第1章 〈直交テンソル解析と固体力学の基礎〉

[1] ベクトル

1.1 内積

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3)\cdot(b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3)$$

$$= \sum_{i=1}^{3} a_i b_i \cdots\cdots (1) \qquad = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

総和　死んだ指標

同じ添字が2度現れているとき，その添字を死んだ添字と呼び，
Σ記号なしに1から3まで加えるものとする
この約束を通常"アインシュタインの総和規約"という。

$a_i b_i = a_l b_l = a_m b_m = \cdots$
添字をつけかえることができる。

1.2 外積

レビ・チビタの交代記号

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \varepsilon_{ijk}\, a_j b_k \mathbf{e}_i \cdots (2)$$

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 : & (\overset{i}{1}\,\overset{j}{2}\,\overset{k}{3})\ (3\,1\,2)\ (2\,3\,1) \\ -1 : & (\overset{i}{3}\,\overset{j}{2}\,\overset{k}{1})\ (1\,3\,2)\ (2\,1\,3) \\ 0 : & \text{それ以外} \end{cases}$$

(問1) 式(2)を示せ。

step 1 : ベクトル解析より左辺
step 2 : 総和規約を考慮して右辺
step 3 : 左辺 = 右辺

(解)

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{array}{c} \\ a_3 \\ b_3 \end{array}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_3$$

$$\varepsilon_{ijk} a_j b_k \mathbf{e}_i = a_2b_3\mathbf{e}_1 + a_1b_2\mathbf{e}_3 + a_3b_1\mathbf{e}_3 - a_2b_1\mathbf{e}_3 - a_3b_2\mathbf{e}_1 - a_1b_3\mathbf{e}_2$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_3$$

よって 左辺 = 右辺 となり $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \mathbf{e}_i$ が成り立つ//

No. 2

Date 2016. 4. 28

交代記号の公式（青本 P.29）

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \qquad (5)$$

青 P.29

メモ 式(2.68)

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ljk} = \delta_{il}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{jl}$$
$$= 3\delta_{il} - \delta_{il}$$
$$= 2\delta_{il}$$

$\delta_{jj} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$

$\delta_{jl} = 1 \ (j = l)$
$\quad = 0 \ (j \neq l)$

クロネッカーのデルタ（緑 P.29）式(6.3)−(6.5)

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

添字のとりかえ 式(6.6)

式(2.69)　　青 P.29

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = \delta_{ii}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{ji}$$
$$= 9 - \delta_{ii}$$
$$= 9 - 3$$
$$= 6$$

（問2）次の式を示せ（緑 P.30）

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{a}$$

（解）$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{a}$

$\mathbf{d} = \mathbf{a}\times\mathbf{b} = \boxed{\varepsilon_{ijk} a_j b_k \mathbf{e}_i}$　d_i

$$(a_i\mathbf{e}_i \times b_j\mathbf{e}_j)\times c_l\mathbf{e}_l = \varepsilon_{kij} a_i b_j \boxed{\mathbf{e}_k \times c_l \mathbf{e}_l}$$

$\varepsilon_{mkl}\mathbf{e}_m$　$\Rightarrow a_j = 1,\ b_k = 1$

$$= \varepsilon_{kij}\varepsilon_{mkl} a_i b_j c_l \mathbf{e}_m$$
$$= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) a_i b_j c_l \mathbf{e}_m$$

ダミー

$\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k = \delta_{ijk}\mathbf{e}_i$

-1　　1

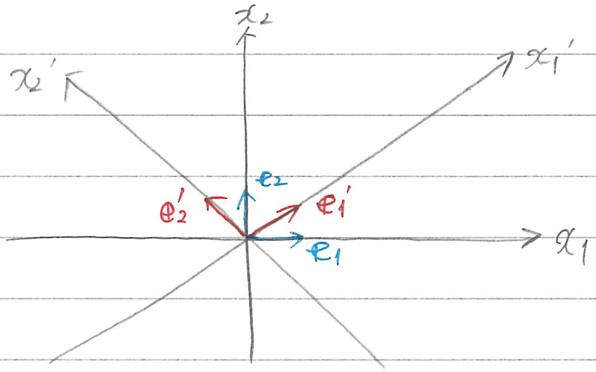
ε_{213} 反時計　ε_{312} 時計

奇　偶

$$= \overbrace{a_i b_j c_i}^{a\cdot c} e_j - a_i \overbrace{b_j c_j}^{b\cdot c} e_i$$

$$= (a\cdot c)\,b - (b\cdot c)\,a$$

1.3 座標変換



ベクトルを次のように異なる座標系にて表す。

$$b_i e_i = b_j' e_j' \qquad (8)$$

式(8)において、両辺にてe_k'との内積をとり、

$\beta_{ki} = e_k' \cdot e_i$ とすると

$$b_k' = \beta_{ki} b_i \qquad (9)$$

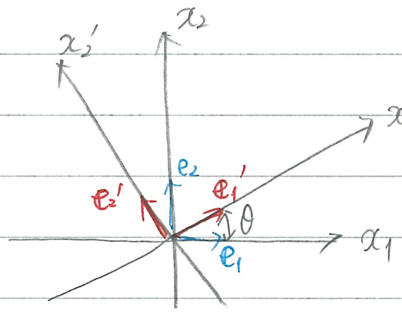
となる。式(9)をベクトル成分の変換則という。

(問3) x_1-x_2座標系で

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2$$

と表されているベクトルaの成分はθ回転した座標系ではどのようにして表されるか示せ。

(解)



$$e_1' = \cos\theta\, e_1 + \sin\theta \cdot e_2$$

$$e_2' = \sin\theta \cdot e_1 + \cos\theta \cdot e_2$$

$$\to [\beta_{ij}] = \begin{pmatrix} e_1'\cdot e_1 & e_1'\cdot e_2 \\ e_2'\cdot e_1 & e_2'\cdot e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$a = \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

[2] テンソル

2.1 2階のテンソル

$$\mathbb{A} = \mathbb{a} \otimes \mathbb{b} = a_i b_j \mathbb{e}_i \otimes \mathbb{e}_j = A_{ij} \mathbb{e}_i \otimes \mathbb{e}_j \quad (16)$$

2階のテンソルはベクトルをベクトルに写像する関数として定義できる.

$$(\mathbb{a} \otimes \mathbb{b}) \cdot \mathbb{c} = (\mathbb{b} \cdot \mathbb{c})\mathbb{a} \quad (17)$$

これを添字で書くと.

$$(a_i b_j \mathbb{e}_i \otimes \underbrace{\boxed{\mathbb{e}_j}) \cdot c_k \boxed{\mathbb{e}_k}}_{\delta_{jk}}$$

$$= a_i b_j c_k \delta_{jk} \mathbb{e}_i$$

$$= \underbrace{a_i \underbrace{b_j c_j}_{\mathbb{b} \cdot \mathbb{c}} \mathbb{e}_i}_{\mathbb{a}}$$

$$= (\mathbb{b} \cdot \mathbb{c})\mathbb{a} \quad (18)$$

$$\mathbb{c}\,(\mathbb{a} \otimes \mathbb{b}) = (\mathbb{c} \cdot \mathbb{a})\mathbb{b} \quad (19)$$

これを添字で書くと,

$$c_l \mathbb{e}_l (a_i \mathbb{e}_i \otimes b_j \mathbb{e}_j)$$

$$= c_l a_i b_j \delta_{li} \mathbb{e}_j$$

$$= c_i a_i b_j \mathbb{e}_j$$

$$= (\mathbb{c} \cdot \mathbb{a})\mathbb{b} \quad (20)$$

転置

2階テンソル $\mathbb{X} = X_{ij}\, e_i \otimes e_j$ の転置 $\mathbb{X}^T$ は次のように与えられる.

$$\mathbb{X}^T = X_{ij}\, e_j \otimes e_i = X_{ji}\, e_i \otimes e_j$$

Memo

$$\mathbb{X} \Rightarrow X_{ij} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{bmatrix}$$

$e_1 \otimes e_1$ ← 基底

$e_2 \otimes e_3$

$$a \Rightarrow a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \\ \leftarrow e_3 \end{matrix}$$

← 基底

テンソルの成分はスカラー

(問5) 次の式を示せ (青本P.34)

$$\mathbb{X}^T \cdot b = b \cdot \mathbb{X}$$

(解) $\mathbb{X}^T \cdot b = (X_{ji}\, e_i \otimes \underbrace{\boxed{e_j})\, b_k \boxed{e_k}}_{\delta_{jk}}$

$$= X_{ji}\, b_j\, e_i$$
$$= b_j \delta_{jl} X_{li}\, e_i$$
$$= \underbrace{b_j \boxed{e_j}}_{b} \cdot \underbrace{(X_{li} \boxed{e_l}}_{\delta_{jl}} \otimes e_i) = b \cdot \mathbb{X}$$

$\mathbb{X}$

Memo

$$\mathbb{X}^T = [X_{ij}]^T = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{21} & X_{31} \\ X_{12} & X_{22} & X_{32} \\ X_{13} & X_{23} & X_{33} \end{bmatrix}$$

2階テンソル同士の内積

$$\mathbb{Y}\mathbb{X} = (Y_{ij}\, e_i \otimes e_j)(X_{kl}\, e_k \otimes e_l)$$

Memo

$$\Leftrightarrow (a \otimes b) \cdot (c \otimes d) = (b \cdot c)(a \otimes d) \quad \text{(青本P34 式2.100)}$$

$$= Y_{ij} X_{kl}\, \delta_{jk}\, e_i \otimes e_l$$

$$= Y_{ij} X_{jl}\, e_i \otimes e_l \Leftrightarrow \mathbb{Z} = \mathbb{Y} \cdot \mathbb{X} \Rightarrow Z_{ij} = \sum_{j=1}^{3} Y_{ij} X_{jl}$$

