$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon'_{kl}$$

を得る。

さて，以降，等方性と仮定しよう。塑性ひずみは次の関係式にて与えられる。

$$\dot{\varepsilon}''_{ij} = F_{ij}(\sigma_{kl}, \dot{\sigma}_{kl}, \varepsilon''_{kl}) \tag{3.3}$$

ここで，時間微分は塑性ひずみ増分を表している。ここで，$F_{ij}(\ )$ と $\dot{\sigma}_{ij}$ は1次の時間微分であるが，時間依存性が無いということを明らかにするためには，$d\varepsilon''_{ij}$ や $d\sigma_{kl}$ といった時間に依存しない増分型で書くと読者への誤解が少なくなるかもしれない。これで，非粘性塑性論の構成関係を説明できる準備ができた。

さて，負荷，中立負荷，弾性除荷の3つの変形状態を述べる。のちに述べる初期降伏条件を満たすまでは，弾性である。降伏後，(3.1) の式は変化をしていく。負荷の条件は

$$f = \kappa, \dot{\kappa} \neq 0, \text{と}\quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij} > 0$$

抜く

であり，$\dot{\varepsilon}''_{ij}$ は (3.3) によって与えられる。

中立負荷は

$$f = \kappa, \dot{\kappa} = 0, \text{と}\quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij} = 0$$

抜く

であり，$\dot{\varepsilon}''_{ij} = 0$ である。

最後に弾性除荷は

$$f = \kappa, \dot{\kappa} = 0, \text{と}\quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij} < 0$$

抜く

であり，当然 $\dot{\varepsilon}''_{ij} = 0$ である。

つまり，$f(\ )$ と $F_{ij}(\ )$ によって応力とひずみが算出される。よって，κ だけでなく，$f(\ )$ と $F_{ij}(\ )$ がどのようなものであるかは，解析上大変重要な問題である。

降伏関数

最初に，初期降伏関数について考えよう。一般に，Mises と Tresca によって与えられたものが大変よく用いられる。Tresca の降伏条件は

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2k \tag{3.4}$$

によって与えられる。ここで，k は純粋せん断での降伏応力である。また，

$$4J_2^3 - 27J_3^2 - 36k^2J_2^2 + 96k^4J_2 - 64k^6 = 0 \tag{3.5}$$

とも書ける。ここで，J_2 と J_3 は応力テンソルの不変量であり，

$$J_2 = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij}$$

$$J_3 = |s_{ij}|$$

によって与えられる。

Mises のものは Tresca よりさらに簡単で

$$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} = k^2 \tag{3.6}$$

によって与えられる。ここで，k は純粋せん断での降伏応力である。Mises の降伏条件はせん断変形において蓄えることのできるひずみエネルギーの極限値と考えることができる。

弾完全塑性体であれば，つまりひずみ硬化が無ければ，必要なのは降伏関数だけであり，議論は簡単である。これを Prandtl と Reuss の理論と言い，多くの本にて紹介されている [1.7]。

流れ則

ひずみ硬化する塑性体の場合

$$\dot{\varepsilon}''_{ij} = \Lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \tag{3.7}$$

$\dot{\sigma}_{kl}$

$$\Lambda = \Lambda(\sigma_{k1}, \dot{\sigma}_{k1}, \varepsilon''_{k1})$$

$) \; 1 \to l$

の形をとることが多い。Λ は $\dot{\sigma}_{k1}$ に関して1次の同次関数である。(3.7) を流れ則という。これは塑性ひずみ速度は降伏曲面の法線方向と平行であるという考え方である。これは塑性仕事は正であるべきであるという Drucker の考えとも一致する。よって，荷重関数は凸な形状が求められる。具体的な Λ について議論する前に，2つの重要な事項を紹介する。

ひずみ硬化

初期降伏後，さらなる荷重によって硬くなる。硬化現象とは，負荷によって荷重関数の曲面形状が変わっていくことによって表現されている。等方硬化というのが最も単純な硬化の形態である。この場合，(3.1) は

$$f(J_2, J_3) = \kappa \tag{3.8}$$

となり，ひずみ硬化は κ を通じて表現される。この状態では異方性は現れない。また，バウシンガー効果も表現できない。

もう1つの硬化表現を移動硬化という。この移動硬化では，(3.1) は

$$f(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) = k^2 \tag{3.9}$$

となり，k は一定値で，α_{ij} を通じて硬化が表現される。(3.9) は降伏曲面が，大きさを変えずに応力空間中を移動していることに相当する。α_{ij} の表現方法として，Prager によって与えられたものと，Zeigler によって与えられたものがある。Prager によって与えられたものは

$$\dot{\alpha}_{ij} = c\dot{\varepsilon}''_{ij} \tag{3.10}$$

であり，cは定数となる。一方，Zeiglerによって与えられたものは

$$\dot{\alpha}_{ij} = \dot{\mu}(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) \tag{3.11}$$

である。Zeiglerによって与えられたものは扱う問題の次元に無関係に扱えるという利点がある。つまり，Zeiglerによって与えられたものはいかなる次元でも利用可能であるが，Pragerによって与えられたものはそうではない。後にZeiglerによって与えられたものをもとに議論を展開する。実は，(3.11) におけるは $\dot{\mu}$

$$\dot{\mu} = \frac{(\partial f/\partial \sigma_{ij})\dot{\sigma}_{ij}}{(\partial f/\partial \sigma_{k1})(\sigma_{k1} - \alpha_{k1})} \tag{3.12}$$

$1 \to \ell$

として扱うことができる。

さて，Λ については

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon''_{ij}) = k^2 \tag{3.13}$$

とすると，(3.7) より

$$\Lambda = \frac{-(\partial f/\partial \sigma_{ij})\dot{\sigma}_{ij}}{(\partial f/\partial \sigma_{ij})\dfrac{\partial f}{\partial \varepsilon''_{ij}}} \tag{3.14}$$

として書くことができる。

以上により，非粘性塑性論の構成関係は完全に記述できる。もちろん，もっと一般的な硬化則も定義できる。非粘性塑性論は，構成関係以外の変位－ひずみ関係式，適合条件，運動方程式は弾性論と同じように扱ってよい。一般に，非粘性塑性論では構成関係は非線形であり，これにより問題が複雑となる。にもかかわらず，すでに多くの問題が解かれている。第8章では複合材料の塑性変形について紹介する。

1.4 Eshelbyの公式

均質材料あるいは複合材料において非常に有用な弾性論の公式がある。これはEshelby[1.12]により与えられたもので，複合材料のひずみエネルギー計算に関するものである。このことはあまり弾性論の教科書には載っていないので，ここで紹介しよう。

Eshelbyによるこの公式はひずみエネルギーの体積積分を面積積分に変換することによって得られる。この変換は複合材料の評価にあたって大変有用である。図**1.4***a*に示されるような，表面に荷重がかかり，内部に，介在物を含む均質な材料を考えよう。このとき，介在物からなる複合材料のひずみエネルギーは次のように与えられる。

$$U = \frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dv \tag{4.1}$$

Vは対象となる物体の体積領域を示す。次に図1.4bのようなマトリックス単体におけるひずみ