定義が行える。具体的には，有効剛性 C_{ijkl} は次の関係から導出される。

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = C_{ijkl} \langle \varepsilon_{ij} \rangle \quad kl \tag{1.3}$$

つまり，複合材料の等価物性を得るためには，(1.1) と (1.2) の平均化のプロセスを経て，(1.3) から C_{ijkl} を得る必要がある[†1]。一見するとこのプロセスは簡単に見えるが，実際は複雑で，丁寧に行われるべきである。この処理を，厳密に行ううえでは，複合材料内部の $\sigma_{ij}(x_i)$ と $\varepsilon_{ij}(x_i)$ を的確に把握しておく必要がある。本書の目標は，最低限の近似で，経験則に頼ることなく，この処理を行うことである。そのため，以下に示される結果は典型的な幾何形状を持つ複合材料に限定されている。注目すべきことは，ここで用いられるいくつかの介在物あるいは強化素材の幾何形状は幅広い材料タイプを網羅し，それは実在する複合材料の持つ重要な特性を十分に再現できることである。

有効なモデルを明確にするために，不均質材料のタイプを5つに分けよう[†2]。第一のタイプは通常の金属における結晶構造に代表される。各々の結晶は異方性であり，それぞれの結晶はそれぞれの結晶の面方位と軸対称性を持っている。これは1つの相からなるもので，5つあるタイプにおいて唯一，1つの相からなるものである。2つ目のタイプは，2つあるいはそれ以上のまったく異なった相が連続的に分布し，そこには，相をまたぐような界面の区別ができないケースである。こういった複合材料は傾斜材料と呼ばれる。このタイプであるかどうかの判定に関しては統計を駆使すべきだろう。

残りの3つは非常に酷似している。これら3つはマトリックスと呼ばれる均質の媒体が球状，柱状，積層状の介在物によって補強されている。これら3つの共通点は，介在物は楕円体の極端な例と見なしうるということである。もちろん，楕円体形状としては，この極端な場合になる前にいくつもの段階がある。しかしながら，この極端な場合こそが大変重要なのである。なぜならば，いくつかの相からなる材料において，形状変化が生じ，熱力学的な平衡状態に達したときには，球状，柱状，積層状のうちの1つに必ずなるからである。

本書では，5つの複合材料の基本的な形態を検討しよう。より一般的な形状については，これらの基本形のいくつかを組み合わせることで表現が可能である。さもなくば，そのような場合は個別に扱われなければならない。複合材料をさらにざっくりと分けるならば，次のように分けることが可能であろう。(1) 1つないしは2つの介在物とマトリックスからなるもの (2) それ以外。このざっくりした分類では，最初のほうに先に述べた3つの分類（球状，柱状，積層状）を含んでいる。さて，以降は，介在物を含むタイプの複合材料の等価な物性を得るための定式化について述べることにしよう。

いま，興味のある材料系は，1つはマトリックス，もう1つは介在物からなるようなものである。どちらも均質等方性としよう。これらの構成則は，介在物においては

$$\sigma_{ij} = \lambda_I \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu_I \varepsilon_{ij} \tag{1.4}$$

であり，マトリックスにおいては

---

†1　非線形材料のケースにて，体積平均について同様の定義がある。Cowin[2.1] を参照のこと。

†2　訳注：不均質材料は複合材料でもある。原著のニュアンスを残すべく，場合によって使い分けている。

$$\sigma_{ij} = \lambda_m \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu_m \varepsilon_{ij} \tag{1.5}$$

によって与えられる。ここで，λ と μ は弾性定数である。(1.1) によって平均化すると

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_{V-\sum_{n=1}^{N} V_n} \sigma_{ij} dv + \frac{1}{V} \sum_{n=1}^{N} \int_{V_n} \sigma_{ij} dv \tag{1.6}$$

となる。ここで，RVE 内に V_n の体積をもつ N 個の介在物からなり，介在物以外の体積は $V - \sum_{n=1}^{N} V_n$ によって与えられる。(1.5) から (1.6) は次のように書きかえることができる。

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_{V-\sum_{n=1}^{N} V_n} (\lambda_m \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu_m \varepsilon_{ij}) dv + \frac{1}{V} \sum_{n=1}^{N} \int_{V_n} \sigma_{ij} dv \tag{1.7}$$

(1.7) の中の最初の積分は 2 つに分解でき，

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_{V} (\lambda_m \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu_m \varepsilon_{ij}) dv - \frac{1}{V} \sum_{n=1}^{N} \int_{V_n} (\lambda_m \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu_m \varepsilon_{ij}) dv + \frac{1}{V} \sum_{n=1}^{N} \int_{V} \sigma_{ij} dv \tag{1.8}$$