取り除いてよい

(問6) 次の式を示せ. (青本P.35)

$$(\mathbb{Y}\cdot\mathbb{X})^T = \mathbb{X}^T\cdot\mathbb{Y}^T \Leftrightarrow$$ 線形代数

Memo

$\mathbb{Z} = \mathbb{Y}\cdot\mathbb{X}$

$\underbrace{[Z_{il}] = [Y_{ij}][X_{jl}]}_{\text{行列の積}}$

(解) $\mathbb{Y}\cdot\mathbb{X} = Y_{ij}X_{jl}\,\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_l$

$(\mathbb{Y}\cdot\mathbb{X})^T = Y_{lj}X_{ji}\,\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_l$

$\mathbb{X}^T\cdot\mathbb{Y}^T = (X_{ji}\,\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j)\cdot(Y_{lk}\,\mathbf{e}_k\otimes\mathbf{e}_l) = \overbrace{X_{ji}Y_{lj}}^{\text{スカラー}}\,\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_l$

δ_{kj}

2.2 2階テンソルの座標変換 (緑本P.37, 青本P.21)

$$A = A_{ij}\,\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j = \bar{A}_{pq}\,\bar{\mathbf{e}}_p\otimes\bar{\mathbf{e}}_q \quad (28)$$

Memo

$\beta_{pk} = \bar{\mathbf{e}}_p\cdot\mathbf{e}_k = \mathbf{e}_k\cdot\bar{\mathbf{e}}_p$

両辺にまず $\bar{\mathbf{e}}_k$ を左からかける
内積

$$A_{ij}\,\underbrace{\bar{\mathbf{e}}_k\cdot(\mathbf{e}_i}_{\beta_{ki}}\otimes\mathbf{e}_j) = \bar{A}_{pq}\,\underbrace{\bar{\mathbf{e}}_k\cdot(\bar{\mathbf{e}}_p}_{\bar{\delta}_{kp}}\otimes\bar{\mathbf{e}}_q) \quad (29)$$

さらに $\bar{\mathbf{e}}_l$ をかける

$$A_{ij}\beta_{ki}\,\underbrace{\bar{\mathbf{e}}_l\,\mathbf{e}_j}_{\beta_{lj}} = \bar{A}_{pq}\bar{\delta}_{kp}\,\underbrace{\bar{\mathbf{e}}_l\,\bar{\mathbf{e}}_q}_{\bar{\delta}_{lq}} \quad (30)$$

$$\beta_{ki}\beta_{lj}A_{ij} = \bar{\delta}_{kp}\bar{\delta}_{lq}\bar{A}_{pq} \quad (31)$$

$$\bar{A}_{kl} = \beta_{ki}\beta_{lj}A_{ij} \quad (32)$$

※ 青本では β_{ij} ではなくて a_{ij} を座標変換行列として用いている. (青本P.7)

[3] 場の微分・積分

3.1 微分

φ をスカラー値関数，a をベクトル値関数，$\mathbb{T}$ をテンソル値関数とする．

このとき，次の演算子を定義する

$$\underbrace{\nabla}_{\text{ナブラ演算子}} = \frac{\partial}{\partial x_i} e_i = e_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Rightarrow \nabla = \underbrace{\nabla_i}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} e_i \qquad (34)$$

勾配

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} e_i \qquad (35)$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{\nabla} \otimes a &= \frac{\partial a_j}{\partial x_i} e_i \otimes e_j \quad (\text{前形}) \quad (36) \\ a \otimes \overleftarrow{\nabla} &= \frac{\partial a_i}{\partial x_j} e_i \otimes e_j \quad (\text{後形}) \quad (37) \end{aligned}\right\} \text{ひずみ，速度勾配，うず}$$

$$\vec{\nabla} \otimes \mathbb{T} = \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_i} e_i \otimes e_j \otimes e_k \quad (\text{前形}) \quad (38)$$

$$\mathbb{T} \otimes \overleftarrow{\nabla} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k} e_i \otimes e_j \otimes e_k \quad (\text{後形}) \quad (39)$$

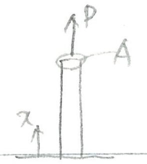
内積

$$\nabla \cdot a = \frac{\partial a_i}{\partial x_i} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \qquad (38) \Big\} \text{ 連続の式}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \mathbb{T} &= \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} e_j \qquad (39) \\ \mathbb{T} \cdot \overleftarrow{\nabla} &= \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} e_i \qquad (40) \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \text{運動方程式} \\ \text{つり合いの式} \end{array}$$

No. 8

Date 2016 . 5 . 19



$\sigma = \frac{P}{A}$
$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$
$u = \frac{P}{AE}x \rightarrow \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$

3.2 発散定理

$$\int_V \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dV = \int_S n_i a_i dS \qquad (41)$$

n_i

$$\int_V \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} e_j dV = \int_S n_i T_{ij} e_j dS \qquad (42)$$

基底をかかないことも多い．

(緑) P.53

Memo

$\boxed{\frac{D}{Dt}} = \boxed{\frac{\partial}{\partial t} + \boxed{v_i \frac{\partial}{\partial x_i}}}$

非線(固体) 移流項

測度

(ム)流体

- 連続の式
- $\boxed{\text{運動方程式}}$ ← 加速度＝f 応力の不釣り合い 偏微分方程式
- エネルギー保存の式

PDF(109)

[4] 変形とひずみ

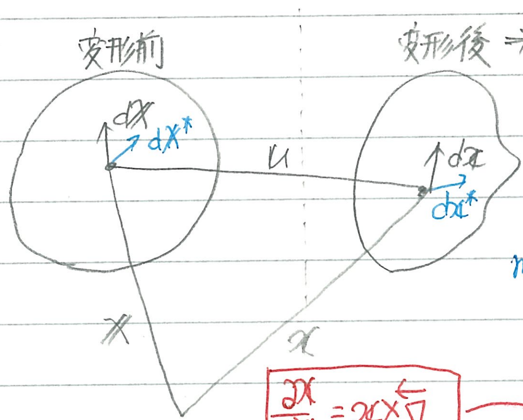
次式が成り立つとする．

(質点の移動) $x = X + u \qquad (54)$

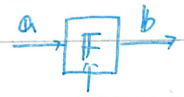
(54)の X に関する全微分は

次式で与えられる．

(線素の変化) $dx = \boxed{\frac{\partial x}{\partial X}} dX \qquad (55)$



memo



2階テンソル $\left(\frac{\partial x}{\partial X}\right)$

$\frac{\partial x}{\partial X}$ は 2階テンソルであり，次のように

定義する．

$$\mathbb{F} = \frac{\partial x}{\partial X} = x \otimes \overleftarrow{\nabla} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} e_i \otimes e_j \qquad (56)$$

↑ この $\mathbb{F}$ を変形勾配テンソルという．

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial X} &= x \times \overleftarrow{\nabla} \\ &= \frac{\partial x_i}{\partial X_j} e_i \otimes e_j\end{aligned}}$$

$$\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ dX_3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} dx_1 &= \frac{\partial x_1}{\partial X_1} dX_1 + \cdots \\ &= \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j \end{aligned}}$$

(問9) $\mathbb{F}$ は次式にて表わされることを示せ　(青 P.50)

$$\mathbb{F} = \mathbb{I} + \frac{\partial u}{\partial X} = \mathbb{I} + u \otimes \overleftarrow{\nabla}$$
$$= \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j}\right) e_i \otimes e_j \qquad (57)$$

(解答)

$$\mathbb{F} = \frac{\partial x}{\partial X} = x \otimes \overleftarrow{\nabla} = (X + u) \otimes \overleftarrow{\nabla}$$

$\boxed{\overleftarrow{\nabla} = \frac{\partial}{\partial X_i} e_i}$

$$= X \otimes \overleftarrow{\nabla} + u \otimes \overleftarrow{\nabla}$$

$$= \underbrace{\frac{\partial X_i}{\partial X_j}}_{\delta_{ij}} (e_i \otimes e_j) + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} (e_i \otimes e_j) = \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j}\right) e_i \otimes e_j$$

Date

4.2 Green ひずみテンソル

変形前と変形後の線素についての内積の変化は次のように表される。

$$d\boldsymbol{x}\cdot d\boldsymbol{x}^* - d\boldsymbol{X}\cdot d\boldsymbol{X}^* = (\mathbb{F}\cdot d\boldsymbol{X})\cdot(\mathbb{F}\cdot d\boldsymbol{X}^*) - d\boldsymbol{X}\cdot d\boldsymbol{X}^*$$
$$= (d\boldsymbol{X}\cdot\mathbb{F}^T)\cdot(\mathbb{F}\cdot d\boldsymbol{X}^*) - d\boldsymbol{X}\cdot\boxed{\mathbb{I}}\cdot d\boldsymbol{X}^*$$
$$= d\boldsymbol{X}\cdot(\mathbb{F}^T\cdot\mathbb{F} - \underset{\delta_{ij}}{\mathbb{I}})\cdot d\boldsymbol{X}^* \quad (59)$$

(15) (25)

Memo
$\mathbb{I} = \delta_{ij}\, e_i \otimes e_j$
$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

連続体力学

応力 = f(ひずみ) ⇒ 固体

= f(速度勾配) ⇒ 流体

現時刻

そこで、

$$\boxed{\mathbb{E} = \frac{1}{2}(\mathbb{F}^T\cdot\mathbb{F} - \mathbb{I})} \quad (60)$$

とする。この $\mathbb{E}$ を Green ひずみテンソルという。

(問10) $\mathbb{E}$ は　　(青 P.51)

$$\mathbb{E} = E_{ij}\, e_i \otimes e_j$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_j}\right) \quad (61)$$

