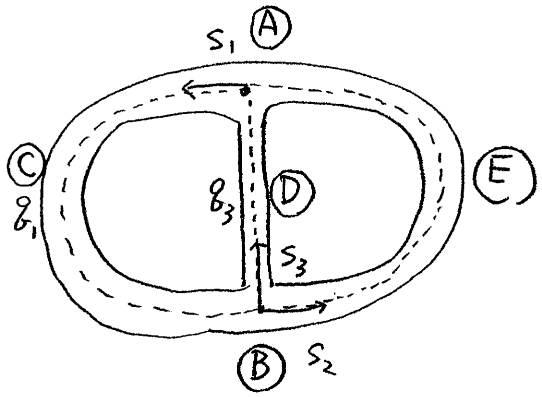
(92) に (81) を代入すると、C は 次のように決定される。

$$C = \frac{2G\omega A}{\oint \frac{ds}{t}} \tag{93}$$

よって ねじり剛性 GJ は 次のように与えられる

$$GJ = \frac{M_t}{\omega} = \frac{2CA}{\omega} = \frac{4GA^2}{\oint \frac{ds}{t}} \tag{94}$$

マルチセル



厚み：t (一定)

ACBD のせん断流 : q_1

BEAD のせん断流 : q_2

BDA のせん断流 : q_3

重ね合わせの定理より、次の

$$q_3 = q_1 - q_2 \tag{95}$$

このとき、ねじりモーメント

$$M_t = 2(q_1 \underbrace{A_1}_{\text{ACBDの面積}} + q_2 \underbrace{A_2}_{\text{BEADの面積}}) \tag{96}$$

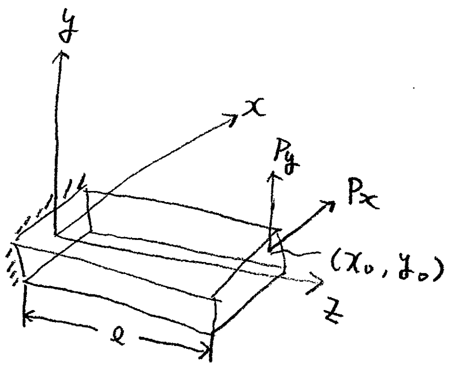
となり、(92) より

$$\left.\begin{aligned} q_1 \int_{ACB} \frac{ds_1}{t} + q_3 \int_{BDA} \frac{ds_3}{t} &= 2G\omega A_1 \\ q_2 \int_{BEA} \frac{ds_2}{t} - q_3 \int_{BDA} \frac{ds_3}{t} &= 2G\omega A_2 \end{aligned}\right\} \tag{97}$$

(95) と (97) より $q_1 \sim q_3$ が決定できる。

[7] 棒のせん断曲げ

7.1 問題設定と基礎式



はり理論（材料力学）

$$\sigma_z = -(l-z)\left(\frac{P_y}{I_x}y + \frac{P_x}{I_y}x\right) \quad (1)$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0 \quad (2)$$

$$I_x = \iint y^2\, dx dy \quad (3)$$

$$I_y = \iint x^2\, dx dy \quad (4)$$

はり理論（弾性力学）

$$\sigma_z = -(l-z)\left(\frac{P_y}{I_x}x + \frac{P_x}{I_y}y\right) \quad (5)$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \quad (6)$$

$$\gamma_{yz} \neq 0,\ \gamma_{xz} \neq 0 \quad (7)$$

・平衡方程式（(5-6)を用いる）

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = -\left(\frac{P_y y}{I_x} + \frac{P_x x}{I_y}\right) \quad (10)$$

・応力の適合条件（問題1）

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y}\right) = \frac{\nu}{1+\nu}\frac{P_y}{I_x} \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y}\right) = -\frac{\nu}{1+\nu}\frac{P_x}{I_y} \quad (12)$$

$$\longrightarrow \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} = \frac{\nu}{1+\nu}\left(\frac{P_y}{I_x}x - \frac{P_x}{I_y}y\right) + B \quad (13)$$

・側面の境界条件（[6]の(23)より）

$$Z_\nu = \tau_{zx} l + \tau_{yz} m = \tau_{zx}\frac{\partial y}{\partial s} - \tau_{yz}\frac{\partial x}{\partial s} = 0 \tag{14}$$

・端面の境界条件

$$\iint \tau_{zx}\,dxdy = P_x, \tag{15}$$

$$\iint \tau_{yz}\,dxdy = P_y \tag{16}$$

7.2 曲げの応力関数とせん断中心（半逆解法）

・平衡方程式の書き直し

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau_{zx} + \frac{P_x}{2I_y}x^2 + g(y)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\tau_{yz} + \frac{P_x}{2I_y}y^2 + f(x)\right) = 0 \tag{17}$$

・応力関数の導入

$$\tau_{zx} = \frac{\partial\phi}{\partial y} - \frac{P_x}{2I_y}x^2 - g(y) \tag{18}$$

$$\tau_{yz} = -\frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{P_y}{2I_x}y^2 - f(x) \tag{19}$$

⟶ (18), (19) は (17), つまり (10) をみたす

・せん断曲げの基礎式（適合条件）：(18), (19) を (13) に代入

$$-\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \frac{\partial\phi}{\partial y^2} - \frac{df(x)}{dx} + \frac{dg(y)}{dy} = \frac{\nu}{1+\nu}\left(\frac{P_y}{I_x}x - \frac{P_x}{I_y}y\right) + B$$

$$\rightleftarrows \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial\phi}{\partial y^2} = -\frac{\nu}{1+\nu}\left(\frac{P_y}{I_x}x - \frac{P_x}{I_y}y\right) - \frac{df(x)}{dx} + \frac{dg(y)}{dy} - B \tag{20}$$

・境界条件：(18), (19) を (14) に代入

$$\frac{\partial\phi}{\partial s} = \left(\frac{P_x}{2I_y}x^2 + g(y)\right)\frac{\partial y}{\partial s} - \left(\frac{P_y}{2I_x}y^2 + f(x)\right)\frac{\partial x}{\partial s} \tag{21}$$

11/0.26

- 曲げとねじりの分離

$$\Phi = \underbrace{\Phi_t}_{\text{ねじり}} + \underbrace{\Phi_b}_{\text{曲げ}} \tag{22}$$

→ [6] よりねじりについては次の関係が成り立つ

$$\boxed{\begin{aligned} &(\text{基礎式}) \quad \frac{\partial^2 \Phi_t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_t}{\partial y^2} = -2G\omega && (23) \\ &(\text{境界条件}) \quad \Phi_t = 0 \rightleftarrows \frac{\partial \Phi_t}{\partial s} = 0 && (24) \\ &(\text{応力}) \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \Phi_t}{\partial x}, \quad \tau_{zx} = \frac{\partial \Phi_t}{\partial y} && (25) \end{aligned}}$$

- 曲げの応力関数（$B = 2G\omega$ と仮定する）

(基礎式) $$\frac{\partial^2 \Phi_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_b}{\partial y^2} = -\frac{\nu}{1+\nu}\left(\frac{P_y}{I_x}x - \frac{P_x}{I_y}y\right) - \frac{df(x)}{dx} + \frac{dg(y)}{dy} \tag{26}$$

(境界条件) $$\frac{\partial \Phi_b}{\partial s} = \left(\frac{P_x}{2I_y}x^2 + g(y)\right)\frac{\partial y}{\partial s} - \left(\frac{P_y}{2I_x}y^2 + f(x)\right)\frac{\partial x}{\partial s} \tag{27}$$

もしも（というよりはそう持っていくのだが…），断面の境界が

$$\frac{P_x}{2I_y}x^2 + g(y) = 0, \quad \frac{P_y}{2I_x}y^2 + f(x) = 0 \tag{28}$$

として表わされるときには

$$\frac{\partial \Phi_b}{\partial s} = 0 \rightleftarrows \Phi_b = 0$$

として良い。

(応力) $$\tau^b_{zx} = \frac{\partial \Phi_b}{\partial y} - \frac{P_x}{2I_y}x^2 - g(y), \quad \tau^b_{yz} = -\frac{\partial \Phi_b}{\partial x} - \frac{P_y}{2I_x}y^2 - f(x) \tag{29}$$

- せん断中心：(曲げ)せん断応力の作るモーメント＝端末荷重モーメント

$$\iint \left(\tau^b_{yz}x - \tau^b_{zx}y\right)dxdy = P_y x_0 - P_x y_0 \tag{30}$$