V_n

となる。(1.8) の平均応力は (1.3) で書き直せて，平均ひずみより

$$C_{ijkl} \langle \varepsilon_{kl} \rangle = \lambda_m \delta_{ij} \langle \varepsilon_{kk} \rangle + 2\mu_m \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \frac{1}{V} \sum_{n=1}^{N} \int_{V_n} (\sigma_{ij} - \lambda_m \delta_{ij} \varepsilon_{kk} - 2\mu_m \varepsilon_{ij}) dv \tag{1.9}$$

と書ける。この式は大変重要な式である。等価剛性を評価するためには，(1.9) の右辺第 3 項の介在物内の応力・ひずみの評価が重要である。(1.9) の導出は Russel と Acrivos[2.2] によるものである。

希薄系複合材料

次に (1.9) に関して希薄系[†3]複合材料について考える。これは無限に大きなマトリックス内に孤立した介在物に相当する。希薄系複合材料，すなわち，無限に大きな領域に孤立する介在物の問題は，解析される対象が複合材料に比べて十分に小さくなくてはならないという条件を満たさない。しかしながら，このモデル化の物理的意味は非常に単純で，粒子が小さく互いに離れていれば，相互の干渉は無視できるということである。したがって，RVE の大きさは問題にはならない。

せん断変形を受ける希薄系複合材料に (1.9) を適用しよう。すると

$$2\mu \langle \varepsilon_{ij} \rangle = 2\mu_m \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \frac{1}{V} \int_{V_i} (\lambda_I \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu_I \varepsilon_{ij} - \lambda_m \delta_{ij} \varepsilon_{kk} - 2\mu_m \varepsilon_{ij}) dv \tag{1.10}$$

となる。ここで (1.4) が用いられ，$\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ は平均せん断ひずみである。Eshelby[2.3] は無限体に

---

†3 訳注：介在物の体積分率が極めて低いこと。本書では低体積含有率と呼ぶこともある。

られる。

等価剛性 C_{ijkl} は（1.3）および（1.17）として書けることがわかった。(1.9）と似たようなエネルギー式が介在物で強化される複合材料に適用できる。そのことを示すために，(1.9）と $\langle\varepsilon_{ij}\rangle$ とを掛け合わせると次の式を得る。

$$\langle\sigma_{ij}\rangle\langle\varepsilon_{ij}\rangle = (\lambda_m\delta_{ij}\langle\varepsilon_{kk}\rangle + 2\mu_m\langle\varepsilon_{ij}\rangle)\langle\varepsilon_{ij}\rangle + \frac{1}{V}\sum_{n=1}^{N}\int_{V_n}[\sigma_{ij}\langle\varepsilon_{ij}\rangle - (\lambda_m\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu_m\varepsilon_{ij})\langle\varepsilon_{ij}\rangle]dv \tag{1.18}$$

（1.18）において，非積分関数の最終項は次のように書ける。

被

$$C^m_{ijkl}\varepsilon_{kl}\langle\varepsilon_{ij}\rangle$$

さらに，

$$C^m_{ijkl}\langle\varepsilon_{kl}\rangle\varepsilon_{ij} = \sigma^0_{ij}\varepsilon_{ij} \tag{1.19}$$

と書け，

$$\sigma^0_{ij} = C^m_{ijkl}\langle\varepsilon_{kl}\rangle \tag{1.20}$$

である。σ^0_{ij} は複合材料すべてがマトリックス材料でできているときの介在物内の応力に対応する。(1.18）と（1.19）を使うと

$$\frac{1}{2}C_{ijkl}\langle\varepsilon_{ij}\rangle\langle\varepsilon_{kl}\rangle = \frac{U_0}{V} + \frac{1}{2V}\sum_{n=1}^{N}\int_{Vn}(\sigma_{ij}\varepsilon^0_{ij} - \sigma^0_{ij}\varepsilon_{ij})dv \tag{1.21}$$

となる。ここで $\langle\varepsilon_{ij}\rangle$ は ε^0_{ij} で置き換えられており，これはマトリックスのみからなるときのひずみである。また U_0 はその際に蓄えられるエネルギーである。(1.17）を（1.21）の左辺に置き換え，右辺にはガウスの発散定理を適用すると，Eshelby の式（1 章-4.26）を N 個の介在物に適用したものが得られる。(1.21）は等価剛性を算出するために適切な式である。(1.21）の評価には介在物内の応力とひずみ分布だけが必要である。(1.21）は Eshelby の式（1 章-4.25, 4.26）と等価ではあるが，平均化などを含まない分 Eshelby の式のほうがより普遍的である。つまり，Eshelby の式は単なる複合材料の平均化プロセスではなく，より普遍的な弾性理論なのである。

2.2　球状介在物からなる希薄系複合材料

この節では，マトリックスと異なる弾性定数を持つ球状介在物の希薄系複合材料における等価せん断弾性率を導出する。

せん断弾性率

まず，均質材料の均一せん断変形を考えよう。直交座標系では，変位は