と書けることを示せ。

(解答)

$$\mathbb{F}^T\cdot\mathbb{F} = \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j}\right) e_j \otimes e_i \cdot \left(\delta_{kl} + \frac{\partial u_k}{\partial X_l}\right) e_k \otimes e_l$$
$$= \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j}\right)\delta_{ik}\left(\delta_{kl} + \frac{\partial u_k}{\partial X_l}\right) e_j \otimes e_l$$
$$= \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j}\right)\left(\delta_{il} + \frac{\partial u_i}{\partial X_l}\right) e_j \otimes e_l$$
$$= \left(\delta_{ij}\delta_{il} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j}\delta_{il} + \frac{\partial u_i}{\partial X_l}\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j}\frac{\partial u_i}{\partial X_l}\right) e_j \otimes e_l$$
$$= \left(\delta_{jl} + \frac{\partial u_l}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_l} + \frac{\partial u_i}{\partial X_l} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j}\frac{\partial u_i}{\partial X_l}\right) e_j \otimes e_l$$

$j \to i$, $l \to j$

$i \to k$

$$= \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\frac{\partial u_k}{\partial X_j}\right) e_i \otimes e_j$$

調べる

弾性学

6つ　6つ

① 応力ーひずみ関係

② 変位ーひずみ関係

③ 適合条件

④ つり合いの式

3つ

独立 15コ

緑 P64〜82

(問11) (61)の各ひずみ成分を工学ひずみにて書き下せ。

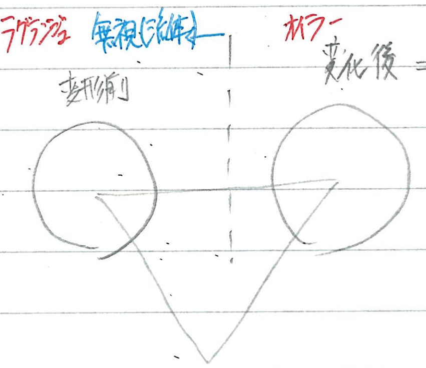
ただし、$u_1 \to u$, $u_2 \to v$, $u_3 \to w$

$X_1 \to X$, $X_2 \to Y$, $X_3 \to Z$

$2E_{12} \to \gamma_{XY}$, $2E_{23} \to \gamma_{YZ}$, $2E_{31} \to \gamma_{ZX}$ とする。

$E_{12}+E_{21}$

(解答)



⇒ 連続の式
① $\boxed{\text{運動方程式}}$ ← 加速度 = f(応力のつり合い) ← 応力 = f(ひずみ) :固体
偏微分方程式
= f(速度の勾配) :流体
現時刻
② エネルギー保存の方程式 → 熱伝導方程式 (粘性, 塑性) → 第1項が発熱項

Memo 緑本 p.53

無視 (固体)

$$\frac{DA}{Dt} = \boxed{\frac{\partial}{\partial t} + \boxed{v_1 \frac{\partial}{\partial x_1}}}$$

P.62も確認

$\boxed{\text{連続体力学}}$

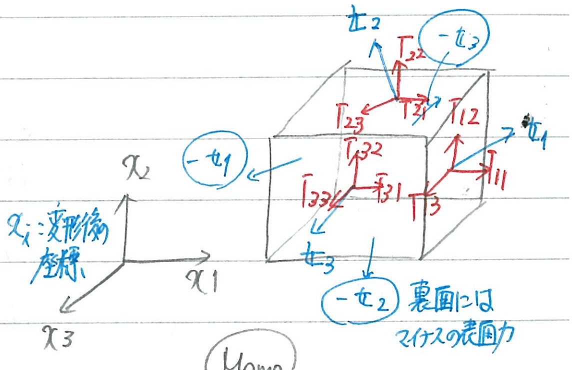
[5] コーシーの応力テンソルと平衡条件 (変形後)

図より応力ベクトル $\mathbb{t}$ は次の様に書ける

$$\begin{cases} \mathbb{t}_1 = T_{11}\,\mathbb{e}_1 + T_{12}\,\mathbb{e}_2 + T_{13}\,\mathbb{e}_3 \\ \mathbb{t}_2 = T_{21}\,\mathbb{e}_1 + T_{22}\,\mathbb{e}_2 + T_{23}\,\mathbb{e}_3 \\ \mathbb{t}_3 = T_{31}\,\mathbb{e}_1 + T_{32}\,\mathbb{e}_2 + T_{33}\,\mathbb{e}_3 \end{cases} \quad (69)$$

Memo

この $\mathbb{T}$ をコーシーの応力テンソルという.



Memo

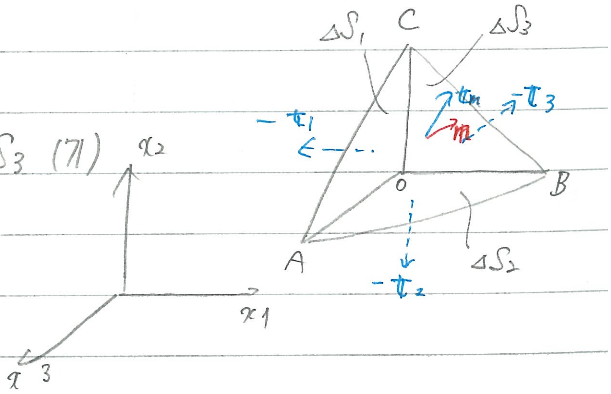
$\mathbb{t}_1 = T_{11}\,\mathbb{e}_1 + T_{12}\,\mathbb{e}_2 + T_{13}\,\mathbb{e}$

次の運動法則を考える

$$\int_v \rho a\, dv = \int_v \rho g\, dv + \int_s \mathbb{t}\, ds \quad (70)$$

ρa ← 加速度　　ρg ← 体積力 (例:重力)　　(密度)　　$\mathbb{t}$ ← 対象となる物質の表面にかかる力

(70)は図のような四面体にも利用できる



$$\rho(a - g)\Delta v = \mathbb{t}_n \Delta S - \mathbb{t}_1 \Delta S_1 - \mathbb{t}_2 \Delta S_2 - \mathbb{t}_3 \Delta S_3 \quad (71)$$

ここで $\underset{3次}{\Delta v} / \underset{2次}{\Delta S} \to 0$, $\boxed{\Delta S_i / \Delta S \to n_i}$ なので

$$\begin{aligned} \mathbb{t}_n &= \mathbb{t}_i n_i \\ &= T_{ij}\, e_j\, n_i \\ &= T_{ij}\, n_i\, \mathbb{e}_j \\ &= \mathbb{T}^T n \quad (72) \end{aligned}$$

(72)をコーシーの応力公式という.

(問12) $\Delta S_i/\Delta S \to n_i$ を示せ

［解］

$$(dS =)\, n\Delta S = \frac{1}{2}(\vec{AB}\times\vec{AC})$$

$$= \frac{1}{2}\{(\vec{OB}-\vec{OA})\times(\vec{OC}-\vec{OA})\}$$

$$= \frac{1}{2}\vec{OB}\times\vec{OC} + \frac{1}{2}\vec{OA}\times\vec{OB} + \frac{1}{2}\vec{OC}\times\vec{OA}$$

$$= \Delta S_3 \underbrace{e_3}_{\text{法線ベクトル}} + \Delta S_2 e_2 + \Delta S_1 e_1$$

$$\Rightarrow n = \underbrace{\frac{\Delta S_i}{\Delta S}}_{n_i} e_i$$

(72)を(70)に代入

$$\int_v \rho a\, dv = \int_v \rho g\, dv + \int_S T^{T} n\, dS$$

$$= \int_v \rho g\, dv + \int_v \vec{\nabla} T\, dv$$

任意の体積で成立するためには

$$\rho a = \vec{\nabla}\cdot T + \rho g \quad (73)$$

$$\rho a_j e_j = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} e_j + \rho g_j e_j \quad (74)$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \dfrac{Dv_i}{Dt} & (\text{流体}) \\ \dfrac{\partial v_i}{\partial t} & (\text{固体}) \end{array}}$$

(問13) (74)を書き下せ

(ただし、$1 \to x$, $2 \to y$, $3 \to z$)

[解]

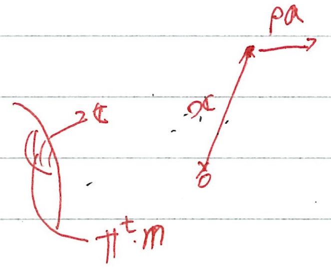
$$(j=1)\quad \rho a_x = \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zx}}{\partial z} + \rho g_x \qquad (75)$$

$$(j=2)\quad \rho a_y = \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial z} + \rho g_y \qquad (76)$$

$$(j=3)\quad \rho a_z = \frac{\partial T_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \rho g_z \qquad (77)$$

$$\left.\begin{array}{l} a_x = \dfrac{Dv_x}{Dt} \ (\text{液体}) \\ \quad\ \ \dfrac{\partial v_x}{\partial t} \ (\text{固体}) \end{array}\right\} (78)$$

次に、Eulerの第2運動法則を考える。(青本 P.55)

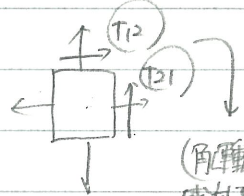


$$\int_v x\times\rho a\,dv=\int_v x\times\rho g\,dv+\boxed{\int_s x\times t\,ds}\qquad(79)$$

ここで、(79)の第3項の変形を考える。

$$x\times t=x\times(T^t\cdot n)\qquad(\because コーシーの応力公式)$$
$$=x_i e_i\times T_{\ell j}n_\ell e_j$$
$$=\varepsilon_{kij}x_i T_{\ell j}n_\ell e_k\qquad(\because e_i\times e_j=\varepsilon_{kij}e_k)\qquad(80)$$

$$\int_s x\times t\,ds=\int_s\varepsilon_{kij}x_i T_{\ell j}\overset{\frac{\partial}{\partial x_\ell}}{n_\ell}e_k\,ds\qquad(\because 発散定理)$$
$$=\int_v\varepsilon_{kij}\left(\overset{\delta_{i\ell}}{\frac{\partial x_i}{\partial x_\ell}}T_{\ell j}+x_i\frac{\partial T_{\ell j}}{\partial x_\ell}\right)e_k\,dv$$
$$=\int_v\varepsilon_{kij}\left(T_{ij}+x_i\frac{\partial T_{\ell j}}{\partial x_\ell}\right)e_k\,dv$$
$$=\int_v\left(\varepsilon_{kij}T_{ij}e_k+x\times\vec{\nabla}\cdot T\right)dv\qquad(81)$$



(角運動量が保存しないこともある→ジャイロ!)
角運動量とは?