→ P_x, P_y の係数から x_0, y_0 が求められる。

せん断曲げによって生じる変位

$$
\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\dfrac{P_x}{EI_y}\dfrac{z^2(3l-z)}{6} + \dfrac{\nu(l-z)}{E}\left\{\dfrac{P_y}{I_x}xy + \dfrac{P_x}{I_y}\dfrac{(x^2-y^2)}{2}\right\} \\
\dfrac{P_y}{EI_x}\dfrac{z^2(3l-z)}{6} + \dfrac{\nu(l-z)}{E}\left\{\dfrac{P_x}{I_y}xy + \dfrac{P_y}{I_x}\dfrac{(y^2-x^2)}{2}\right\} \\
-\dfrac{z(2l-z)}{2E}\left(\dfrac{P_y}{I_x}y + \dfrac{P_x}{I_y}x\right) + h(x,y)
\end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} 0 & -C_6 & C_4 \\ C_6 & 0 & C_5 \\ -C_4 & -C_5 & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}
\tag{31}
$$

ここで

$$
\frac{\partial h(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{G}\left(\frac{\partial \phi_b}{\partial y} - g(y)\right) + \frac{1}{E}\left[\frac{\nu P_y}{I_x}xy - \frac{P_x}{2I_y}\{(2+\nu)x^2+\nu y^2\}\right] \tag{32}
$$

$$
\frac{\partial h(x,y)}{\partial y} = -\frac{1}{G}\left(\frac{\partial \phi_b}{\partial x} + f(x)\right) + \frac{1}{E}\left[\frac{\nu P_x}{I_y}xy - \frac{P_y}{2I_x}\{(2+\nu)y^2+\nu x^2\}\right] \tag{33}
$$

7. 3 円形断面棒のせん断曲げ

$x_0 = y_0 = 0$ に P_y を作用する問題の解を求めよう。

円形断面境界は $x^2+y^2-a^2=0$ であり，$P_x=0$，$P_y \neq 0$

とすると

$$
f(x) = \frac{P_y}{2I_x}(x^2-a^2) \tag{34}
$$

$$
g(y) = 0 \tag{35}
$$

は (28) を満たす。(34)，(35) を (26) に代入すると

$$
\frac{\partial^2 \phi_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_b}{\partial y^2} = -\frac{1+2\nu}{1+\nu}\frac{P_y}{I_x}x \tag{36}
$$

であり $\phi=0$ の境界条件を満たす (36) の解は

$$
\phi_b = -\frac{(1+2\nu)P_y}{8(1+\nu)I_x}(x^2+y^2-a^2)x \tag{37}
$$

として与えられる。

(37) を (29) に代入する

$$\tau_{yz}^{b} = -\frac{\partial \phi_b}{\partial x} - \frac{P_y}{2I_x} y^2 - \frac{P_y}{2I_x}(x^2-a^2)$$

$$= \frac{(1+2\nu)P_y}{8(1+\nu)I_x} \cdot 3x^2 + \frac{(1+2\nu)P_y}{8(1+\nu)I_x}(y^2-a^2) - \frac{P_y}{2I_x} y^2 - \frac{P_y}{2I_x}(x^2-a^2)$$

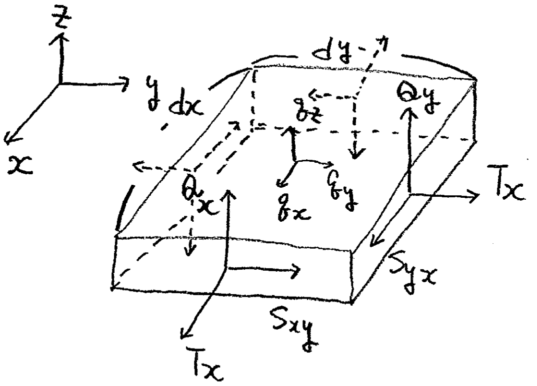
$$= \frac{(3+2\nu)P_y}{8(1+\nu)I_x}\left\{ \frac{3(1+2\nu)x^2}{(3+2\nu)} + \frac{(1+2\nu)}{(3+2\nu)}(y^2-a^2) - \frac{4(1+\nu)}{(3+2\nu)}(y^2+x^2-a^2) \right\}$$

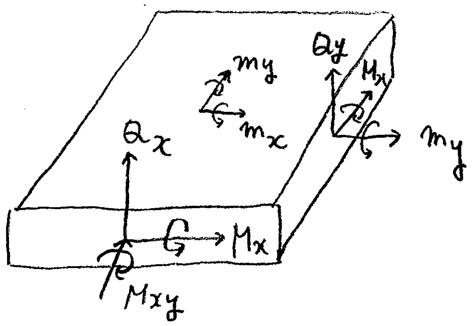
$$= \frac{(3+2\nu)P_y}{8(1+\nu)I_x}\left\{ \frac{3+6\nu-4-4\nu}{3+2\nu}x^2 - \frac{3+2\nu}{3+2\nu}(y^2-a^2) \right\}$$

$$= \frac{(3+2\nu)P_y}{8(1+\nu)I_x}\left\{ -\frac{1-2\nu}{3+2\nu}x^2 + (a^2-y^2) \right\} \qquad (38)$$

$$\tau_{zx}^{b} = \frac{\partial \phi_b}{\partial y}$$

$$= -\frac{(1+2\nu)P_y x y}{4(1+\nu)I_x} \qquad (39)$$





平板は三次元物体であるが、板厚方向に積分を取って、問題を二次元に落とすことで簡単にしよう。

そこで、板厚方向に加え合せたものを合応力という。$\sigma_z = 0$ という仮定から、次の様に与えられる。

$$
\left.
\begin{aligned}
T_x &\equiv \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \, dz \\
T_y &\equiv \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \, dz \\
S_{xy} = S_{yx} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \, dz \\
Q_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \, dz \\
Q_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} \, dz
\end{aligned}
\right\} \qquad (1)
$$

また、板厚方向にモーメントを考えたものを合モーメントという。

$$
\left.
\begin{aligned}
M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z \, dz \\
M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z \, dz \\
M_{xy} = M_{yx} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z \, dz
\end{aligned}
\right\} \qquad (2)
$$

平衡方程式

（x方向）

$$\frac{\partial}{\partial x}(T_x\,dy)\,dx + \frac{\partial}{\partial y}(S_{yx}\,dx)\,dy + q_x\,dx\,dy = 0$$

$$\longrightarrow \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial S_{yx}}{\partial y} + q_x = 0 \qquad (3)$$

（y方向）

$$\frac{\partial}{\partial x}(S_{xy}\,dy)\,dx + \frac{\partial}{\partial y}(T_x\,dx)\,dy + q_y\,dx\,dy = 0$$

$$\longrightarrow \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_x}{\partial y} + q_y = 0 \qquad (4)$$

（z方向）

$$\frac{\partial}{\partial x}(Q_x\,dy)\,dx + \frac{\partial}{\partial y}(Q_y\,dx)\,dy + q_z\,dx\,dy = 0$$

$$\longrightarrow \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q_z = 0 \qquad (5)$$

（y軸まわりのモーメント）

$$\frac{\partial}{\partial x}(M_x\,dy)\,dx + \frac{\partial}{\partial y}(M_{yx}\,dx)\,dy - (Q_x\,dy)\,dx + m_x\,dx\,dy = 0$$

$$\longrightarrow \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x + m_x = 0 \qquad (6)$$

（x軸まわりのモーメント）

$$\frac{\partial}{\partial x}(M_{xy}\,dy)\,dx + \frac{\partial}{\partial y}(M_y\,dx)\,dy - (Q_y\,dx)\,dy + m_y\,dx\,dy = 0$$

$$\longrightarrow \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y + m_y = 0 \qquad (7)$$

変形 ： キルヒホッフの仮説

$$u(x,y,z) = u_0(x,y) - z\frac{\partial w(x,y)}{\partial x} \qquad (8)$$

$$v(x,y,z) = v_0(x,y) - z\frac{\partial w(x,y)}{\partial y} \qquad (9)$$

ひずみ

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad (10)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \qquad (11)$$

$$\gamma_{xy} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) - 2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \qquad (12)$$

応力

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)$$

$$= \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu\frac{\partial v_0}{\partial y}\right) - \frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \qquad (13)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x)$$

$$= \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + \nu\frac{\partial u_0}{\partial x}\right) - \frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \qquad (14)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$= G\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) - 2Gz\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \qquad (15)$$

合応力

（ただし，$\int_{-h/2}^{h/2} z\,dz = 0$，$\int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{1}{12}h^3$）

$$T_x = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu\frac{\partial v_0}{\partial y}\right) \qquad (16)$$

$$T_y = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + \nu\frac{\partial u_0}{\partial x}\right) \qquad (17)$$

$$S_{xy} = Gh\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) \qquad (18)$$

