$$U_{\mathrm{INT}} = \int_{V_{\mathrm{I}}} \sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij}' dv + \int_{V_{\mathrm{II}}} \sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij}' dv \tag{4.19}$$

(4.19) の右辺第2項は (4.14) により次のように書ける。

$$U_{\mathrm{INT}} = \int_{V_{\mathrm{I}}} \sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij}' dv + \int_{V_{\mathrm{II}}} \sigma_{ij}' \varepsilon_{ij}^0 dv \tag{4.20}$$

さらに (4.20) は発散定理により，次のように書ける。

$$U_{\mathrm{INT}} = \int_{\Sigma} \sigma_i^0 u_i' ds - \int_{\Sigma} \sigma_i' u_i^0 ds + \int_{S} \sigma_i' u_i^0 ds \tag{4.21}$$

ここでは，領域 I および II における平衡方程式をもとに，発散定理を用いた。(4.21) における負符号は Σ の法線ベクトルを外向きを正にしていることによる。

表面 S において $\sigma_i' = 0$ を考えると，(4.21) は次式となる。

$$U_{\mathrm{INT}} = \int_{\Sigma} (\sigma_i^0 u_i' - \sigma_i' u_i^0) ds \tag{4.22}$$

関係 (4.7) を用いると，(4.22) は次式となる。

$$U_{\mathrm{INT}} = \int_{\Sigma} (\sigma_i^0 \hat{u}_i - \hat{\sigma}_i u_i^0) ds \tag{4.23}$$

$\hat{u}_i$

図 1.5a において，介在物に対応する領域の外側では，先程述べたように $\hat{\sigma}_i$ と $\hat{\mu}_i$ は σ_i と u_i に一致する。したがって，(4.23) は次のようになる。

$$U_{\mathrm{INT}} = \int_{\Sigma} (\sigma_i^0 u_i - \sigma_i u_i^0) ds \tag{4.24}$$

(4.24) を (4.18) に代入すると

$$U = U_0 + \frac{1}{2} \int_{S_i} (\sigma_i^0 u_i - \sigma_i u_i^0) ds \tag{4.25}$$

になる。ここでは Σ を介在物の表面 S_i に取っている。

(4.25) は外荷重が与えられている問題にて求められた。一方で，変位境界のみの場合にも同様の導出は可能であり，次式を得る。

$$U = U_0 + \frac{1}{2} \int_{S_i} (\sigma_i u_i^0 - \sigma_i^0 u_i) ds \tag{4.26}$$

これらの結果は複数の介在物の場合にも拡張できる。

これらの式は大変シンプルである。基本的にはひずみエネルギーは複雑な2次関数の体積積分である。しかしながら Eshelby の公式は (4.25) あるいは (4.26) にあるように単純な表面積分だけでひずみエネルギーが計算できる。このことは不均質材料あるいは複合材料の変形を議論するうえで大変有用である。

参考文献

1.1　I. S. Sokolnikoff, *Mathematical Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, New York, 1956.

1.2　A. E. Green and W. Zerna, *Theoretical Elasticity*, 2nd ed., Oxford University Press, New York 1968.