(81)を(79)に代入して整理すると

$$\int_v x\times(\underbrace{\rho a-\rho g-\vec{\nabla}\cdot T}_{=0\ (\because 運動方程式)})\,dv=\int_v\varepsilon_{kij}T_{ij}e_k\,dv\qquad(82)$$

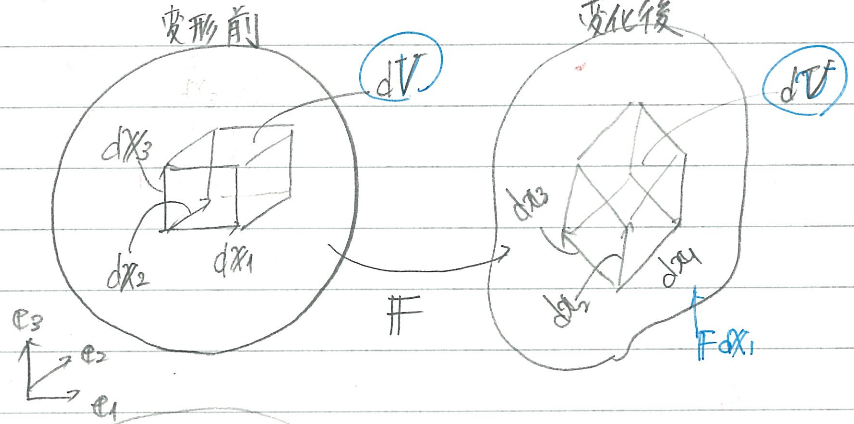
$$\rightarrow\int_v\underbrace{\varepsilon_{kij}T_{ij}}_{①}e_k\,dv=0\qquad(83)$$

(83)被積分項とe_mの外積をとると

$$e_m\times\varepsilon_{kij}T_{ij}e_k=\varepsilon_{nmk}\varepsilon_{kij}T_{ij}e_n$$
$$=(\delta_{ni}\delta_{mj}-\delta_{nj}\delta_{mi})T_{ij}e_n$$
$$=(T_{nm}-T_{mn})e_m=0$$

$$\therefore T_{ij}=T_{ji}\qquad(対称テンソル)\qquad(84)$$

[6] 変形前後の変化と各種応力テンソル



体積の変化

$$dv = (dx_1 \times dx_2)\cdot dx_3$$ (∵スカラー3重積)

$$= |dx_1 \quad dx_2 \quad dx_3|$$ (∵緑本 P.6)

$$= |\mathbb{F}\cdot dX_1 \quad \mathbb{F}\cdot dX_2 \quad \mathbb{F}\cdot dX_3|$$

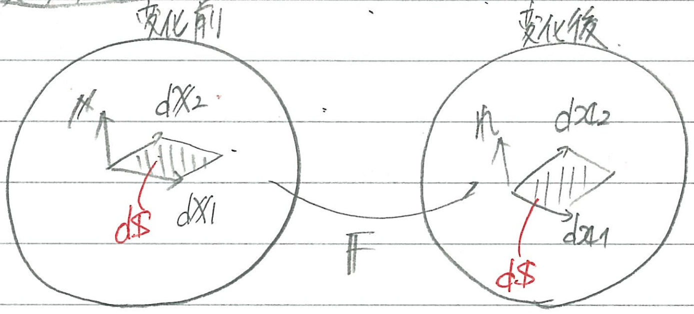
$$= |\mathbb{F}|\,|dX_1 \quad dX_2 \quad dX_3|$$ (∵青本 P.43)

$$= (\det \mathbb{F})\, dV$$

$$= J\, dV$$

ヤコビアン

面積の変化



$$\underbrace{d\mathbf{X}_3 \cdot \overset{d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2}{d\mathbf{S}}}_{dV} = \frac{1}{J} \underbrace{d\mathbf{x}_3 \cdot \overset{d\mathbf{x}_1 \times d\mathbf{x}_2}{d\mathbf{s}}}_{dv} \qquad (86)$$

$$\rightleftarrows \; d\mathbf{X}_3 \, \mathbf{N} dS = \frac{1}{J} \underbrace{d\mathbf{x}_3}_{} \, \mathbf{n} ds \qquad (87)$$

(緑本 p.21)

(青本 p.34)

$$\rightleftarrows \; d\mathbf{X}_3 \boxed{\mathbf{N} dS} = \boxed{\frac{1}{J} \overset{d\mathbf{X}_3 \cdot \mathbf{F}^T}{\boxed{d\mathbf{X}_3} \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{n} ds}} \qquad (88)$$

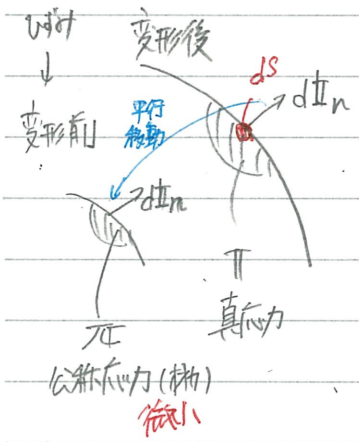
$$\rightleftarrows \; \mathbf{N} dS = \frac{1}{J} \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{n} ds \qquad (89)$$

(89)をナンソンの公式という.

No. 16

Date 2016.6.2

第1ピオラ・キルヒホッフ応力



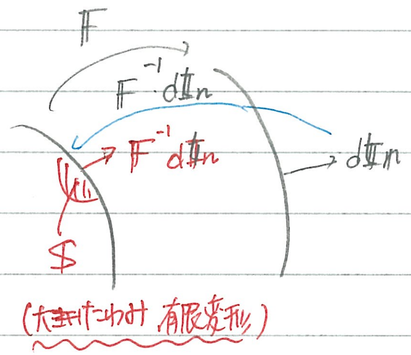
$$d\mathbb{T}_n = \boxed{\Pi^T}\cdot \underbrace{\mathbf{n}\,ds}_{d\mathbf{s}} = \Pi^T\cdot \underbrace{\mathbf{N}\,dS}_{d\mathbf{S}} \quad (90) \quad \boxed{\frac{1}{J}\Pi^T F}^T \mathbf{n}\,ds$$

ここでナンソンの公式を使う

$$\mathbb{T}^T = \frac{1}{J}\Pi^T\cdot F^T \rightleftarrows \mathbb{T} = \frac{1}{J}F\cdot\Pi \quad \text{(青本P35)} \quad (91)$$

＊ $\mathbb{T}$ と Π はほとんど同じと考えられる.

第2ピオラ・キルヒホッフ応力 : $\mathbb{S}$



$$F^{-1}\cdot d\mathbb{T}_n = \mathbb{S}\cdot\mathbf{N}\,dS \quad (92)$$

(問14) 各種応力間の関係を示せ.

[解]

$$d\mathbb{T}_n = F\cdot\mathbb{S}\cdot\mathbf{N}\,dS \quad (93)$$

(90)と(93)より

$$\Pi^T = F\cdot\mathbb{S} \quad (94)$$

$$\rightleftarrows \Pi = \mathbb{S}^T\cdot F^T = \mathbb{S}\cdot F^T \quad (95)$$

$\mathbb{S}$:対称性より

(91)と(95)より

$$\rightleftarrows \mathbb{T} = \frac{1}{J}\cdot F\cdot\mathbb{S}\cdot F^T \quad (96)$$

Memo

$$\mathbb{T}^T = \frac{1}{J}(F^T)^T\mathbb{S}^T F^T = \frac{1}{J}F\,\mathbb{S}^T F^T = \mathbb{T} \Rightarrow \mathbb{S} = \mathbb{S}^T$$

$F \doteqdot \mathbb{I}$, $J \doteqdot 1$

$F \doteqdot \mathbb{S} \Rightarrow \Pi$

[7] (幾何学的非線形を考慮した)仮想仕事の原理 V W

変形前において $\mathbb{F}=\mathbb{I}$ であるため、$\mathbb{T}=\pi$ である　Cauchy stress

そこで、変形前を基準としたつり合いを考える

第1P-K

$$\vec{\nabla}\cdot\pi + \rho_0 g = 0 \qquad (97)$$

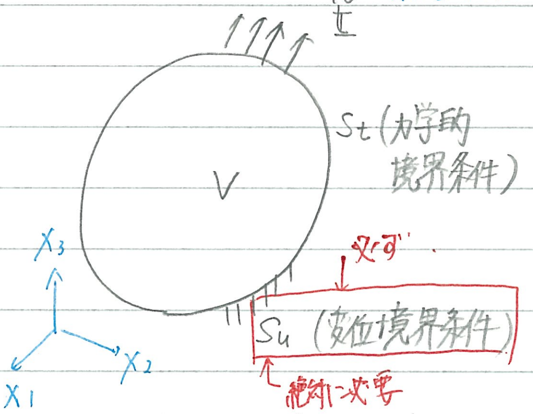
ここで、次のように境界条件をおく。

$$\pi^T N = \underset{\sim}{t} \quad \text{on } S_t \qquad (98)$$

$$u = \underset{\sim}{u} \quad \text{on } S_u \qquad (99)$$

アンダーバー
外から与えられている

境界値問題を



*これをつけないと、ずっと変位してしまう。

(97)と u の内積をとり、領域 V において体積積分する。

(弱形式)

$$\int_V (\vec{\nabla}\pi + \rho_0 g)\cdot u\, dV = 0 \qquad (100)$$

$$\rightleftarrows \int_V \{(\vec{\nabla}\cdot\pi)u + \rho_0 g u\}\, dV = 0 \qquad (101)$$

$$\rightleftarrows \int_V \pi^T (u\otimes\overleftarrow{\nabla})\, dV = \int_{S_t} \underset{\sim}{t}\cdot u\, dS + \int_{S_u} N\cdot(\pi\cdot u)\, dS + \int_V \rho_0 g\cdot u\, dV \qquad (102)$$