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \tag{19}$$

$$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \tag{20}$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{21}$$

ここで、$D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ にて与えられる。すると2つの問題に大別できる

(面内(荷重)問題)

- $$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial S_{yx}}{\partial x} + q_x = 0 \tag{3}$$

- $$\frac{\partial S_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial T_x}{\partial x} + q_y = 0 \tag{4}$$

- $$T_x = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu\frac{\partial v_0}{\partial y}\right) \tag{16}$$

- $$T_y = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + \nu\frac{\partial u_0}{\partial x}\right) \tag{17}$$

- $$S_{xy} = Gh\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) \tag{18}$$

方程式は5つ，未知量 5つ(T_x, T_y, S_{xy}, u_0, v_0)

(板の曲げ問題)

- $$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q_z = 0 \tag{5}$$

- $$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x + m_x = 0 \tag{6}$$

- $$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y + m_y = 0 \tag{7}$$

$$\cdot\ M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \tag{19}$$

$$\cdot\ M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \tag{20}$$

$$\cdot\ M_{xy} = -D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{21}$$

方程式は6つ，未知量6つ（$M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y, w$）

さて，$m_x = m_y = 0$ のとき，(19)，(21)を(6)に，(20)，(21)を(7)に代入すると

$$\cdot\ Q_x = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right) \tag{22}$$

$$\cdot\ Q_y = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right) \tag{23}$$

が得られる。これを(5)に代入すると

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) = q_z \tag{24}$$

が得られる。これを板の曲げの微分方程式，たわみの方程式という

境界条件

（面内問題）

変位境界条件：$u_0 = \bar{u}_0$，$v_0 = \bar{v}_0$ (25)

力学的境界条件：$T_x = \bar{T}_x$，$T_y = \bar{T}_y$，$S_{xy} = \bar{S}_{xy}$ (26)

（曲げ問題）

変位境界条件：$w = \bar{w}$，$\frac{\partial w}{\partial x} = \overline{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)}$，$\frac{\partial w}{\partial y} = \overline{\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)}$ (27)

力学的境界条件：$M_x = \bar{M}_x$，$M_y = \bar{M}_y$ (28)

Kirchhoffの境界条件 →
$$\begin{cases} F_x = Q_x + \dfrac{\partial M_{xy}}{\partial y} = \bar{F}_x & (29) \\[2ex] F_y = Q_y + \dfrac{\partial M_{xy}}{\partial x} = \bar{F}_y & (30) \end{cases}$$

(よく現われる境界条件)

$$\text{固定端}：w=0,\quad \frac{\partial w}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial w}{\partial y}=0 \tag{31}$$

$$\text{単純支持}：w=0,\quad M_x=0,\quad M_y=0 \tag{32}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0$$

$$\text{自由端}：M_x=0,\quad F_x=0,\quad F_y=0 \tag{33}$$

$$F_x=Q_x+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$$

$$\boxed{\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}=0} \qquad \boxed{\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}=0}$$

9.2 圧力 $q_z = p\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$ を受ける四辺単純支持長方形板

式(24)に上記の式を代入する。

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)=p\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \tag{34}$$

単純支持のため(31)より

$$\begin{cases} x=0,\ a\ ; & w=0,\quad M_x\equiv -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \longrightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \\ y=0,\ b\ ; & w=0,\quad M_y\equiv -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \longrightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \end{cases} \tag{35}$$

ここで，C を定数として

$$w=C\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \tag{36}$$

とすると，(35)の B.C. を満たしており，(36)を(34)に代入すると

$$C=\frac{p}{\pi^4 D\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2} \tag{37}$$

となる。最大たわみは板の中心 $\left(x=\frac{a}{2},\ y=\frac{b}{2}\right)$ で

$$w_{max}=\frac{p}{\pi^4 D\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2} \tag{38}$$

となる。

7.5 四辺単純支持長方形板のたわみ(フーリエ級数表示)

$x=0, a$; $y=0, b$ で単純支持されており、荷重分布が

$$q_z = P_{mn}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{39}$$

で与えられる時、たわみは

$$w = \frac{P_{mn}}{\pi^4 D\{(m/a)^2+(n/b)^2\}^2}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{40}$$

とかける。そこで、荷重分布が2重フーリエ級数に展開する。

$$q_z(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} P_{mn}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{41}$$

このとき、たわみ解は重ね合わせにより次のように得られる。

$$w = \frac{1}{\pi^4 D}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P_{mn}}{\{(m/a)^2+(n/b)^2\}^2}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{42}$$

展開係数の決定法は

$$P_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b q_z(x, y)\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)dy\,dx \tag{43}$$

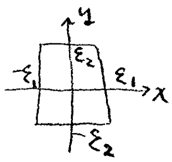
によって与えられる。

一様分布荷重 $q_z = P_0$

$$P_{mn} = \frac{4P_0}{ab}\int_0^a\int_0^b \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)dy\,dx = \begin{cases} \dfrac{16P_0}{\pi^2 mn} & (m, n: \text{奇数}) \\ 0 & (m, n: \text{どちらか奇数でない}) \end{cases} \tag{44}$$

集中荷重 $(x=\xi, y=\eta)$

$$q_z = \frac{P}{4\varepsilon_1\varepsilon_2} \quad (-\varepsilon_1 < x < \varepsilon_1, -\varepsilon_2 < y < \varepsilon_2)$$



なる一様分布荷重として

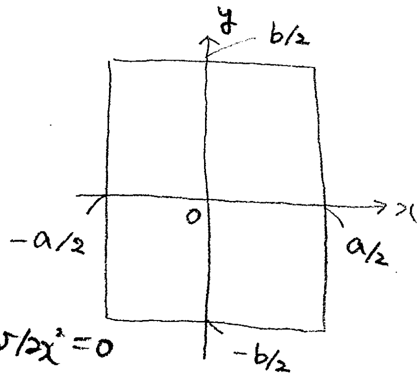
$$P_{mn} = \lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}}\frac{P}{ab\varepsilon_1\varepsilon_2}\int_{\xi-\varepsilon_1}^{\xi+\varepsilon_1}\int_{\eta-\varepsilon_2}^{\eta+\varepsilon_2}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)dy\,dx$$

$$= \frac{4P}{ab}\sin\left(\frac{m\pi\xi}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi\eta}{b}\right) \tag{45}$$

得られる。

9.4 対辺単純支持長方形板

$x=\pm a/2$ が単純支持の場合, y軸に対称を考える。



$$w=\sum_{m=1,3,5\cdots}^{\infty} Y_m(y)\cos\frac{m\pi x}{a} \qquad (46)$$

境界条件は $x=\pm a/2$ で $w=0$, $M_x=0 \to \partial^2 w/\partial x^2=0$

y軸に関して対称な荷重 q_z は次のように書ける。

$$q_z=\sum_{m=1,3,5\cdots}^{\infty} P_m(y)\cos\frac{m\pi x}{a} \qquad (47)$$

(46), (47) を (24) に代入する。

$$\sum_{m=1,3,5\cdots}^{\infty} D\left(Y_m(y)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4\cos\frac{m\pi x}{a}-2\frac{d^2Y_m(y)}{dy^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\cos\frac{m\pi x}{a}+\frac{d^4Y_m(y)}{dy}\cos\frac{m\pi x}{a}\right)=\sum_{m=1,3,5\cdots}^{\infty} P_m(y)\cos\frac{m\pi x}{a} \qquad (48)$$

$$\rightleftarrows\quad \frac{d^4Y_m(y)}{dy^4}-2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\frac{d^2Y_m(y)}{dy^2}+\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4Y_m(y)=\frac{P_m(y)}{D} \qquad (49)$$

(49) を常微分方程式をとくことで, (46) は単一級数で変位 w を表すことが出来る。一方で, (42) は 2重級数で与えられる。

ここでは, 一様分布荷重 p で, $y=\pm b/2$ においても単純支持とする。ここで $w=w_1(x)+w_2(x,y)$ に分ける。このとき,

(I) $w_1(x)$ に関する問題

$$D\frac{d^4w_1}{dx^4}=p \qquad (50)$$

$$x=\pm\frac{a}{2}\ ;\ w_1=\frac{d^2w_1}{dx^2}=0 \qquad (51)$$

(Ⅱ) $w_2(x\cdot y)$ に関する問題

$$D\Delta\Delta w_2 = 0 \tag{52}$$

$$x = \pm\frac{a}{2} \; ; \; w_2 = \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} = 0 \tag{53}$$

$$y = \pm\frac{b}{2} \; ; \; w_2 = -w_1 , \; \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} = 0 \tag{54}$$

