4.1　等方性体と見なした際の等価剛性に関する上下界

先に与えられたエネルギー最小定理が等価剛性の導出に有用であることは言うまでもない。すべての複合材料の中に含まれる物質に一定ひずみ場，および一定応力場を与えることから始めよう。また，N 個の多様な物質を含む複合材料を均質等方性と見なしたときの性質を議論することにする。一定ひずみとポテンシャルエネルギー最小定理の考え方より

$$
\begin{aligned}
k &\leq \sum_{i=1}^{N} c_i k_i \\
\mu &\leq \sum_{i=1}^{N} c_i \mu_i
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

が上界の式として与えられる。c_i は各物質の体積含有率であり，この式を得るためには，体積膨張とせん断変形を考える必要がある。次に，一定応力とコンプリメンタリエネルギー最小定理より

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{k} &\leq \sum_{i=1}^{N} \frac{c_i}{k_i} \\
\frac{1}{\mu} &\leq \sum_{i=1}^{N} \frac{c_i}{\mu_i}
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

を得る。(1.1) と (1.2) とを組み合わせると

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sum_{i=1}^{N} c_i / k_i} &\leq k \leq \sum_{i=1}^{N} c_i k_i \\
\frac{1}{\sum_{i=1}^{N} c_i / \mu_i} &\leq \mu \leq \sum_{i=1}^{N} c_i \mu_i
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

を得る。これらの関係式は Paul[4.1] によって与えられた。このとき，下界を Reuss ~~Voigt~~ 解，上界を Voigt ~~Reuss~~ 解という。これらはそれぞれ，直列モデルあるいは並列モデルとも呼ばれている。

予想のつくことであるが，この上下界は極端すぎるため，特定の場合を除いて，それほど有用ではない。もちろん，これまでに述べてきたような介在物の形状を考慮したアプローチを適用することで，より詳細に等価剛性を求めることもできる。しかしながら，ここでの目的は，物質の形状を議論することなくより有用な上下界を得ることにある。つまり，物質の形状を議論することなくより狭い上下界を得ることができるのか？　ということになる。最初の直観的な印象は No であろう。一見，不可能にも見える。ただし，実際は Yes である。より狭く，より有用な上下界を得ることができる。これはこの分野の金字塔とも言える。この解は Hashin と Shtrikman[4.2] によって得られた。本書ではより一般的な形にて与えた Walpole[4.3] の解を紹介しよう。この導出に Hill による研究成果がふんだんに利用されている。