(V.W.の一歩手前)

ここで、(101)から(102)の導出をする

まず発散定理より次の関係が与えられる

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot(\pi\cdot u)\, dV = \int_S N\cdot(\pi\cdot u)\, dS \qquad (103)$$

このとき、

$$\vec{\nabla}\cdot(\pi\cdot u) = \boxed{\frac{\partial}{\partial x_i} e_i}\left(\pi_{jk} u_k e_j\right) \quad \delta_{ij}$$

$$= \frac{\partial \pi_{ik}}{\partial x_i} u_k + \pi_{ik}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}$$

$$= (\vec{\nabla}\cdot\pi)\cdot u + \pi^T : (u\otimes\overleftarrow{\nabla}) \qquad (104)$$

但し、青本P.34より $\boxed{A:B = A_{ij}B_{ij}}$

つまり (103)と(104)より

$$\int_V \{(\vec{\nabla}\cdot\pi)\cdot u + \pi^T : (u\otimes\overleftarrow{\nabla})\}\, dV = \int_S N\cdot(\pi\cdot u)\, dS \qquad (105)$$

No. 18
Date 2016. 6. 9

テスト (109)式 導出す

(101)と(105)より.

$$\int_S \mathbb{N}\cdot(\Pi\cdot u)\,dS \underbrace{\boxed{-\int_V \Pi^T:(u\otimes\overleftarrow{\nabla})\,dV}}_{(105)より} \underbrace{\boxed{+\int_V (\rho_0 g\cdot u)\,dV}}_{(101)より} = 0 \quad (106)$$

つまり，(102)を得る.

Memo
$$\int_S \mathbb{N}\cdot(\Pi\cdot u)\,dS = \int_{St} (\mathbb{N}\cdot\Pi)\,u\,dS + \int_{St} \mathbb{N}\,\Pi\,u\,dS$$
$$= \int_{St} \tilde{\underline{t}}\,u\,dS + \int_{St} \mathbb{N}\,\Pi\,u\,dS$$

$\mathbb{N}\cdot\Pi = \tilde{\underline{t}}$

次に(102)において，S_uで$\delta u=0$として，変位にδuを加え，
元の式から引くと次式を得る.

$$\int_V \Pi^T:(\delta u\otimes\overleftarrow{\nabla})\,dV = \int_{St} \tilde{\underline{t}}\,\delta u\,dS + \int_V \rho_0 g\,\delta u\,dV \quad (107)$$

$\Pi = S\,F^T$

式(94)より.

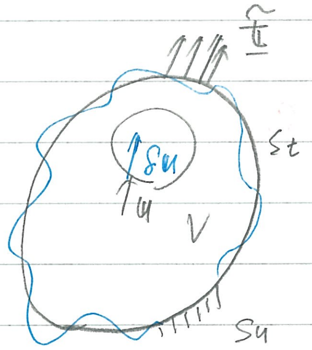
$$\int_V (S\cdot F^T)^T:(\delta u\otimes\overleftarrow{\nabla})\,dV = \int_{St} \tilde{\underline{t}}\cdot\delta u\,dS + \int_V \rho_0 g\cdot\delta u\,dV \quad (108)$$

(P.60清本例題5.7)

となり，さらに変形を施すと，

$$\int_V S:\delta E\,dV = \int_{St} \tilde{\underline{t}}\cdot\delta u\,dS + \int_V \rho_0 g\cdot\delta u\,dV \quad (109)$$

を得る. これを仮想仕事の原理という.



[8] 応力－ひずみ関係式

応力 $\mathbb{S}$ とひずみ $\mathbb{E}$ の関係式を構成式といい、等方弾性体の場合次の式で与えられる.

$$S_{ij} = \lambda E_{kk} \delta_{ij} + 2\mu E_{ij} \qquad (110)$$

λ, μ と E, G, ν とは次の関係がある.

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \qquad (111)$$

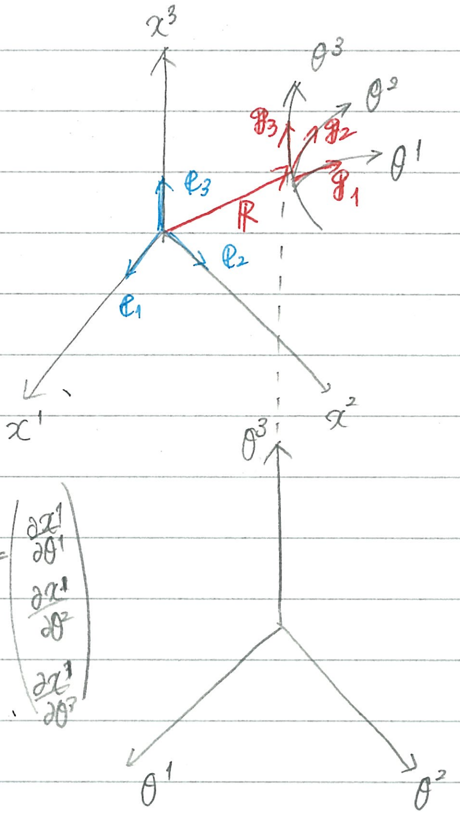
$$G = \mu \qquad (112)$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \qquad (113)$$

(110) を行列に直してかくと.

$$\begin{bmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{zz} \\ S_{xy} \\ S_{yz} \\ S_{zx} \end{bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{xx} \\ E_{yy} \\ E_{zz} \\ E_{xy} \\ E_{yz} \\ E_{zx} \end{bmatrix} \qquad (114)$$

＜第2部 一般テンソル解析と弾性力学＞ 緑15章



$$g_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \theta^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \theta^2} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \theta^3} \end{pmatrix}$$

[1] 一般テンソル解析（緑 P.138－143）

空間に直交座標系（x^1, x^2, x^3）を固定し、（$\theta^1, \theta^2, \theta^3$）に対応づける。このとき、次のように基底を設定する。

$$g_i = \frac{\partial R}{\partial \theta^i} \quad (1)$$

これに $R = x^j e_j$ を代入すると、

$$g_i = \frac{\partial x^j}{\partial \theta^i} e_j \quad (2)$$

となる。この g_i を共変基底ベクトルという。
一方、反変基底ベクトル g^i は

$$g^i = \frac{\partial \theta^i}{\partial x^j} e_j \quad (3)$$

として与えられる。式(2)，(3)より，

内積を簡単にするための工夫．

$$g_i \cdot g^j = \frac{\partial x^l}{\partial \theta^i} \boxed{e_l} \cdot \frac{\partial \theta^j}{\partial x^m} \boxed{e_m} = \frac{\partial x^l}{\partial \theta^i} \cdot \frac{\partial \theta^j}{\partial x^l} = \delta_i^j \quad (4)$$

一般テンソル解析においては，以下のような関係も成り立つ．

$$g_i \cdot g_j = g_{ij} \quad (5)$$

$$g^i \cdot g^j = g^{ij} \quad (6)$$

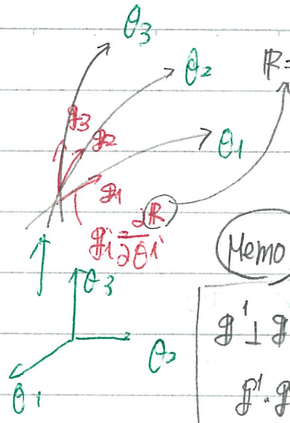
$$g_i \cdot g^j = \delta_i^j \quad (7)$$

$$g^i = g^{ij} g_j \quad (8)$$

$$g_i = g_{ij} g^j \quad (9)$$

$g^1 \perp g_2$， $g^1 \perp g_3$ $g^1 g_1 = 1$

このとき，g_{ij}，g^{ij} は共変計量テンソル，反変計量テンソルといい，
(8)，(9) のように添え字の上げ下げに利用される．



$R = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3$
$= x^l e_l$

計量テンソルg_{ij}の成分は、

$$g_{ij} = g_i \cdot g_j$$
$$= \frac{\partial x^l}{\partial \theta^i} e_l \cdot \frac{\partial x^m}{\partial \theta^j} e_m$$
$$= \frac{\partial x^l}{\partial \theta^i} \frac{\partial x^l}{\partial \theta^j}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \theta^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \theta^1} & \frac{\partial x^3}{\partial \theta^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \theta^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \theta^2} & \frac{\partial x^3}{\partial \theta^2} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \theta^3} & \frac{\partial x^2}{\partial \theta^3} & \frac{\partial x^3}{\partial \theta^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \theta^1} & \frac{\partial x^1}{\partial \theta^2} & \frac{\partial x^1}{\partial \theta^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial \theta^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \theta^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \theta^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial \theta^1} & \frac{\partial x^3}{\partial \theta^2} & \frac{\partial x^3}{\partial \theta^3} \end{pmatrix} \quad (10)$$