(Ⅰ) の解の導出

$$\frac{d^3 w_1}{dx^3} = \frac{P}{D}x + C_1 \quad \text{———} \; ①$$

$$\frac{d^2 w_1}{dx^2} = \frac{P}{2D}x^2 + C_1 x + C_2 \quad \text{———} \; ②$$

$$\frac{d w_1}{dx} = \frac{P}{6D}x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3 \quad \text{———} \; ③$$

$$w_1 = \frac{P}{24D}x^4 + \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3 x + C_4 \quad \text{———} \; ④$$

② において　$x = \pm\frac{a}{2}$; $\frac{d^2 w_1}{dx^2} = 0$

$$\frac{P}{2D}\cdot\left(\frac{a^2}{4}\right) + C_1\cdot\left(\frac{a}{2}\right) + C_2 = 0$$

$$+) \quad \frac{P}{2D}\cdot\left(\frac{a^2}{4}\right) + C_1\cdot\left(-\frac{a}{2}\right) + C_2 = 0$$

$$C_2 = -\frac{P}{2D}\cdot\left(\frac{a^2}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$$

④ において　$x = \pm\frac{a}{2}$; $w_1 = 0$

$$\frac{P}{24D}\cdot\left(\frac{a^4}{16}\right) + \left(-\frac{P}{4D}\cdot\frac{a^2}{4}\right)\cdot\frac{a^2}{4} + C_3\cdot\left(\frac{a}{2}\right) + C_4 = 0$$

$$+) \quad \frac{P}{24D}\cdot\left(\frac{a^4}{16}\right) + \left(-\frac{P}{4D}\cdot\frac{a^2}{4}\right)\cdot\frac{a^4}{4} + C_3\cdot\left(-\frac{a}{2}\right) + C_4 = 0$$

$$-\frac{\cancel{2}\times 5Pa^4}{384D} + \cancel{2}C_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_4 = \frac{5Pa^4}{384D} \quad \Rightarrow \quad C_3 = 0$$

$$w_1 = \frac{P}{24D}x^4 - \frac{Pa^4}{16D}x^2 + \frac{5Pa^4}{384D} = \frac{P}{24D}\left(x^2 - \frac{a^2}{4}\right)\left(x^2 - \frac{5}{4}a^2\right)$$

$$= \frac{4Pa^4}{\pi^5 D}\sum_{m=1,3,5\cdots}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^5}\cos\frac{m\pi x}{a} \tag{55}$$

そこで、

$$w_2 = \sum_{m=1,3,5\cdots}^{\infty} Y_m(y) \cos\frac{m\pi x}{a} \qquad (56)$$

とすると、(49)より

$$\frac{d^4 Y_m(y)}{dy^4} - 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \frac{d^2 Y_m(y)}{dy^2} + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 Y_m(y) = 0 \qquad (57)$$

(57)の解の導出

特性方程式より（重解に注意）

$$Y_m(y) = \frac{Pa^4}{D}\left(A_m \cosh\frac{m\pi y}{a} + B_m \sinh\frac{m\pi y}{a} + C_m \frac{m\pi y}{a}\sinh\frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a}\cosh\frac{m\pi y}{a}\right) \quad ①$$

y軸対称性より $B_m = D_m = 0$ であり、$\beta_m = \frac{m\pi}{a}$ とすると

(54-1)より

$$\frac{Pa^4}{D}\left(A_m \cosh\alpha_m + C_m\alpha_m \sinh\alpha_m\right) = \frac{4Pa^4}{\pi^5 D}\cdot\frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^5} \quad ②$$

ただし、$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a} = \frac{b}{2}\beta_m$。これを書き換えると

$$A_m \cosh\alpha_m + C_m\alpha_m \sinh\alpha_m = \frac{4}{\pi^5}\cdot\frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^5} \quad ③$$

(54-2)より

$$A_m \cosh\alpha_m + (2\cosh\alpha_m + \alpha_m\sinh\alpha_m)C_m = 0 \quad ④$$

③-④より

$$C_m = \frac{1}{2\cosh\alpha_m}\left(\frac{4}{\pi^5}\cdot\frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^5}\right) \quad ⑤$$

⑤と④より

$$A_m = -(2 + \alpha_m\tanh\alpha_m)C_m$$

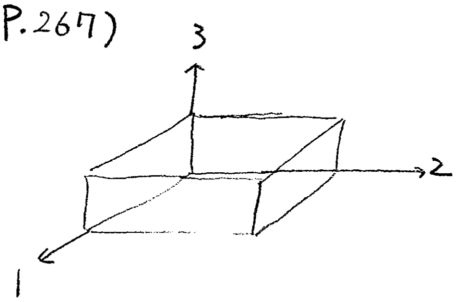
$$= -\frac{2+\alpha_m\tanh\alpha_m}{2\cosh\alpha_m}\left(\frac{4}{\pi^5}\cdot\frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^5}\right) \quad ⑥$$

(55)、(56)、⑤、⑥より、次の単一級数解(式(42))は次のように得られる。

$$w = \frac{4Pa^4}{\pi^5 D}\sum_{m=1,3,5\cdots}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^5}\cos\frac{m\pi x}{a}\left(1 - \frac{2+\alpha_m\tanh\alpha_m}{2\cosh\alpha_m}\cosh\frac{m\pi y}{a} + \frac{1}{2\cosh\alpha_m}\frac{m\pi y}{a}\sinh\frac{m\pi y}{a}\right) \quad (58)$$

[10] 異方性体の弾性学

10.1 直交異方性弾性体（東郷 P.267）



3つの基礎式（変位－ひずみ，つり合い，ひずみ－応力）のうちひずみ－応力だけ異なる。

<u>ひずみ－応力関係式</u>

$$
\left.
\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{\sigma_{11}}{E_{11}} - \nu_{21}\frac{\sigma_{22}}{E_{22}} - \nu_{31}\frac{\sigma_{33}}{E_{33}} \\
\varepsilon_{22} &= -\nu_{12}\frac{\sigma_{11}}{E_{11}} + \frac{\sigma_{22}}{E_{22}} - \nu_{32}\frac{\sigma_{33}}{E_{33}} \\
\varepsilon_{33} &= -\nu_{13}\frac{\sigma_{11}}{E_{11}} - \nu_{23}\frac{\sigma_{22}}{E_{22}} + \frac{\sigma_{33}}{E_{33}} \\
\gamma_{23} &= \frac{\tau_{23}}{G_{23}} \\
\gamma_{31} &= \frac{\tau_{31}}{G_{31}} \\
\gamma_{12} &= \frac{\tau_{12}}{G_{12}}
\end{aligned}
\right\} \qquad (1)
$$

ν_{ij} : i 方向の垂直ひずみに対する j 方向の垂直ひずみの比

(1) を行列にて表すと（この6行6列の行列をコンプライアンス行列という）

$$
\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
1/E_{11} & -\nu_{12}/E_{11} & -\nu_{13}/E_{11} & 0 & 0 & 0 \\
-\nu_{12}/E_{11} & 1/E_{22} & -\nu_{23}/E_{22} & 0 & 0 & 0 \\
-\nu_{13}/E_{11} & -\nu_{23}/E_{22} & 1/E_{33} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{31} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{pmatrix}
\qquad (2)
$$

ここで，(2)の対称性を満たすべく

$$\frac{\nu_{21}}{E_{22}}=\frac{\nu_{12}}{E_{11}},\quad \frac{\nu_{23}}{E_{22}}=\frac{\nu_{32}}{E_{33}},\quad \frac{\nu_{31}}{E_{33}}=\frac{\nu_{13}}{E_{11}} \tag{3}$$

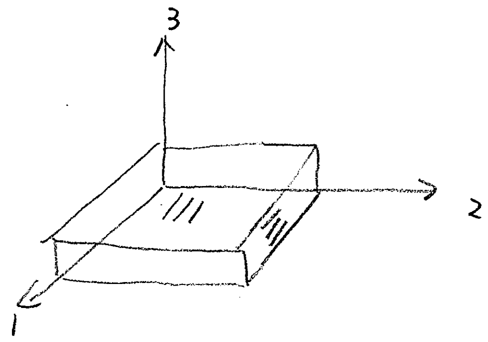
ということを用いている。(2)の逆行列は次のようにして求められる。

$$\begin{pmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \tau_{23}\\ \tau_{31}\\ \tau_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}D_{11} & D_{12} & D_{13} & & & \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} & & & \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} & & & \\ & & & D_{44} & & \\ & & & & D_{55} & \\ & & & & & D_{66}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \gamma_{23}\\ \gamma_{31}\\ \gamma_{12}\end{pmatrix} \tag{4}$$

ここで，行列の各成分は次のように与えられる。

$$\left.\begin{aligned}
D_{11}&=\frac{1}{E_{22}E_{33}\Delta}(1-\nu_{23}\nu_{32})\\
D_{12}&=\frac{1}{E_{11}E_{33}\Delta}(\nu_{12}+\nu_{13}\nu_{32})\\
D_{13}&=\frac{1}{E_{22}E_{33}\Delta}(\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32})\\
D_{22}&=\frac{1}{E_{11}E_{33}\Delta}(1-\nu_{31}\nu_{13})\\
D_{23}&=\frac{1}{E_{11}E_{22}\Delta}(\nu_{23}+\nu_{21}\nu_{13})\\
D_{33}&=\frac{1}{E_{11}E_{22}\Delta}(1-\nu_{21}\nu_{12})\\
D_{44}&=G_{23}\\
D_{55}&=G_{31}\\
D_{66}&=G_{12}\\
\Delta&=\frac{1}{E_{11}E_{22}E_{33}}(1-\nu_{21}\nu_{12}-\nu_{23}\nu_{32}-\nu_{31}\nu_{13}-2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31})
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

10.2 横等方性弾性体



$E_{22}=E_{33}$, $G_{12}=G_{13}$, $\nu_{23}=\nu_{32}$, $\nu_{13}=\nu_{12}$, $\nu_{31}=\nu_{21}$ のような状況を考える。これは右図のような複合材のケースに対応する。

2−3面においては面内等方となるため

$$G_{23}=\frac{E_{22}}{2(1+\nu_{23})} \tag{6}$$

と書ける。これらを考慮に入れると、(2)は次のように書ける。

$$\begin{pmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \gamma_{23}\\ \gamma_{31}\\ \gamma_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/E_{11} & -\nu_{12}/E_{11} & -\nu_{12}/E_{11} & & & \\ -\nu_{12}/E_{11} & 1/E_{22} & -\nu_{23}/E_{22} & & & \\ -\nu_{12}/E_{11} & -\nu_{23}/E_{22} & 1/E_{22} & & & \\ & & & 2(1+\nu_{23})/E_{22} & & \\ & & & & 1/G_{12} & \\ & & & & & 1/G_{12}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \tau_{23}\\ \tau_{31}\\ \tau_{12}\end{pmatrix} \tag{7}$$

式(7)の逆行列は次のように書ける。

$$\begin{pmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \tau_{23}\\ \tau_{31}\\ \tau_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & 0\\ D_{12} & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & 0\\ D_{13} & D_{23} & D_{33} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \gamma_{23}\\ \gamma_{31}\\ \gamma_{12}\end{pmatrix} \tag{8}$$

ここで、行列の各成分は

$$\left.\begin{aligned} D_{11}&=\frac{1}{(E_{22})^2\Delta}(1-\nu_{23}^2)\\ D_{22}=D_{33}&=\frac{1}{E_{11}E_{22}\Delta}(1-\nu_{12}\nu_{21})\end{aligned}\right\}$$

$$D_{12} = D_{13} = \frac{1}{E_{11}E_{22}\Delta}(\nu_{12} + \nu_{12}\nu_{23})$$

$$D_{23} = \frac{1}{E_{11}E_{22}\Delta}(\nu_{23} + \nu_{12}\nu_{21})$$

$$D_{44} = \frac{E_{22}}{2(1+\nu_{23})}$$

$$D_{55} = D_{66} = G_{12}$$

$$\Delta = \frac{1}{E_{11}E_{22}^2}(1 - 2\nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}^2 - 2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{21})$$

平面応力　$\sigma_{33} = \tau_{23} = \tau_{31} = 0$, $\gamma_{23} = \gamma_{31} = 0$ ヲ (7)

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & 0 \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{C}_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$\bar{C}_{11} = \frac{1}{E_{11}}, \quad \bar{C}_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_{11}}, \quad C_{22} = \frac{1}{E_{22}}, \quad C_{66} = \frac{1}{G_{12}} \tag{11}$$

このとき, ε_{33} は次のように与えられる。

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu_{12}}{E_{11}}\sigma_{11} - \frac{\nu_{23}}{E_{22}}\sigma_{22} \tag{12}$$

(10) の逆行列

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{D}_{11} & \bar{D}_{12} & 0 \\ \bar{D}_{12} & \bar{D}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{D}_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} \tag{13}$$

$$\bar{D}_{11} = \frac{E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \quad \bar{D}_{12} = \frac{\nu_{12}E_{22}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \quad \bar{D}_{22} = \frac{E_{22}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \quad \bar{D}_{66} = G_{12} \tag{14}$$

平面ひずみ　$\varepsilon_{33}=\gamma_{23}=\gamma_{31}=0,\quad \tau_{23}=\tau_{31}=0$

$$\varepsilon_{33}=\frac{1}{E_{22}}\sigma_{33}-\frac{\nu_{12}}{E_{11}}\sigma_{11}-\frac{\nu_{23}}{E_{22}}\sigma_{22}=0 \tag{15}$$

$$\rightarrow\ \sigma_{33}=\nu_{21}\sigma_{11}+\nu_{23}\sigma_{22} \tag{16}$$

$$\varepsilon_{11}=\frac{1}{E_{11}}\sigma_{11}-\frac{\nu_{12}}{E_{11}}\sigma_{22}-\frac{\nu_{12}}{E_{11}}(\nu_{21}\sigma_{11}+\nu_{23}\sigma_{22})$$

$$=\frac{1-\nu_{12}\nu_{21}}{E_{11}}\sigma_{11}-\frac{\nu_{12}+\nu_{12}\nu_{23}}{E_{11}}\sigma_{22} \tag{17}$$

ν_{12}/E_{11}

$$\varepsilon_{22}=-\frac{\nu_{12}}{E_{11}}\sigma_{11}+\frac{1}{E_{22}}\sigma_{22}-\frac{\nu_{23}}{E_{22}}(\nu_{21}\sigma_{11}+\nu_{23}\sigma_{22})$$

$$=-\frac{\nu_{12}+\nu_{12}\nu_{23}}{E_{11}}\sigma_{11}+\frac{1-\nu_{23}\nu_{23}}{E_{22}}\sigma_{22} \tag{18}$$

つまり、

$$\begin{pmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \gamma_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & 0\\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & 0\\ 0 & 0 & \bar{C}_{66}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \tau_{12}\end{pmatrix} \tag{19}$$

$$\bar{C}_{11}=\frac{1-\nu_{12}\nu_{21}}{E_{11}},\quad \bar{C}_{12}=\frac{1-\nu_{23}^2}{E_{22}},\quad \bar{C}_{22}=-\frac{\nu_{12}+\nu_{12}\nu_{23}}{E_{11}},\quad \bar{C}_{66}=\frac{1}{G_{12}} \tag{20}$$

とかける。また、

(19)の逆行列

$$\begin{pmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \tau_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar{D}_{11} & \bar{D}_{12} & 0\\ \bar{D}_{12} & \bar{D}_{22} & 0\\ 0 & 0 & \bar{D}_{66}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \gamma_{12}\end{pmatrix} \tag{21}$$

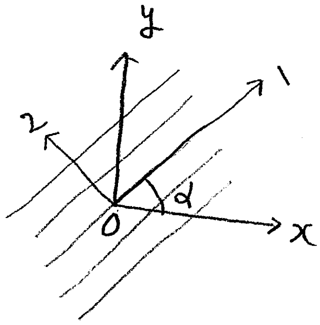
$$\bar{D}_{11} = \frac{E_{11}(1-\nu_{23}^2)}{1-\nu_{23}^2-2\nu_{12}\nu_{21}-2\nu_{12}\nu_{21}\nu_{23}} \tag{22}$$

$$\bar{D}_{22} = \frac{E_{22}(1-\nu_{12}\nu_{21})}{1-\nu_{23}^2-2\nu_{12}\nu_{21}-2\nu_{12}\nu_{21}\nu_{23}} \tag{23}$$

$$\bar{D}_{12} = \frac{E_{22}(\nu_{12}+\nu_{12}\nu_{23})}{1-\nu_{23}^2-2\nu_{12}\nu_{21}-2\nu_{12}\nu_{21}\nu_{23}} \tag{24}$$

$$\bar{D}_{66} = G_{12} \tag{25}$$

座標回転（平面問題）



・O−12 座標

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{pmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} \tag{26}$$