Memo

$$\boxed{\begin{gathered} g^1 \perp g_2 \quad g^1 \perp g_3 \\ g^1 \cdot g_1 = 1 \end{gathered}}$$
$$\Downarrow$$
$$g_i \cdot g^j = \delta_i^j$$

$$e_l \cdot e_m = e_l \cdot e^m$$
$$= \delta_l^m$$

として与えられる．g_{ij}の行列式をgとすると，

$$g = |g_{ij}| = \left| \frac{\partial x^i}{\partial \theta^j} \right|^2 \quad (11)$$

と書ける．これは面積要素，体積要素を算出する上で重要な関係である

次に、g^{ij}の成分に関して調べる

Memo

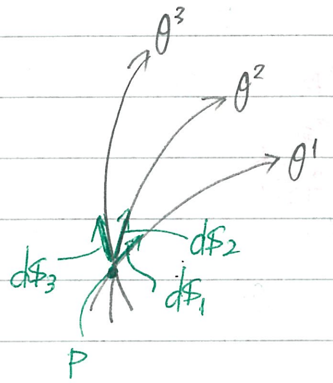
$$dx^1 dx^2 dx^3 = J\, d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3$$
$$J \Rightarrow \sqrt{g}$$

$$g^{ij} = g^i \cdot g^j$$
$$= \boxed{\frac{\partial \theta^i}{\partial x^l} e_l} \cdot \frac{\partial \theta^j}{\partial x^m} e_m$$
$$= \frac{\partial \theta^i}{\partial x^l} \frac{\partial \theta^j}{\partial x^l}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \theta^1}{\partial x^2} & \frac{\partial \theta^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \theta^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \theta^2}{\partial x^2} & \frac{\partial \theta^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \theta^3}{\partial x^1} & \frac{\partial \theta^3}{\partial x^2} & \frac{\partial \theta^3}{\partial x^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \theta^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \theta^3}{\partial x^1} \\ \frac{\partial \theta^1}{\partial x^2} & \frac{\partial \theta^2}{\partial x^2} & \frac{\partial \theta^3}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \theta^1}{\partial x^3} & \frac{\partial \theta^2}{\partial x^3} & \frac{\partial \theta^3}{\partial x^3} \end{pmatrix} \quad (12)$$

とかける．このときg^{ij}の行列式はg_{ij}の逆行列であることを考慮して

$$|g^{ij}| = \left| \frac{\partial \theta^i}{\partial x^j} \right|^2 = \frac{1}{g} \quad (13)$$

となる．



線素

線素 $d\boldsymbol{R} = \boldsymbol{g}_i d\theta^i$ の長さ ds について考えよう.

重要 $ds^2 = \boldsymbol{g}_i d\theta^i \cdot \boldsymbol{g}_j d\theta^j = g_{ij} d\theta^i d\theta^j$ (14)

このように, g_{ij} は線素の長さと関連づけられる.
もし, 線素が θ^1 に沿う線素 $d\boldsymbol{s}_1$ に一致すれば

$$d\boldsymbol{s}_1 = \boldsymbol{g}_1 d\theta^1 \qquad (15)$$

であり, $|d\boldsymbol{s}_1|$ は式(14)より,

$$|d\boldsymbol{s}_1| = \sqrt{g_{11}}\, d\theta^1 \qquad (16)$$

となる.

$d\boldsymbol{s}_1$ と x_j 軸のなす余弦を l_{1j} とすれば

$$l_{1j} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial x^j}{\partial \theta^1} \qquad (17)$$

にて与えられる.

(解説) $d\boldsymbol{s}_1 \cdot \boldsymbol{e}_j = \left(\dfrac{\partial x^k}{\partial \theta^1} \boldsymbol{e}_k \right) d\theta^1 \boldsymbol{e}_j$

$$= \frac{\partial x^j}{\partial \theta^1} d\theta^1 \qquad (18)$$

一方, ベクトル解析より,

$$d\boldsymbol{s}_1 \cdot \boldsymbol{e}_j = |d\boldsymbol{s}_1| \times 1 \times l_{1j} \qquad (19)$$

よって

$$l_{1j} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial x^j}{\partial \theta^1} \qquad (20)$$

となる.

そこで、θ^i に沿う $d\mathbf{s}_i$ と θ^j に沿う $d\mathbf{s}_j$ の間の角を α_{ij} とすれば

iとjについて和をとらない。

$$d\mathbf{s}_i\cdot d\mathbf{s}_j = |d\mathbf{s}_i||d\mathbf{s}_j|\cos\alpha_{ij} = \sqrt{g_{ii}}\sqrt{g_{jj}}\,(\cos\alpha_{ij})\,d\theta^i d\theta^j \quad (21)$$

となり、また

$$d\mathbf{s}_i\cdot d\mathbf{s}_j = \mathbf{g}_i\, d\theta^i\cdot\mathbf{g}_j\, d\theta^j = g_{ij}\, d\theta^i d\theta^j \quad \text{(和をとらない)} \quad (22)$$

より、

$$\cos\alpha_{ij} = \frac{g_{ij}}{\sqrt{g_{ii}}\sqrt{g_{jj}}} \quad \text{(和をとらない)} \quad (23)$$

を得る。

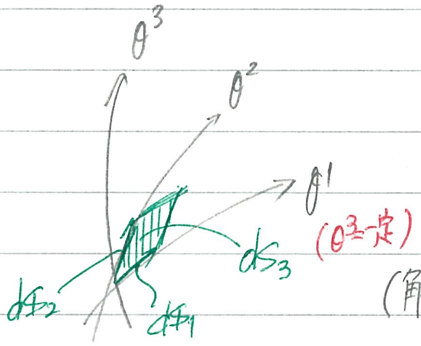
Memo

$\mathbf{g}_i \Rightarrow \frac{\partial}{\partial\theta^i}$

テンソル ← | → 微分形式

$\mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{g}^i = a^i\mathbf{g}_j \Leftrightarrow a = a_i\frac{\partial}{\partial\theta^i} = a^i d\theta^i$

面積素



$$dS_3 = |d\mathbf{s}_1\times d\mathbf{s}_2| = |\mathbf{g}_1\times\mathbf{g}_2|\,d\theta^1 d\theta^2$$
$$= \sqrt{g g^{33}}\,d\theta^1 d\theta^2 \quad (24)$$

(解説)

反変基底ベクトルのもう一つの定義より(緑本(14.2))

$$\mathbf{g}^3 = \frac{\mathbf{g}_1\times\mathbf{g}_2}{|\mathbf{g}_1\,\mathbf{g}_2\,\mathbf{g}_3|} \quad (25)$$

$$\rightleftarrows\ \mathbf{g}_1\times\mathbf{g}_2 = |\mathbf{g}_1\,\mathbf{g}_2\,\mathbf{g}_3|\,\mathbf{g}^3 = \sqrt{g}\,\mathbf{g}^3 \quad (26)$$

ヤコビ行列そのもの

$$\rightleftarrows\ dS_3 = \sqrt{g g^{33}}\,d\theta^1 d\theta^2 \quad (27)$$

体積素

スカラー3重積
(緑本 P.6)

$$dV = d\mathbf{s}_1\cdot(d\mathbf{s}_2\times d\mathbf{s}_3)$$
$$= |\mathbf{g}_1\,\mathbf{g}_2\,\mathbf{g}_3|\,d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3$$
$$= \sqrt{g}\,d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 \quad (28)$$

No. 24

Date 2016. 6. 30

曲線直交座標

曲線座標 $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ が曲線直交座標であるとき、

$$g_{ij}=0 \quad (i \neq j) \qquad (29)$$

で与えられる。

Memo

$$[g_{ij}] = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix}$$

$$g^{11} = \frac{1}{g_{11}} \quad g^{22} = \frac{1}{g_{22}}, \quad g^{33} = \frac{1}{g_{33}} \qquad (30)$$

で与えられる。

物理成分

物理成分

$$\boldsymbol{v} = v^r \boldsymbol{g}_r = \sum_{r=1}^{3} v^r \sqrt{g_{rr}} \, \frac{\boldsymbol{g}_r}{\sqrt{g_{rr}}}$$

$$= v_s \boldsymbol{g}^s = \sum_{s=1}^{3} v_s \sqrt{g^{ss}} \, \frac{\boldsymbol{g}^s}{\sqrt{g^{ss}}} \qquad (31)$$

単位ベクトル

共変微分

クリストッフェル記号 $\left\{ {s \atop i\,j} \right\}$ と書く場合もある

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial \theta^j} = \boldsymbol{g}_{i,j} = \Gamma^s_{ij} \boldsymbol{g}_s \quad \text{(緑本 P.124 (14.57))} \qquad (32)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}^i}{\partial \theta^j} = \boldsymbol{g}^i_{,j} = -\Gamma^i_{jr} \boldsymbol{g}^r \quad \text{(緑本 P.126 (14.72))} \qquad (33)$$

よって、

$$\boldsymbol{v}_{,r} = \frac{\partial}{\partial \theta^r}(v^i \boldsymbol{g}_i) = v^i_{,r} \boldsymbol{g}_i + v^i \boldsymbol{g}_{i,r}$$

$$= (v^i_{,r} + \underbrace{v^s \Gamma^i_{sr}}_{\text{補正ターム}}) \boldsymbol{g}_i \qquad (34)$$

$\boldsymbol{v}_{,r} = v^i|_r \boldsymbol{g}_i$ とすると

$$v^i|_r = v^i_{,r} + \Gamma^i_{sr} v^s \qquad (35)$$

で与えられる。2階のテンソルにおいても

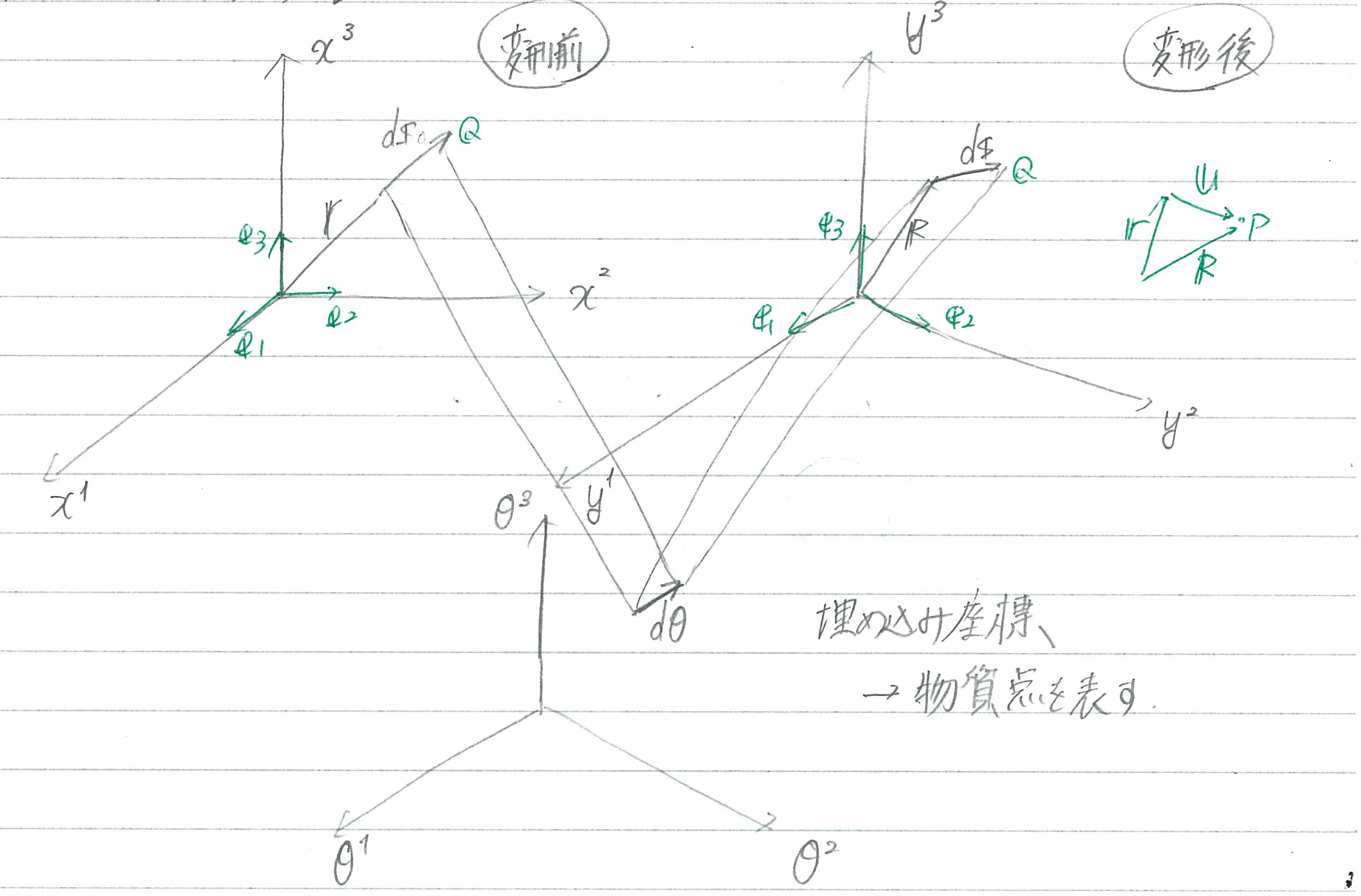
$$A_{ij}|_r = A_{ij,r} - \Gamma^m_{ir} A_{mj} - \Gamma^m_{jr} A_{im}$$

$$A^i_j|_r = A^i_{j,r} + \Gamma^i_{rm} A^m_j - \Gamma^m_{rj} A^i_m \qquad (37)$$

$$A^{ij}|_r = A^{ij}_{,r} + \Gamma^i_{rm} A^{mj} + \Gamma^i_{rm} A^{im} \qquad (38)$$

で与えられる。

[2] ひずみテンソル



変形前と変形後の線素の2乗の差を次のようにおく

$$ds^2 - ds_0^2 = 2\gamma_{ij}\, d\theta^i d\theta^j \qquad (39)$$

変形前の基底ベクトル

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta^i} = \mathbf{r}_{,i} \qquad (40)$$

$$\mathbf{G}_i = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta^i} = \mathbf{R}_{,i} \qquad (41)$$

さて、式(39)の左辺は式(14)より、

$$ds^2 - ds_0^2 = (G_{ij} - g_{ij})\, d\theta^i d\theta^j \qquad (42)$$

であり、

$$\boxed{\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(G_{ij} - g_{ij})} \qquad (43)$$

で与えられる。

変位を $\mathbf{u}$ とすると,

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{u} \quad (44)$$

であり,

共変微分

$$\mathbf{G}_i = \mathbf{R}_{,i} = \mathbf{r}_{,i} + \mathbf{u}_{,i} = \mathbf{g}_i + u_r|_i \mathbf{g}^r \quad (45)$$

$$\begin{aligned} G_{ij} &= \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j \\ &= (\mathbf{r}_{,i} + \mathbf{u}_{,i}) \cdot (\mathbf{r}_{,j} + \mathbf{u}_{,j}) \\ &= g_{ij} + \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{u}_{,j} + \mathbf{g}_j \cdot \mathbf{u}_{,i} + \mathbf{u}_{,i} \cdot \mathbf{u}_{,j} \quad (46) \end{aligned}$$

ここで,

$$\mathbf{u}_{,i} = u^r|_i \mathbf{g}_r = u_r|_i \mathbf{g}^r \quad (47)$$

剛性座標

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_i|_j + u_j|_i + u^r|_i u_r|_j\right) \quad (48)$$

となる. これをラグランジュのひずみ, あるいはグリーン・ラグランジュのひずみという.

$\theta^i = x_i$ のとき, $\mathbf{g}^i = \mathbf{g}_i = \mathbf{e}_i$ となり,

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}}_{\text{微小ひずみ}} + \underbrace{\frac{\partial u_r}{\partial x_i}\frac{\partial u_r}{\partial x_j}}_{\text{幾何学的非線形}}\right) \quad (49)$$

となり, デカルト座標(式'61)のものと一致する.

第1部

・自動車のクラッシュ
・座屈

[3] 直交曲線座標における微小ひずみ

式(29)に示したように直交曲線座標では、

$$g_{ij} = g^{ij} = 0 \quad (i \neq j) \qquad (50)$$

$$g^{ii} = 1/g_{ii} \qquad (51)$$

$$g = g_{11} g_{22} g_{33} \qquad (52)$$

となる。この場合、(例題14.6参照(緑本))

$$\Gamma^{r}_{ij} = 0 \quad (i \neq j \neq r) \qquad (53)$$

$$\Gamma^{r}_{ii} = -\frac{1}{2g_{rr}}(g_{ii})_{,r} \quad (r \neq i) \qquad (54)$$

$$\Gamma^{i}_{ir} = \Gamma^{i}_{ri} = \frac{1}{2g_{ii}}(g_{ir})_{,r} \qquad (55)$$

さて、非線形項を省略し、ラグランジュのひずみ成分を書き直せば

$u_{i,j} - \Gamma^{s}_{ij} u_s$ (15.36)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_i|_j + u_j|_i)$$

$\boxed{\Gamma^{s}_{ij} = \Gamma^{s}_{ji}}$

$(i \neq k)$

$$= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} - 2\Gamma^{s}_{ij} u_s) \qquad (56)$$

となり、式(53)〜(55)より

$$\varepsilon_{ii} = u_{i,i} \overset{(55)}{\boxed{-\frac{u_i}{2g_{ii}}(g_{ii})}} \overset{(54)}{\boxed{+\frac{u_j}{2g_{jj}}(g_{ii})_{,j}}} \overset{(54)}{\boxed{+\frac{u_k}{2g_{kk}}(g_{ii})_{,k}}} \qquad (57)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left[u_{i,j} + u_{j,i} \boxed{-\frac{u_i}{g_{ii}}(g_{ii})_{,j}} \underset{(54)}{\boxed{-\frac{u_j}{g_{jj}}(g_{jj})_{,i}}}\right] \qquad (58)$$

ここで、(54)

$$\tilde{h}_1 = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}, \quad \tilde{h}_2 = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}, \quad \tilde{h}_3 = \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \qquad (59)$$

を導入する。ここで物理成分では、

$$\tilde{u}_i = \tilde{h}_i u_i \qquad (60)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \tilde{h}_i \tilde{h}_j \varepsilon_{ij} \qquad (61)$$

とかける。

Date 2016. 7. 7

式 (57), (58), (60), (61) より

*導出は 緑 P.147 [解説]

$$\begin{cases} \tilde{\varepsilon}_{ii} = h_i \dfrac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \theta^i} + \tilde{h}_i \tilde{h}_j \tilde{u}_j \dfrac{\partial}{\partial \theta^j}\left(\dfrac{1}{\tilde{h}_i}\right) + \tilde{h}_k \tilde{h}_i \tilde{u}_k \dfrac{\partial}{\partial \theta^k}\left(\dfrac{1}{\tilde{h}_i}\right) & (62) \\ \tilde{\varepsilon}_{ij} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\tilde{h}_j}{\tilde{h}_i}\dfrac{\partial}{\partial \theta^j}(\tilde{h}_i \tilde{u}_i) + \dfrac{\tilde{h}_i}{\tilde{h}_j}\dfrac{\partial}{\partial \theta^i}(\tilde{h}_j \tilde{u}_j)\right) & (63) \end{cases}$$

を得る.