・O−xy 座標

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \tag{27}$$

（座標変換）

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbb{T}\,\bar{\boldsymbol{\sigma}} \\ \mathbb{T} &= \begin{pmatrix} \cos^2\alpha & \sin^2\alpha & -2\sin\alpha\cos\alpha \\ \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & 2\sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha & -\sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha-\sin^2\alpha \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

$$\mathbb{E} = \mathbb{R}\,\bar{\mathbb{E}}$$

$$\mathbb{R} = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha & \sin^2\alpha & -\sin\alpha\cos\alpha \\ \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha \\ 2\sin\alpha\cos\alpha & -2\sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \end{pmatrix} \tag{29}$$

つまり ひずみ−応力関係

$$\cdot\ \mathbb{E} = \mathbb{R}\,\bar{\mathbb{C}}\,\mathbb{T}^{-1}\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}\,\boldsymbol{\sigma} \ \rightleftarrows\ \mathbb{C} = \mathbb{R}\,\bar{\mathbb{C}}\,\mathbb{T}^{-1} \tag{30}$$

$$\rightleftarrows \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \tag{31}$$

これより、

$$\left.\begin{aligned}
C_{11} &= \bar{C}_{11}\cos^4\alpha + (2\bar{C}_{12} + \bar{C}_{66})\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \bar{C}_{22}\sin^4\alpha \\
C_{12} &= (\bar{C}_{11} + \bar{C}_{22} - \bar{C}_{66})\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \bar{C}_{12}(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) \\
C_{16} &= (2\bar{C}_{11} - 2\bar{C}_{12} - \bar{C}_{66})\sin\alpha\cos^3\alpha - (2\bar{C}_{22} - 2\bar{C}_{12} - \bar{C}_{66})\sin^3\alpha\cos\alpha \\
C_{22} &= \bar{C}_{11}\sin^4\alpha + (2\bar{C}_{12} + \bar{C}_{66})\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \bar{C}_{22}\cos^4\alpha \\
C_{26} &= (2\bar{C}_{11} - 2\bar{C}_{12} - \bar{C}_{66})\sin^3\alpha\cos\alpha - (2\bar{C}_{22} - 2\bar{C}_{12} - \bar{C}_{66})\sin\alpha\cos^3\alpha \\
C_{66} &= 2(2\bar{C}_{11} + 2\bar{C}_{22} - 4\bar{C}_{12} - \bar{C}_{66})\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \bar{C}_{66}(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha)
\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

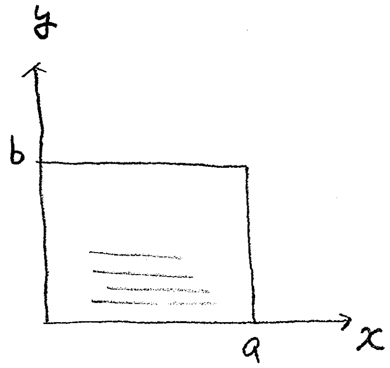
となる。一方，応力−ひずみ関係は

$$\cdot\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{T}\,\bar{\mathbb{D}}\,\mathbb{R}^{-1}\mathbb{E} = \mathbb{D}\,\mathbb{E} \ \rightleftarrows\ \mathbb{D} = \mathbb{T}\,\bar{\mathbb{D}}\,\mathbb{R}^{-1} \tag{33}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \tag{34}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
D_{11} &= \bar{D}_{11}\cos^4\alpha + 2(\bar{D}_{12} + 2\bar{D}_{66})\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \bar{D}_{22}\sin^4\alpha \\
D_{12} &= (\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22} - 4\bar{D}_{66})\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \bar{D}_{12}(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) \\
D_{16} &= (\bar{D}_{11} - \bar{D}_{12} - 2\bar{D}_{66})\sin\alpha\cos^3\alpha + (\bar{D}_{12} - \bar{D}_{22} + 2\bar{D}_{66})\sin^3\alpha\cos\alpha \\
D_{22} &= \bar{D}_{11}\sin^4\alpha + 2(\bar{D}_{12} + 2\bar{D}_{66})\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \bar{D}_{22}\cos^4\alpha \\
D_{26} &= (\bar{D}_{11} - \bar{D}_{12} - 2\bar{D}_{66})\sin^3\alpha\cos\alpha + (\bar{D}_{12} - \bar{D}_{22} + 2\bar{D}_{66})\sin\alpha\cos^3\alpha \\
D_{66} &= (\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22} - 2\bar{D}_{12} - 2\bar{D}_{66})\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \bar{D}_{66}(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha)
\end{aligned}
\right\} \quad (35)
$$

10.3 横等方性平板の曲げ（単純支持）



[9]の平板の曲げ理論を用いる。

<u>変形</u>：キルヒホッフの仮説

$$u(x, y, z) = -z\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \quad (36)$$

$$v(x, y, z) = -z\frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \quad (37)$$

<u>ひずみ</u>

$$\varepsilon_x = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (38)$$

$$\varepsilon_y = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (39)$$

$$\gamma_{xy} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (40)$$

<u>構成関係</u>：式(34)で $\alpha = 0$ → $D_{ij} = \bar{D}_{ij}$

$$
\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} \bar{D}_{11} & \bar{D}_{12} & 0 \\ \bar{D}_{12} & \bar{D}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{D}_{66} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}
\quad (41)
$$

$$\sigma_x = \frac{E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}(\varepsilon_x + \nu_{21}\varepsilon_y) \qquad \left(\frac{\nu_{12}}{E_{11}} = \frac{\nu_{21}}{E_{22}} \rightleftarrows \nu_{12}E_{22} = \nu_{21}E_{11}\right)$$

$$= -\frac{E_{11}z}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_{21}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \tag{42}$$

$$\sigma_y = \frac{E_{22}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}(\nu_{12}\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

$$= -\frac{E_{22}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\left(\nu_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \tag{43}$$

$$\tau_{xy} = G_{12}\gamma_{xy} = -2G_{12}z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{44}$$

合応力

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z\, dz = -\frac{E_{11}h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_{21}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$= D_{xx}\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + D_{xy}\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \tag{45}$$

$$M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z\, dz = -\frac{E_{22}h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})}\left(\nu_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$= D_{xy}\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + D_{yy}\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \tag{46}$$

$$M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z\, dz = -\frac{G_{xy}h^3}{6}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$= D_{ss}\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) \tag{47}$$

(曲げ)平衡方程式 ($m_x = m_y = 0$)

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \tag{48}$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0 \tag{49}$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q_z = 0 \tag{50}$$

(45), (47) を (48) に代入

$$Q_x = -D_{xx}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - (D_{xy} + D_{ss})\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \tag{51}$$

(46), (47) を (49) に代入

$$Q_y = -(D_{xy} + D_{ss})\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - D_{yy}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \tag{52}$$

(51), (52) を (50) に代入

$$D_{xx}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{xy} + D_{ss})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{yy}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q_z \tag{53}$$

これを横等方性平板の曲げの方程式という。

境界条件

$$\left.\begin{aligned} x = 0, a &; \quad w = 0, \quad M_x = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \\ y = 0, b &; \quad w = 0, \quad M_y = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

たわみを

$$w = C \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \tag{55}$$

$$q_z = p \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \tag{56}$$

と(55)を(53)に代入すると

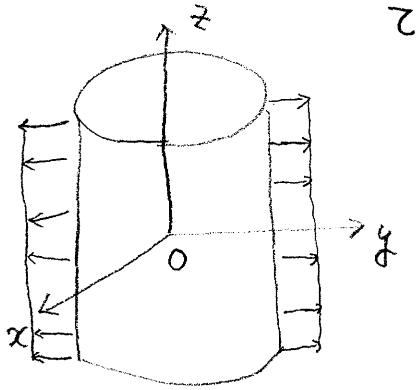
$$C = \frac{p a^4 b^4}{\pi^4 \{ b^4 D_{xx} + 2a^2 b^2 (D_{xy} + D_{ss}) + a^4 D_{xy} \}} \tag{57}$$

を得る。

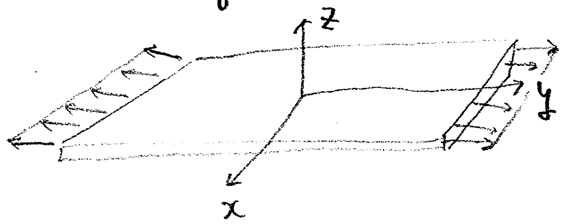
[11] 二次元弾性論

11.1 二次元弾性問題とは …… 2つに大別出来る

平面ひずみ ： $\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$ ⟶ 必ずしも σ_{zz} はゼロではない



平面応力 ： $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$ ⟶ 必ずしも ε_{zz} はゼロではない



11.2 平面ひずみ問題

- 変位

(広義) 平面ひずみ

$$u = u(x, y),\ v = v(x, y),\ w = w(z) \qquad (1)$$

(狭義) 平面ひずみ

$$u = u(x, y),\ v = v(x, y),\ w = 0 \qquad (2)$$

⟶ 以降では狭義の平面ひずみ (11.2) についてだけ考えることにする。

・ひずみ－変位関係式

$$
\left.
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\
\varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \\
\gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}
\end{aligned}
\right\} \qquad (3)
$$

必要ナシ

・ひずみ－応力関係（Hookeの法則）

$$
\left.
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z) \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_z - \nu\sigma_x) \\
\varepsilon_z &= \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \\
\gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} = 0 \quad \rightleftarrows \quad \tau_{yz} = 0 \\
\gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G} = 0 \quad \rightleftarrows \quad \tau_{xz} = 0 \\
\gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}
\end{aligned}
\right\} \qquad (4)
$$

(4-3)より $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$ であり、これを(4)のσ_zに代入すると

$$
\left.
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\{(1-\nu^2)\sigma_x - \nu(1+\nu)\sigma_y\} \\
&= \frac{(1-\nu^2)}{E}\left(\sigma_x - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_y\right) \\
&= \frac{1}{E'}(\sigma_x - \nu'\sigma_y)
\end{aligned}
\right\}
$$

同様にして

$$
\varepsilon_y = \frac{1}{E'}(\sigma_y - \nu'\sigma_x)
$$

$$
\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \qquad (5)
$$

ただし,

$$
E' = \frac{E}{1-\nu^2}, \qquad \nu' = \frac{\nu}{1-\nu} \qquad (6)
$$

である。これを応力について解くと

・応力－ひずみ関係

$$
\left.
\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E'}{1-(\nu')^2}(\varepsilon_x + \nu'\varepsilon_y) \\
\sigma_y &= \frac{E'}{1-(\nu')^2}(\varepsilon_y + \nu'\varepsilon_x) \\
\tau_{xy} &= G\gamma_{xy}
\end{aligned}
\right\} \qquad (7)
$$

と書ける。

・平衡方程式 ： $f_x = f_x(x,y)$, $f_y = f_y(x,y)$, $f_z = 0$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + f_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y = 0\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

・ひずみの適合条件

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 0 \qquad (9)$$

11.3 平面応力問題

この問題において，最も重要な仮定は当然のことであるが

$$\sigma_z = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0 \qquad (10)$$

である。このことを念頭において変位，ひずみ，構成関係，平衡方程式と導出していこう。

・変位

$$u = u(x,y,z),\ v = v(x,y,z),\ w = w(x,y,z) \qquad (11)$$

・ひずみ－応力関係（$\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$を考慮して）

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) & G\gamma_{xy} &= \tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) & \gamma_{yz} &= 0 \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) & \gamma_{zx} &= 0\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

・応力－ひずみ関係

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x+\nu\varepsilon_y)\\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y+\nu\varepsilon_x)\\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

→ 本来 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ は x, y, z の関数であるが、x, y の関数として仮定しても大きな問題とはならない。

・ひずみ－変位関係式

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}\\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}\\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

→ この場合も x, y の関数してさしつかえない

・適合条件

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y} \tag{15}$$

・境界条件

$$u=\bar{u}, \quad v=\bar{v} \quad \text{(変位境界)} \tag{16}$$

$$\begin{pmatrix}\sigma_x & \tau_{xy}\\ \tau_{xy} & \sigma_y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar{X}_\nu\\ \bar{Y}_\nu\end{pmatrix} \quad \text{(力学的境界)} \tag{17}$$

11.4 エアリの応力関数

平面ひずみ、かつ $f_x = f_y = 0$ を考えよう。このとき、平衡方程式は次のように書ける。

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

式(9)の適合条件に式(4)を代入する。

$$\frac{1}{E'}\left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \nu' \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{E'}\left(\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu' \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{G}\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \qquad \left(\text{ここで } G = \frac{E'}{2(1+\nu')}\right) \qquad (19)$$

$$\rightleftarrows \quad \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu'\left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}\right) = 2(1+\nu')\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \qquad (20)$$

(20)の右辺に(18)より得られた $\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}$ を代入する。すると

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = 0 \qquad (21)$$

$$\rightleftarrows \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \qquad (22)$$

と書ける。

(18) の平衡方程式は

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \tag{23}$$

とおくと，満たされる。この F を エアリの応力関数という。

(23) を (22) に代入すると

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) = 0$$

$$\rightleftarrows \quad \Delta\Delta F = 0 \qquad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

$$\rightleftarrows \quad \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^2} = 0 \tag{24}$$

となる。つまり F は重調和関数である。

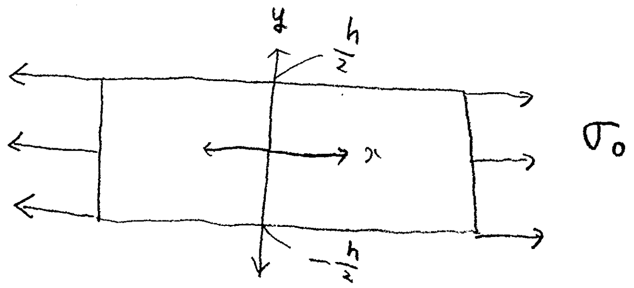
無限板の引張り　：$\left(-\infty < x < +\infty, \ -\frac{h}{2} < y < \frac{h}{2}\right)$

$$F = \frac{1}{2}\sigma_0 y^2. \tag{25}$$

(25) を (23) に代入する

$$\sigma_x = \sigma_0, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \tag{26}$$

すると，図のような 単純引張りが再現出来る

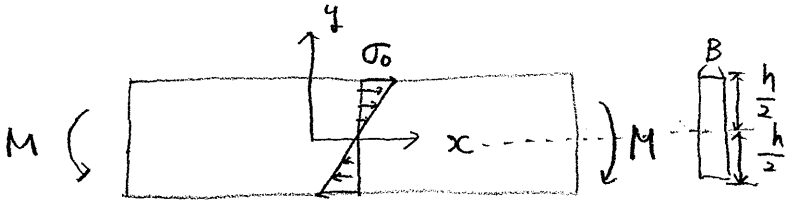


はりの純曲げ：$(-\infty < x < +\infty,\ -h/2 < y < h/2)$

$$F = \frac{\sigma_0}{6} y^3 \qquad (27)$$

(27) を (23) に代入すると

$$\sigma_x = \sigma_0 y,\quad \sigma_y = 0,\quad \tau_{xy} = 0 \qquad (28)$$



このとき，曲げモーメント M は

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} B\sigma_{xx}\, y\, dy = \sigma_0 \int_{-h/2}^{h/2} B y^2 dy = \sigma_0 I \qquad (29)$$

$$\rightleftarrows \quad \sigma_0 = \frac{M}{I} \qquad (30)$$

$$\rightleftarrows \quad F = \frac{M}{6I} y^3 \qquad (31)$$

11.5 エアリの応力関数による変位表現（図尾 P.123）

補助関数 ϕ を導入すると，変位は次のように書ける

$$\left.\begin{aligned} 2Gu &= -\frac{\partial F}{\partial x} + (1-\nu)\frac{\partial \phi}{\partial y} \\ 2Gv &= -\frac{\partial F}{\partial y} + (1-\nu)\frac{\partial \phi}{\partial x} \end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

ただし，F と φ について次の関係を満たす必要がある

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

さて、以下ではりの純曲げについて考えよう。

$$
\left.\begin{aligned}
F(x, y) &= \frac{M}{6I} y^3 \\
\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} &= \frac{M}{I} y
\end{aligned}\right\} \qquad (34)
$$

(34-2) を積分すると

$$
\phi = \frac{M}{2I} x y^2 + F(x) + G(y) \qquad (35)
$$

ϕ は調和関数であり、(33-2) に代入すると

$$
\frac{M}{I} x + F''(x) + G''(y) = 0 \qquad (36)
$$

$$
\rightleftarrows \quad \frac{M}{I} x + F''(x) = -G''(y) = -C_1 \qquad (37)
$$

$$
\rightleftarrows \quad \left.\begin{aligned}
F(x) &= -\frac{M}{6I} x^3 - \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3 \\
G(y) &= \frac{C_1}{2} y^2 + C_4 y + C_5
\end{aligned}\right\} \qquad (38)
$$

$$
\rightleftarrows \quad \phi = \frac{M}{2I}\left(x y^2 - \frac{x^3}{3}\right) - \frac{C_1}{2}(x^2 - y^2) + C_2 x + C_4 y + C_5 \qquad (39)
$$