Memo

$$\varepsilon_{ij}\, \underset{\sim}{g}^i \otimes \underset{\sim}{g}^j = \varepsilon_{ij}\sqrt{g^{ii}}\sqrt{g^{jj}} \cdot \frac{g^i}{\sqrt{g^{ii}}} \otimes \frac{g^j}{\sqrt{g^{jj}}}$$

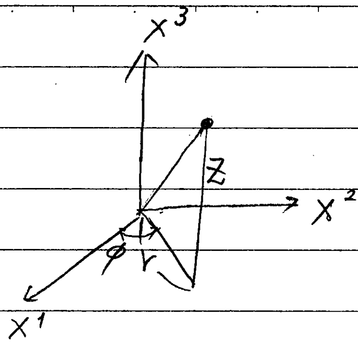
$$= \varepsilon_{ij} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}}_{\tilde{h}_i} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{g_{jj}}}}_{\tilde{h}_j} \cdot \frac{g^i}{\sqrt{g^{ii}}} \otimes \frac{g^j}{\sqrt{g^{jj}}}$$

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} \tilde{h}_i \tilde{h}_j$$

$$u_i g^i = u_i \sqrt{g^{ii}} \frac{g^i}{\sqrt{g^{ii}}} = \boxed{\cancel{x_i}\, u_i \tilde{h}_i} \frac{g^i}{\sqrt{g^{ii}}}$$

$$\tilde{u}_i = u_i \tilde{h}_i$$

円柱座標、



$$\theta^1 = r,\quad \theta^2 = \phi,\quad \theta^3 = z \qquad (64)$$

図より、

$$\left.\begin{aligned} x^1 &= r\cos\phi \\ x^2 &= r\sin\phi \\ x^3 &= z \end{aligned}\right\} \qquad (65)$$

$R = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3$ とすると、

$$\underset{\uparrow\ \frac{\partial R}{\partial \theta^1}}{g_1} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad g_2 = \begin{pmatrix} -r\sin\phi \\ r\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix},\qquad g_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g_{11} = g_1 \cdot g_1 = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} = \cos^2\phi + \sin^2\phi = 1 \qquad (67)$$

$$g_{22} = g_2 \cdot g_2 = \begin{pmatrix} -r\sin\phi \\ r\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r\sin\phi \\ r\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} = r^2\sin^2\phi + r^2\cos^2\phi = r^2 \qquad (68)$$

$$g_{33} = g_3 \cdot g_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \qquad (69)$$

式(62)
(63)
に代入

$$\tilde{h}_1 = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1,\quad \tilde{h}_2 = \frac{1}{\sqrt{r^2}} = \frac{1}{r},\quad \tilde{h}_3 = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1 \qquad (70)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{rr} = \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial r} \qquad (71)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{\phi\phi} = \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{u}_\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r)\,\tilde{u}_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{u}_\phi}{\partial \phi} + \frac{\tilde{u}_r}{r} \qquad (72)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{zz} = \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial z} \qquad (73)$$

$$\tilde{\gamma}_{\phi z} = 2\tilde{\varepsilon}_{\phi z} = r\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\tilde{u}_\phi\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\tilde{u}_z\right)$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \phi} + \frac{\partial \tilde{u}_\phi}{\partial z} \qquad (74)$$

$$\tilde{\gamma}_{r\phi} = 2\tilde{\varepsilon}_{r\phi} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\tilde{u}_r\right) + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\tilde{u}_\phi}{r}\right)$$

$$= \frac{\partial \tilde{u}_\phi}{\partial r} - \frac{\tilde{u}_\phi}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial \phi} \qquad (76)$$

$$\tilde{\gamma}_{zr} = 2\tilde{\varepsilon}_{zr} = \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial z} \qquad (75)$$

テスト範囲

、質量保存

、運動量保存

、エネルギー保存

、ラグランジュのひずみ

、幾何学的非線形の仮想仕事

、球座標の反変、共変基底ベクトル

、N-S方程式

微小ひずみの物理成分

[4] 曲座標系におけるCauchyの公式と平衡方程式

応力ベクトル $\mathbb{T} = T^j G_j$, 法線ベクトル $\nu = \nu_i G^i$

応力テンソル $\mathbb{T} = \tau^{ij} G_i \otimes G_j$

Cauchyの公式

$$T^j = \tau^{ij} \nu_i \qquad (緑本 (15.87)) \qquad (77)$$

各自学習のこと

平衡方程式

$$\tau^{ij}|_i + F^j = 0 \qquad (緑本 (15.94)) \qquad (78)$$

(78)から、直交曲線座標での平衡方程式を求めよう.
応力 σ^{ij}, 体積力 $F_{(p)}{}^j$ 次のように表される

$$\sigma^{ij} = \frac{1}{H_i} \frac{1}{H_j} \tau^{ij} \qquad (79)$$

$$F_{(p)}{}^j = \frac{1}{H_j} F^j \qquad (80)$$

ただし,

$$H_i = \frac{1}{\sqrt{G_{ii}}} \qquad (81)$$

Memo

$$\tau^{ij} G_i \otimes G_j = \underbrace{\boxed{\tau^{ij} \sqrt{G_{ii}} \sqrt{G_{jj}}}}_{\sigma^{ij}} \ \underset{e_i}{\frac{1}{\sqrt{G_{ii}}}} \otimes \underset{e_j}{\frac{1}{\sqrt{G_{jj}}}}$$

$$F^j G_j = \underbrace{\boxed{F^j \sqrt{G_{jj}}}}_{F_{(p)}{}^j} \frac{G_j}{\sqrt{G_{jj}}}$$

$\begin{pmatrix} r.\theta.\varphi \\ r.\theta.z \end{pmatrix}$

このとき (78) は

$$\frac{1}{H_j} \left(\tau^{ij}|_i + F^j \right) = 0$$

であり, これを変形すると.

Date 2016.7.14

(15.60) (15.61)
(15.98)

$$
\left.
\begin{aligned}
&H_1H_2H_3\left\{\left(\frac{\sigma^{11}}{H_2H_3}\right)_{,1}+\left(\frac{\sigma^{21}}{H_3H_1}\right)_{,2}+\left(\frac{\sigma^{31}}{H_1H_2}\right)_{,3}\right\}+\sigma^{21}H_1H_2\left(\frac{1}{H_1}\right)_{,2}\\
&\quad+\sigma^{31}H_3H_1\left(\frac{1}{H_1}\right)_{,3}-\sigma^{22}H_1H_2\left(\frac{1}{H_2}\right)_{,1}-\sigma^{33}H_3H_1\left(\frac{1}{H_3}\right)_{,1}+F_{(p)}^{1}=0\\
&H_1H_2H_3\left\{\left(\frac{\sigma^{12}}{H_2H_3}\right)_{,1}+\left(\frac{\sigma^{22}}{H_3H_1}\right)_{,2}+\left(\frac{\sigma^{32}}{H_1H_2}\right)_{,3}\right\}+\sigma^{12}H_1H_2\left(\frac{1}{H_2}\right)_{,1}\\
&\quad+\sigma^{32}H_2H_3\left(\frac{1}{H_2}\right)_{,3}-\sigma^{33}H_2H_3\left(\frac{1}{H_3}\right)_{,2}-\sigma^{11}H_1H_2\left(\frac{1}{H_1}\right)_{,2}+F_{(p)}^{2}=0\\
&H_1H_2H_3\left\{\left(\frac{\sigma^{13}}{H_2H_3}\right)_{,1}+\left(\frac{\sigma^{23}}{H_3H_1}\right)_{,2}+\left(\frac{\sigma^{33}}{H_1H_2}\right)_{,3}\right\}+\sigma^{13}H_3H_1\left(\frac{1}{H_3}\right)_{,1}\\
&\quad+\sigma^{23}H_2H_3\left(\frac{1}{H_3}\right)_{,2}-\sigma^{11}H_3H_1\left(\frac{1}{H_1}\right)_{,3}-\sigma^{22}H_2H_3\left(\frac{1}{H_2}\right)_{,3}+F_{(p)}^{3}=0
\end{aligned}
\right\} \quad (82)
$$

円柱座標系では、

$$H_1=1 \qquad H_2=\frac{1}{r}, \qquad H_3=1 \qquad (83)$$

となる。

このとき式(82)は、

$$\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial(r\sigma^{rr})}{\partial r}+\left(\frac{\partial\sigma^{\phi}}{\partial\phi}\right)+\frac{\partial(r\sigma^{rz})}{\partial z}\right\}-\sigma^{\phi\phi}\frac{1}{r}+F_{(\phi)}^{1}=0$$

$$\rightleftarrows\ \frac{\partial\sigma^{rr}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma^{r\phi}}{\partial\phi}+\frac{\partial\sigma^{rz}}{\partial z}+\frac{1}{r}(\sigma^{rr}-\sigma^{\phi\phi})+F_{(\phi)}^{1}=0$$

$$\frac{\partial\sigma^{rr}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma^{r\phi}}{\partial\phi}+\frac{\partial\sigma^{rz}}{\partial z}+\frac{1}{r}(\sigma^{rr}-\sigma^{\phi\phi})+F_r=0$$

$$\frac{\partial\sigma^{r\phi}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma^{\phi\phi}}{\partial\phi}+\frac{\partial\sigma^{\phi z}}{\partial z}+\frac{2}{r}\sigma^{r\phi}+F_\phi=0$$

$$\frac{\partial\sigma^{rz}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma^{\phi z}}{\partial\phi}+\frac{\partial\sigma^{zz}}{\partial z}+\frac{\sigma^{rz}}{r}+F_z=0.$$