よって、(39) を (32) に代入する

$$
\left.\begin{aligned}
2Gu &= (1-\nu)\left(\frac{M}{I} x y + C_1 y + C_4\right) \\
2Gv &= -\frac{M}{2I} y^2 + (1-\nu)\left[\frac{M}{2I} y^2 - \frac{M}{2I} x^2 - C_1 x + C_2\right] \\
&= -(1-\nu)\left[\frac{M}{2I}\left(x^2 + \frac{\nu}{1-\nu} y^2\right) + C_1 x - C_2\right]
\end{aligned}\right\} \qquad (40)
$$

"平面ひずみから平面応力への変換"は

$$(G, \nu) \rightarrow \left(G, \frac{\nu}{1+\nu}\right)$$

であり、$E = 2G(1+\nu)$ であることより

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{E}\left(\frac{M}{I}xy + C_1 y + C_4\right) \\ v &= -\frac{1}{E}\left\{\frac{M}{2I}(x^2+\nu y^2) + C_1 x - C_2\right\} \end{aligned}\right\} \quad (41)$$

と出来る。このとき、

$$\left.\begin{aligned} &u = 0 \quad @ \quad x = 0 \\ &v = 0 \quad @ \quad x = y = 0 \\ &\nu = 0 \quad (\text{ポアソン比を無視}) \end{aligned}\right\} \quad (42)$$

とすると

$$u = \frac{M}{EI}xy, \quad \boxed{v = -\frac{Mx^2}{2EI}} \quad (43)$$

という材料力学の解が得られる。

11.6 エアリの応力関数の極座標表示

まずは二次元極座標における基礎方程式を紹介しよう

- 平衡方程式 (体積力を無視する)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \\ &\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2\frac{\tau_{r\theta}}{r} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (44)$$

・ひずみ－変位関係式　$u_r = u,\ u_\theta = v$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}\\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}\\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

・ひずみ－応力関係式

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E'}\left(\sigma_r - \nu' \sigma_\theta\right)\\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E'}\left(\sigma_\theta - \nu' \sigma_r\right)\\ \gamma_{r\theta} &= \frac{\tau_{r\theta}}{G} \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

・エアリの応力関数が満たすべき適合条件

$$\left.\begin{aligned} \Delta^2 F &= 0\\ \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

$\longrightarrow$ (47)の解：$F = \underbrace{C_0}_{\text{無くても良い}} + C_1 \ln r + C_2 r^2 + f(r)\cos 2\theta$　(48)

・エアリの応力関数による応力成分の表示（平衡方程式をみたす）

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}\\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\right) \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

軸対称 → θに依存しない

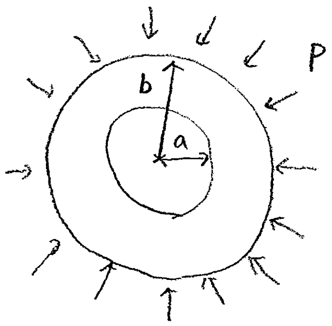
$$\therefore F = C_1 \ln r + C_2 r^2 \tag{50}$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{C_1}{r^2} + 2C_2 \\ \sigma_\theta &= -\frac{C_1}{r^2} + 2C_2 \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

- 外圧を受ける円管

境界条件

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= 0 \ @ \ r = a \\ \sigma_r &= -p \ @ \ r = b \end{aligned}\right\} \tag{52}$$



(52) を (51) に代入すると

(Memo)

$$\frac{1}{a^2} C_1 + 2C_2 = 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{b^2} C_1 + 2C_2 = -P$$

$$\frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2} C_1 = P \rightarrow C_1 = \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} P$$

$$2C_2 = -\frac{b^2}{b^2 - a^2} P$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{b^2 P}{b^2 - a^2}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \\ \sigma_\theta &= -\frac{b^2 P}{b^2 - a^2}\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

- 円柱の場合 : $a = 0$ → $\ln r$ の特異性を除くため $C_1 = 0$

$$\sigma_r = -p \ @ \ r = b \rightarrow 2C_2 = -p$$

$$\therefore \sigma_r = \sigma_\theta = -p \tag{54}$$

・応力（無限遠）

$$\sigma_x = \sigma_0 \quad , \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \tag{55}$$

・座標変換

$$\begin{pmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} \\ \tau_{r\theta} & \sigma_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_0 \cos^2\theta & -\sigma_0 \cos\theta \sin\theta \\ -\sigma_0 \cos\theta \sin\theta & \sigma_0 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

$$\rightleftarrows \quad \sigma_r = \sigma_0 \cos^2\theta , \quad \tau_{r\theta} = -\sigma_0 \cos\theta \sin\theta , \quad \sigma_\theta = \sigma_0 \sin^2\theta \quad (56$$

$$= \frac{1}{2}\sigma_0 (1+\cos 2\theta) \qquad = -\frac{1}{2}\sigma_0 \sin 2\theta \qquad = \frac{1}{2}\sigma_0 (1-\cos 2\theta$$

・円孔ふち：$\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0 \quad @ \ r = a$ (57)

・エアリの応力関数

$$F = C_1 \ln r + C_2 r^2 + f(r) \cos 2\theta \tag{58}$$

→ $f(r)\cos 2\theta$ を (47-1) に代入

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2} \right)^2 f(r) = 0 \tag{59}$$

$$\rightarrow \quad f(r) = C_3 r^2 + C_4 r^{-2} + C_5 r^5 + C_6 \tag{60}$$

$$\therefore \quad F(r) = C_1 \ln r + C_2 r^2 + (C_3 r^2 + C_4 r^{-2} + C_5 r^4 + C_6)\cos 2\theta$$

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{dF}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$$

$$= \frac{C_1}{r^2} + 2C_2 + \{2C_3 + (-2)C_4 r^{-4} + 4\cancel{C_5 r^2}\}\cos 2\theta$$

$$- 4(C_3 + C_4 r^{-4} + \cancel{C_5 r^2} + C_6 r^{-2})\cos 2\theta$$

$$= \frac{C_1}{r^2} + 2C_2 - 2(C_3 + 3C_4 r^{-4} + 2C_6 r^{-2})\cos 2\theta \qquad (61)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = -C_1 r^{-2} + 2C_2 + (2C_3 + 6C_4 r^{-4} + 12C_5 r^2)\cos 2\theta \qquad (62)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\right) = -\frac{1}{\partial r}\{(C_3 r + C_4 r^{-3} + C_5 r^3 + C_6 r^{-1})(-2\sin 2\theta)\}$$

$$= 2(C_3 - 3C_4 r^{-4} + 3C_5 r^2 - C_6 r^{-2})\sin 2\theta \qquad (63)$$

無限遠で(56)を満たすためには

$$C_2 = \frac{\sigma_0}{4}, \quad C_3 = -\frac{\sigma_0}{4}, \quad C_5 = 0 \qquad (64)$$

(57)より

$$\frac{C_1}{a^2} + 2C_2 = 0 \quad \rightleftarrows \quad C_1 = -\frac{\sigma_0 a^2}{2}$$

$$C_3 + 3C_4 a^{-4} + 2C_6 a^{-2} = 0 \quad \rightleftarrows \quad 3C_4 a^{-4} + 2C_6 a^{-2} = \frac{\sigma_0}{4}$$

$$C_3 - 3C_3 a^{-4} + \underbrace{3C_5 a^2}_{=0} - C_6 a^{-2} = 0 \quad \rightleftarrows \quad 3C_4 a^{-4} + C_6 a^{-2} = -\frac{\sigma_0}{4}$$

つまり

$$C_4 = -\frac{\sigma_0 a^4}{4}, \quad C_6 = \frac{\sigma_0 a^2}{2} \qquad (65)$$

よって

$$
\left.
\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{\sigma_0}{2}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)+\frac{\sigma_0}{2}\left(1-4\frac{a^2}{r^2}+3\frac{a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta \\
\sigma_\theta &= \frac{\sigma_0}{2}\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)-\frac{\sigma_0}{2}\left(1+3\frac{a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta \\
\tau_{r\theta} &= -\frac{\sigma_0}{2}\left(1+2\frac{a^2}{r^2}-3\frac{a^4}{r^4}\right)\sin 2\theta
\end{aligned}
\right\} \qquad (66)
$$

となる。特に $r=a$ のとき

$$
\sigma_r=\tau_{r\theta}=0, \quad \sigma_\theta=\sigma_0(1-2\cos 2\theta) \qquad (67)
$$

$\theta=\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$ で $\sigma_\theta=3\sigma_0$, $\theta=0, \pi$ で $\sigma_\theta=-\sigma_0$ となる。